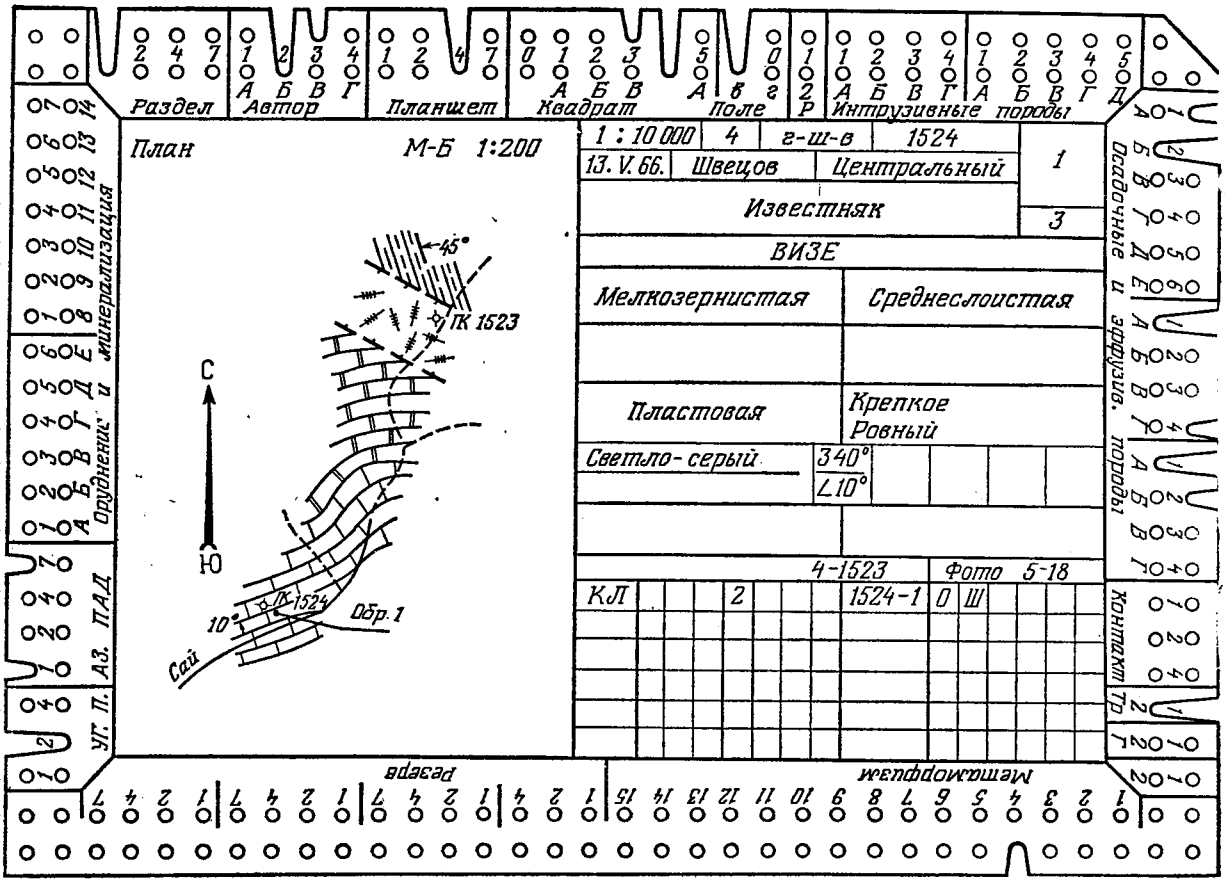


НАУЧНЫЕ МЕТОДЫ

Scientific Method in Analysis of Sediments

John G. Griffiths

Professor of Petrography,
Department of Geochemistry
and Mineralogy,
Pennsylvania State University

McGRAW-HILL BOOK COMPANY
NEW YORK ST. LOUIS SAN FRANCISCO TORONTO LONDON SYDNEY
1967

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Фундаментальные труды зарубежных ученых по геологии, геофизике и геохимии

Дж. Гриффитс

ИССЛЕДОВАНИЯ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Издательство
«МИР»
Москва
1971

УДК 550; 550.8

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Э. А. Еганова, А. В. Ильина и Г. И. Ратниковой

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ПРЕДИСЛОВИЕМ

д-ра геол.-мин. наук Д. А. Родионова

В книге, представляющей собой справочное и учебное пособие, изложены разнообразные методы исследования осадочных пород, рассмотрены способы изучения их структуры, минерального состава и т. д. Особую ценность представляют описания методов обработки количественных аналитических данных с использованием современной математической статистики, которым посвящена большая часть книги. В работе даны четкие определения разнообразных математических понятий и терминов, широко использованы различные диаграммы и графики, объяснены способы их построения и интерпретации данных.

Это учебное и справочное руководство привлечет внимание геологов (литологов, нефтяников, гидрогеологов, четвертичников), специалистов по разведке стройматериалов, дорожников, инженеров-геологов.

Редакция литературы по вопросам геологических наук

Инд. 291
1971

Lithology.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книгу Гриффитса следует рассматривать с двух позиций. С одной стороны, это подробное описание и анализ процедур получения фактических данных об осадочных породах, а с другой — изложение объективных методов получения выводов на основе имеющейся информации.

Большое внимание автор уделяет правильной постановке геологических задач, сначала в интуитивной форме, с последующим переходом к формальной постановке и к рассмотрению математического аппарата, пригодного для решения конкретной задачи. Чтение книги значительно облегчается за счет большого числа геологических примеров, иллюстрирующих вычислительные процедуры, связанные с тем или иным методом.

Необходимо отметить, что изложение большинства статистических методов, применяемых при решении геологических задач автором, значительно упрощено. Безусловно, что для ознакомления с этими методами широкого круга геологов такое упрощение необходимо. Однако, применяя статистические методы при геологических исследованиях, полезно ознакомиться с более сложными работами, но тем не менее приспособленными для восприятия геологами. Примером такой работы может служить книга Крамбейна и Грейбилла «Статистические модели в геологии» («Мир», 1969 г.).

Практически все методы, рассмотренные в книге Гриффитса, изложены в работе Крамбейна и Грейбилла более подробно.

Ценность книги Гриффитса заключается в единстве описания процедур, сбора фактических данных и их последующей статистической обработки. При этом особенно важно определить структуру результата наблюдения, выразить ее через соответствующую математическую модель и подобрать нужный метод статистического анализа. Этому вопросу автор уделяет очень большое внимание. Кроме того, он подробно рассматривает проблему определения выборочного плана в зависимости от конкретной геологической задачи, т. е. вопрос о выборе целесообразной структуры проведения эксперимента, чему в геологии соответствует опробование и аналитические исследования изучаемых объектов.

Книга, безусловно, полезна для широкого круга советских геологов, не только занимающихся изучением осадочных образований, но и работающих в других, самых разнообразных отраслях геологии, так как изложенные в ней математические приемы обработки фактических данных можно с успехом применять в любых областях науки о Земле.

Перевод книги был осуществлен А. В. Ильиным (гл. 1—5), Г. И. Ратниковой (гл. 6—11) и Э. А. Егановым (гл. 12—22).

Д. Родионов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Настоящая книга представляет собой попытку обобщенного подхода к решению геологических задач с помощью научных методов, в основе которых лежит «Метод множества рабочих гипотез» Чеймберлина, предложенный еще в 1897 г. Конечно, в данной работе при этом методе используются современные постановки задач. Решить задачу — это значит четко ее сформулировать, определить возможные решения или гипотезы (или модели), проверить гипотезы на основе результатов эксперимента или наблюдаемых данных. Книга построена так, чтобы показать последовательность действий при выборе плана эксперимента или алгоритма решения поставленной задачи.

Необходимые в дальнейшем аксиоматические определения приведены в первой главе. Вторая глава содержит принципы построения выборочных планов. В третьей главе описана общая модель результатов измерений, а также дано определение *основных* и *производных свойств* объекта. Главы с 4 по 10 содержат изложение методов и процедур измерения основных характеристик, а в главе 11 описаны способы измерения производных свойств. В главе 12 описываются последовательность действий при подготовке данных к обработке, метод определения их информативности на основе различных уровней шкал измерения, а также выбор статистических характеристик, используемых в качестве оценок неизвестных параметров.

В главах с 13 по 21 изложены процедуры статистического анализа данных, а в последней главе даны некоторые общие выводы относительно состояния проблемы экспериментальных исследований в геологии.

Несмотря на то что приведенные в книге примеры относятся к петрографическому анализу обломочных пород, изложенные в ней методы обработки данных в связи с их общностью можно применять в любой области, где удастся определить генеральную совокупность и ее элементы.

Цель данной работы — описать методы решения задач в виде алгоритмов, а также дать основу для критического рассмотрения собранной информации и проверки ее соответствия намеченному плану, чтобы определить рабочую процедуру решения задачи.

В геологии, в частности, прогнозы, базирующиеся на существующих теориях, непосредственно с экономической точки зрения проверить трудно. Прирост запасов полезных ископаемых происходит значительно медленнее, чем «облегчение поиска», и успех в значительной мере будет зависеть от объема исследований по сбору информации, подтверждающей наши предположения.

Основы этой книги были заложены еще во время работы автора с д-ром М. А. Розенфельдом, который сделал существенный вклад в разработку методов и процедур.

Первые варианты некоторых частей книги были рассмотрены М. А. Розенфельдом и проф. Дж. Б. Барту, многие другие разделы опубликованы в той или иной форме в разных книгах и журналах.

Джон Г. Гриффитс

ГЛАВА 1

Научный метод

...Отсюда следует, что любое определение понятия «красный», которое признается нами как точное, на самом деле претенциозно и обманчиво. Столь же обманчивы все эмпирические определения — не только такие, как, например, «горячий» или «громкий», неопределенность которых очевидна, но и такие, как «сантиметр» и «секунда», которые мы так упорно считаем точными.

B. Russell, Human Knowledge, Its Scope and Limits, George Allen and Unwin, Ltd., p. 277, 1948

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Слово «анализ» обычно ассоциируется с лабораторными экспериментами. Принято считать, что в руководствах по анализу описывается процедура самого анализа и приводятся инструкции по сборке и использованию соответствующей аппаратуры или, другими словами, описывается техника эксперимента. Однако техника эксперимента — лишь очень небольшая часть того, что составляет содержание *метода*, который охватывает все аспекты изучения данной проблемы. Совершенно недостаточно описать лишь последовательность технических приемов. Их следует сочетать с целями и задачами данного исследования. Без такого философского подхода простой анализ оказывается бесплодным занятием, так как в этом последнем случае можно решать лишь очень ограниченный круг задач.

Описание метода касается самого существа любого научного исследования. Каждый исследователь должен выбрать один и только один метод, с помощью которого он может удовлетворительно и эффективно провести научное исследование. Выбор метода тесно связан с *целью исследования* и практически неотделим от нее. Если задача исследования сформулирована точно и однозначно, так же точно и однозначно определяется и способ ее решения. Если же цель исследования не вполне ясна и не может быть определена однозначно, столь же неопределенными будут и пути к ее достижению.

Отсюда следует, что перед выбором метода следует прежде всего четко сформулировать цель данного исследования. В общем научное исследование можно рассматривать как некоторую осмысленную попытку ответить на те или иные вопросы, которые возникают у человека при его общении с реальным миром. Итак, первый шаг в методике — правильная постановка вопроса. Например, на вопрос «Как далеко находится радуга от наблюдателя?» некоторые исследователи ранее приводили цифру -93×10^6 миль. Такой ответ следует отвергнуть как бессмысленный, так как вряд ли расстояние перед наблюдателем можно оценивать отрицательной величиной. Естественно, что подобный вопрос и ответ на него вызвали самые противоречивые суждения. Затем было установлено, что радуга возникает вследствие преломления световых лучей в капельках влаги. Тогда вопрос был сформулирован

по-другому: «Как далеко от наблюдателя находится источник света, создающий радугу?». Теперь ответ «-93×10^6» миль обретает полный смысл. Из этой чрезвычайно упрощенной аналогии становится очевидно, что одно из важнейших условий метода состоит в правильной формулировке вопросов, имеющих определенный смысл. Бессмысленные вопросы предопределяют бессмысленные ответы!

Из приведенного примера также ясно, что должны существовать способы определения расстояний, единицы измерения этих расстояний, а также ряд других категорий, которые и составляют метод данного анализа. Сведем различные этапы решения проблемы к следующему общему плану и будем считать его исходной формулировкой содержания термина «научный метод»:

1. Сформулировать вопрос.
2. Составить план эксперимента (или серии экспериментов), необходимого для получения ответа на вопрос.
3. Точно определить этапы работ (процедуру эксперимента), необходимые для получения исходных данных.
4. Классифицировать и свести воедино результаты наблюдений (исходные данные).
5. Проанализировать исходные данные.
6. Сделать вывод из результатов анализа.
7. Сформулировать гипотезу на основании сделанных выводов.
8. Предсказать новые выводы исходя из сформулированной гипотезы.
9. Проверить выводы с помощью дальнейших экспериментов.
10. Принять или отвергнуть гипотезу на основании анализа данных, полученных в предыдущем пункте, и ее соответствия или несоответствия предсказанию.

Предположим теперь, что мы сформулировали «простой» вопрос: «Каков вес данного образца породы?» или «Какова длина этого зерна кварца?». Обычно полагают, что ответами на эти вопросы являются единичные значения веса и длины, выраженные в соответствующих единицах измерения. Иными словами, мы заранее допускаем, что рассматриваемые объекты обладают соответствующей длиной и весом и что их можно выразить единственными совершенно определенными величинами, или *истинными значениями*. Проще говоря, мы ищем истину, в данном случае — истинный вес или истинную длину объекта. Но при нашем допущении мы не оговариваем различные условия. Например, вес одного и того же объекта на уровне моря будет одним, а на высоте 5000 футов — другим. Таким образом, чтобы величина истинного значения имела определенный смысл, необходимо задаться условиями, при которых она должна быть определена, а чтобы истинное значение было действительно однозначным, оно должно быть постоянным при постоянных условиях.

Исходя из этих условий можно сделать три основных допущения: во-первых, истинное значение существует для каждого измерения; во-вторых, если оно существует, имеется возможность его определить; в-третьих, мы можем оговорить те условия, при которых определяется истинное значение. Не следует забывать об этих допущениях, как о гарантии, что мы не совершим догматических ошибок, и как о напоминании о том, что никакой ответ нельзя принимать за окончательный результат.

Однако успокаиваться на этих допущениях не следует, так как они еще недостаточны для определения истинного значения. В действительности определить истинное значение для достижения любой цели чрезвычайно трудно и иногда считается вообще невозможным. Практически эта точка зрения верна, но возможное решение вопроса можно найти при следующем философском подходе к формулировке понятия «научный метод».

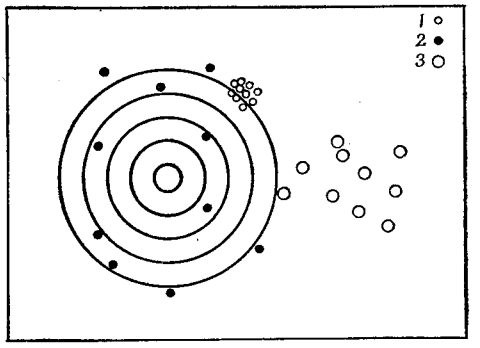
Существует точка зрения, тишично современная, согласно которой утверждение о недостижимости объекта это не то же, что утверждение о несуществовании объекта. Последователи такой точки зрения считают, что любой объект, к которому можно приблизиться на какое-то заданное расстояние, каким бы малым оно ни было, существует, несмотря на то что он никогда не может быть достигнут. Если точные ответы нельзя получить в результате конечного множества последовательных операций, они тем не менее

могут быть теоретически возможными, так как являются пределами, к которым надо стремиться при увеличении точности решения. Эти пределы тогда называют идеалами.

Согласно постулату, общему при всех исследованиях, такие идеалы существуют и набор всех идеалов составляет реальный мир. Этот идеал в статистике называется «стохастическим пределом»... Идеал — это «истинное значение», а все истинное является идеалом.

Истинное значение данного измеряемого расстояния будет пределом бесконечного числа результатов измерений, рассматриваемых со статистических позиций [1].

Если истинное значение существует и наши эксперименты обеспечивают возможность подойти к нему путем последовательных приближений, точность эксперимента можно считать основой для суждения о результатах любого эксперимента: один эксперимент точнее другого, если он обеспечивает лучшее приближение к истинному значению.



Ф и г. 1.1. Систематическое смещение и точность на примере поражения мишени при стрельбе.
1 — стрелок A; 2 — стрелок B; 3 — стрелок C.

Этот вывод приводит нас к общему определению понятия точности, но не дает возможности узнать эту точность в любом конкретном случае, так как мы еще не установили критерии, с помощью которых можно было бы определить, какой из двух экспериментов по своим результатам находится ближе к истинному значению. Мы затрагиваем в данном случае чрезвычайно широкий круг вопросов, на которые здесь вряд ли можно достаточно убедительно ответить. Рассматриваемый ниже пример, вероятно, поможет нам понять метод подхода к этому вопросу. Этот метод мы будем использовать и в дальнейшем.

Предположим, что три стрелка стреляют в одну цель. Результаты их стрельбы показаны на фиг. 1.1. Стрелок A — опытный. Все его пули легли кучно, хотя ни одна из них не попала в центр мишени; стрелок B менее опытен, и его пули разбросаны на большой площади. Стрелок C — новичок, одна часть его пуль прошла мимо мишени, другая попала в нее, причем все его пули сосредоточились по одну сторону от ее центра. Эти три результата лучше всего можно оценить, измерив отклонение [2] двумя способами: во-первых, определив среднее отклонение для каждого стрелка (среднюю точку), узнать разницу между этим средним отклонением и центром мишени; во-вторых, определить отклонение каждой пули по отношению к средней для данного стрелка точке.

Пули стрелка A расположились кучно вокруг соответствующей средней точки, причем каждая из пуль находится почти на одном и том же расстоянии от центра мишени, т. е. для стрелка A характерна некоторая систематическая ошибка. Пули стрелка B широко разбросаны вокруг его средней точки и вокруг центра мишени, но среднее отклонение от цели сравнительно невелико. Таким образом, результаты стрелков A и B отличаются незначительным рассеянием. Что же касается результата стрелка C, то здесь уже при значительном рассеянии наблюдается систематическое смещение от центра. Чтобы улучшить результаты, каждый стрелок сначала должен избавиться от случайных погрешностей, т. е. уменьшить разброс пуль относительно средней точки (увеличить кучность). После того как случайная ошибка

[1] C. W. Churchman, Theory of Experimental inference, The Macmillan Company, pp. 57—58, 1948.

[2] Отклонение равно расстоянию по радиусу от отверстия, оставленного каждой пулей, до центра мишени.

будет устранена, следует избавиться от систематического смещения центра рассеяния. Таким образом, стрелку A, имеющему хорошую кучность, достаточно только изменить положение прицела винтовки, чтобы постоянно поражать цель. Стрелку B необходимо увеличить кучность, тогда он приблизится к результатам стрелка A, но для этого потребуется практика. Стрелку C нужно увеличить кучность и избавиться от систематического смещения центра.

В этом эксперименте истинное значение известно и прицельную точность стрельбы каждого стрелка можно выразить через отклонение его средней точки от центра мишени. Кучность стрельбы каждого стрелка можно выразить величиной отклонения пуль от соответствующей средней точки [1]. Стрелок стреляет кучно, но не точно, стрелок B попадает в цель, но стреляет некучно, стрелок C стреляет прицельно неточно и некучно.

Отсюда следует, что прицельная точность и кучность частично зависимы. Увеличение кучности необязательно предопределяет увеличение прицельной точности. Однако ясно, что в тех случаях, когда истинное значение неизвестно, наилучший способ состоит в том, чтобы увеличить прицельную точность путем выявления систематической ошибки, а затем, ликвидируя отклонение, увеличить точность. В большинстве проводимых экспериментов истинное значение неизвестно, поэтому мы стараемся добиться бóльшей точности результатов. Только после этого можно приступать к повышению точности.

На основании описанного эксперимента мы можем определить точность следующим образом. *Одна серия экспериментов считается более точной* (precise) *относительно другой в том случае, когда в результатах первой серии зафиксирован меньший разброс относительно ее среднего значения* (или лучшая сходимость, что можно выразить формулой. — *Ред.*). Для этого следует определить среднее значение серии и измерить отклонения от этого среднего путем вычисления величины дисперсии значений, или характеристики их разброса, вокруг среднего.

Эти статистические характеристики определяют по следующим формулам:

$$\text{Среднее арифметическое} = \overline{X} = \sum_{1}^{n} \frac{X_i}{n}. \tag{1.1}$$

$$\text{Характеристика разброса значений} = \text{дисперсия} = \hat{\sigma}^2 = \sum_{1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}, \tag{1.2}$$

где X_i — частное значение переменной X, n — число значений X, Σ — знак суммы, которую нужно вычислить для всех значений X, $X_i - \overline{X}$ — индивидуальное отклонение от среднего. Чтобы определить дисперсию, частное отклонение возводят в квадрат, n таких квадратов делят на число, которое на единицу меньше n.

Если бы мы могли использовать истинное значение для определения среднего, то в уравнении (1.2) делителем было бы значение n, но так как $\overline{X}$ вычислено через сумму X по уравнению

$$n\overline{X} = \sum_{1}^{n} X_i,$$

то очевидно, что при данных значениях $\overline{X}$ и $(n-1)$ X_i величина n становится постоянной; отсюда мы теряем одну степень свободы, заменяя истинное значение его приближенной характеристикой $\overline{X}$.

[1] Под термином «прицельная точность» здесь имеется в виду отсутствие систематических отношений, тогда как в советской литературе под термином «кучность» подразумевается точность.— *Прим. ред.*

Уравнения (1.1) и (1.2) чрезвычайно нужны, так как они дают возможность охарактеризовать полный набор значений с помощью двух вычисленных по этим уравнениям величин — среднего арифметического и дисперсии. Дисперсия является здесь квадратной функцией. Чтобы свести ее к обычной линейной функции, следует найти ее квадратный корень, который называется *средним квадратичным отклонением*, или *стандартным отклонением*

$$\hat{\sigma}=\left[\sum_{1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right]^{1/2}. \tag{1.3}$$

Следует также заметить, что величину отклонения необходимо возвести в квадрат до суммирования, так как сумма отклонений относительно среднего значения всегда равна нулю, в чем и выражается свойство среднего значения. Техника вычисления среднего значения и среднего отклонения показана в табл. 1.1.

Таблица 1.1

X_i	$X_i-\bar{X}$	$(X_i-\bar{X})^2$
5	−3	9
7	−1	1
8	0	0
9	+1	1
11	+3	9
$\sum_1^n$ 40	0	20

$\frac{40}{n}=\bar{X}=8$ $\quad\frac{20}{n-1}=\hat{\sigma}^2=5$

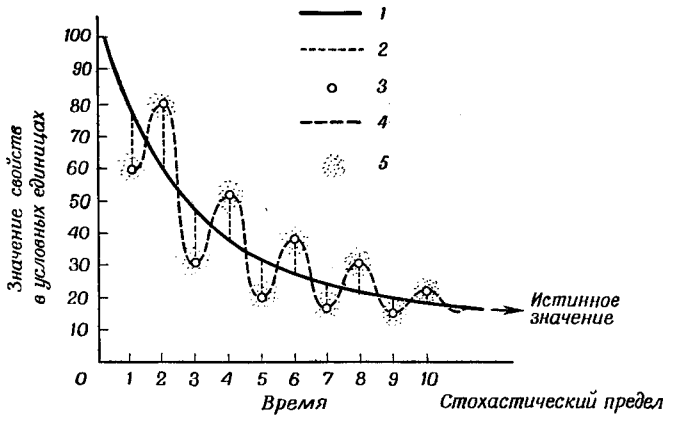
$\hat{\sigma}=(\hat{\sigma}^2)^{1/2}=2{,}24$

$\bar{X}=8\ \hat{\sigma}^2=5$

Таким образом, определив понятие точности и измерив ее, мы можем сравнить результаты двух или более экспериментов относительно их точности. Можно также добиться большей точности, если уменьшить разброс, т. е. уменьшить стандартное отклонение. Один из путей достижения этой цели состоит в увеличении числа n — числа наблюдений или измерений в эксперименте. Приведенное определение точности позволяет также ответить на вопрос, какой из двух способов измерения одного и того же свойства лучший. Используя это определение, можно, кроме того, решить, что более эффективно — усложнение ли эксперимента путем использования более точных инструментов или просто увеличение числа замеров. Ответить на этот вопрос можно, сравнив соответствующие результаты. Отсюда следует, что операционное определение точности имеет большое практическое значение в экспериментальных исследованиях и при анализе результатов.

Подчеркиваем, что увеличение точности необязательно приводит к уменьшению систематических отклонений, поэтому вопрос, каким образом их можно уменьшить, остается открытым. На этот вопрос нельзя ответить, если не принять некоторых допущений относительно природы научного исследования. В принимаемом нами допущении истинное значение приравнивается к некоторому идеалу, как сказано в цитате на стр. 8—9. Истинное значение как стохастический предел может быть достигнуто путем последовательных аппроксимаций, идеализированная схема которых представлена на фиг. 1.2.

Согласно этой концепции, в серии последовательных экспериментов, поставленных для измерения какого-то свойства, постепенно начинает улучшаться сходимость результатов, т. е. уменьшение разброса относительно среднего. Но так как каждый эксперимент выполняется как серия независимых определений одного и того же свойства, но различными способами, то систематическое смещение средних, соответствующих различным экспериментам, постепенно уменьшается. Таким способом увеличивается точность и уменьшается систематическая ошибка результатов, и среднее значение определяемого свойства относительно последовательных интервалов времени должно теперь лежать на асимптотической кривой, приближающейся



Ф и г. 1.2. Приближение к истинному значению с помощью стохастического предела. *1* — усредненный график («относительное истинное значение»); *2* — относительное отклонение наиболее вероятного значения; *3* — наиболее вероятное значение; *4* — график наиболее вероятных значений во во времени; *5* — частные значения измерений.

в пределе к какому-то постоянному значению, которое и есть истинное значение изучаемого в данном случае свойства. С помощью этой концепции истинного значения можно найти правильный ответ и на другие вопросы. Пример асимптотического приближения к истинному значению описан Шуартом [391]. В этой работе искомой величиной является скорость света. Описанный выше способ определения истинного значения практически удобен и им следует пользоваться при разных экспериментах (см. гл. 15). Теория стохастического предела привлекает своей практической ценностью и теоретической состоятельностью, хотя приведенный здесь краткий обзор и нельзя считать исчерпывающим для такого вывода. В современных руководствах по методам научных исследований читатель найдет более детальное освещение этого вопроса [69].

Мы определили теоретически и практически (концептуально и операционно) основные понятия, которые позволяют судить о точности экспериментальных исследований и о систематических ошибках полученных результатов. Эти понятия будут использоваться при последующем рассмотрении различных вопросов. Необходимо помнить, что в самих определениях основных понятий были заложены некоторые допущения, приемлемость которых можно установить только единственным способом — сравнив выводы, основанные на результатах экспериментов, с истинными объектами реального мира. Кроме того, сама природа рассматриваемой модели позволяет утверждать, что никакими экспериментальными исследованиями нельзя получить окончательного ответа, но что различные ответы можно сравнить по их точности и систематическим расхождениям.

1.2. РЕАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

Формулировка общего плана какого-либо научного исследования или метода научного исследования была уже намечена. Теперь следует определить область применения этого метода. Главная задача заключается в исследовании осадочных пород, а основная цель — в применении намеченного плана для решения проблем, стоящих перед исследователями, изучающими петрографию осадочных пород. С другой стороны, одно из основных преимуществ, которое дает использование научного метода, состоит в том, что этот метод является общим и что его можно применять при решении ряда проблем, совершенно не связанных с петрографией осадочных пород и вообще с науками о Земле. Основная задача построения приемлемого решения любой проблемы заключается в абстрактном представлении ее основных особенностей и обобщении процесса ее решения таким образом, чтобы намеченный способ можно было применять в любой аналогичной ситуации.

Прежде всего необходимо уточнить те вопросы, которые относятся к петрографии осадочных пород. Лучше всего начать с описания объекта исследований, т. е. свойств, характерных для осадочных пород. Чтобы описать свойства любого вещества, необходимо проанализировать его. Отсюда следует, что первоочередные проблемы исследования касаются выбора способа аналитического изучения осадочных пород. Далее мы увидим, что если аналитик не будет стремиться к какой-то определенной цели, результат анализа окажется неудовлетворительным. Простейший способ логического выражения цели состоит в том, чтобы сформулировать ее в виде вопроса.

Предположим, что нужно узнать вес какого-то образца горной породы. В дальнейшем мы узнаем, что на этот вопрос не так просто ответить. Обычно мы сравниваем определенный «известный вес» (эталон) с весом образца, но совершенно очевидно, что «известный вес» определен также лишь относительно некоторых других стандартов. Все полученные нами данные являются именно такими, т. е. мы не знаем абсолютных значений, а пользуемся лишь значениями относительно некоторых выбранных стандартов.

В большинстве экспериментов требуется провести те или иные сравнения. При заданных определенных условиях сравнение сделать легко. Следует, однако, ясно представлять, что сравнение правомочно лишь в том случае, если соблюдаются заданные условия. Если же условия изменяются, то результаты сравнения будут иными. Это имеет основное значение во всех экспериментальных исследованиях. Так как обычно нельзя определить истинное значение, а можно узнать только его приближенную характеристику, экспериментальный анализ упрощается, а связь между приближенным и истинным значениями будет определяться теми взаимоотношениями между понятиями «точность» и «систематическое отклонение результатов», которые определены выше. Приближенное значение нужно знать лишь в том случае, если известна точность. Итак, в любом эксперименте мы пытаемся определить наиболее вероятное значение вместе с сопровождающими его ошибками, выраженными в степени точности, т. е. как среднее арифметическое и стандартное отклонение. Такого рода подход позволяет сравнивать результаты двух экспериментов, т. е. сравнивать эмпирические средние значения. Но если точность неодинакова для различных средних значений, то полученные результаты будет трудно сопоставлять.

Таким образом, производя аналитическое экспериментальное исследование, мы пытаемся оценить некоторое среднее значение и степень изменчивости этого значения в условиях данного эксперимента.

Из приведенного определения цели анализа следует, что нужно использовать количественную информацию, так как количественный анализ значительно важнее качественного, что подтверждается развитием науки; точность

же исследования, основанного на изучении качественных признаков, как правило, низка и ее трудно выразить в формулах. Необходимо отметить, что во-первых, в любой отрасли науки, перешагнувшей этап изучения качественных явлений, намечается определенная тенденция направить все усилия на изучение количественных признаков; во-вторых, в достижении научного и социального прогресса выдающееся значение имели те отрасли знания, при приобретении которых были использованы количественные методы; и наконец, в-третьих, единственное однозначное определение истины, для которого нет дилеммы современной релятивистской теории. Это такое определение, которое основано на стохастической сходимости и требует использования количественных данных.

Если нужно исследовать осадочные породы с помощью экспериментов, мы получим какие-то количественные данные. Последние будут описываться в основном средними значениями и стандартными отклонениями. Как уже упоминалось, один из способов улучшения сходимости результатов заключается в увеличении количества измерений. Поэтому любой способ, при котором увеличивается количество определений, следует считать преимущественным перед другими способами. Таким образом, необходимо применять эксперименты, позволяющие получить относительно большое количество определений. Отсюда, эксперименты, которые при заданной степени точности дают максимальное количество определений в единицу времени или на единицу стоимости, считаются наиболее эффективными. В силу этого в большинстве случаев мы будем применять технические приемы, удовлетворяющие этим требованиям; в общем для достижения поставленной цели простая техника выполнения экспериментов имеет некоторые преимущества.

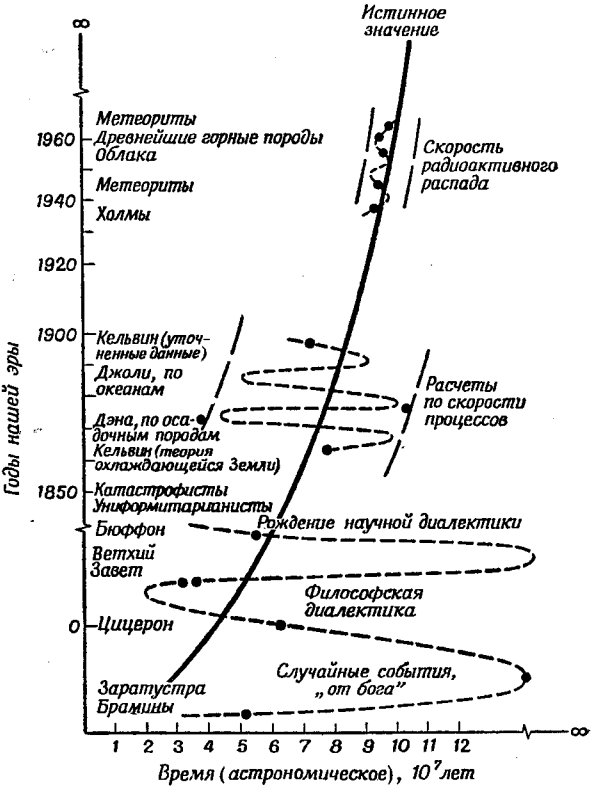
Любой заданной степени точности можно достигнуть двумя способами: или усовершенствованием техники эксперимента и соответствующим уменьшением количества измерений, или увеличением количества измерений с помощью существующей техники. Выбор того или иного способа нужно делать путем тщательного изучения вопроса, и окончательное решение будет зависеть от целей исследований, времени и стоимости экспериментальной программы.

При составлении плана исследований необходимо учитывать две особенности принятия решений. Первая из них заключается в том, что при изучении свойства любого материала необходимо знать степень изменчивости этих свойств, и первоначальная цель экспериментального анализа заключается в установлении пределов изменчивости каждого свойства. При большом размахе этих изменений различия между объектами, вероятно, станут очевидными, и поэтому отпадет необходимость в очень точных определениях. При малом же размахе для установления различий необходима бóльшая точность. Чтобы слона отличить от мыши по весу достаточно чисто качественной оценки, несмотря на ее явную неточность. Чтобы отличить одну мышь от другой того же возраста также по их весу необходима значительно бóльшая точность. Следует заметить, что нам не часто придется сравнивать слона и мышь, в большинстве случаев мы будем иметь дело со свойствами, степень изменчивости которых так мала, что ее нельзя будет уловить только качественными определениями.

Вторая особенность состоит в том, что ответы на поставленные вопросы никогда не будут окончательными. Вообще ответы даются с некоторой степенью правдоподобия, что выражается в виде вероятности. Так, если наблюдатель, даже и недостаточно опытный, утверждает различия между красными и зелеными породами, это можно принять с большой степенью вероятности. С меньшим доверием следует относиться к описанию красных и коричнево-красных пород. Так как точность оценки цветовых различий можно увеличить путем применения соответствующей аппаратуры и качественная оценка может быть заменена количественной, то и незначительные наблюдаемые

различия могут восприниматься как вполне вероятные. Таким образом, в характеристике большей части результатов нашего экспериментального анализа должна играть роль не только точность, но и доверие. Это свойство данных, полученных при эксперименте, обычно выражается с помощью шкалы вероятности, имеющей показатели в интервале от нуля до единицы, причем нуль указывает на полное отсутствие уверенности, а единица — на полную определенность. Следует отметить, что в большинстве случаев результаты наших аналитических работ находятся между этими крайними положениями, не приближаясь ни к одному из них.

Цель наших исследований — оценить изменяемость свойств осадочных пород. Эту цель можно достигнуть посредством экспериментального анализа, пользуясь простыми техническими приемами, по возможности приводящими к количественным данным. Стремясь к большей точности и надежности, мы увеличим число определений. Ответы на различные вопросы будут даны в виде выводов таких обобщенных характеристик, как среднее и стандартное отклонение, оценками которых будут среднее арифметическое и мера разброса результатов относительно среднего арифметического. По возможности эти статистические данные будут сопровождаться вероятностными оценками как основой для суждения о надежности полученных результатов.



Фиг. 1.3. Оценка возраста Земли как пример стохастического приближения к некоторому истинному значению.

Полученные ответы следует считать не окончательными и абсолютными, а относительными в соответствии с выбранным некоторым образом набором стандартов. Степень законченности полученного результата оценивается как точность и надежность, противопоставленные ответу, выраженному как одно число. Чем больше разброс значений и меньше их надежность, тем более далеки они от окончательного результата.

Наконец, следует подчеркнуть, что возрастающее совершенство наших знаний обусловливает более совершенные условия эксперимента, вследствие чего увеличивается и его точность, что позволяет ожидать последовательного приближения к познанию окончательных ответов или выяснению истинных значений.

В качестве примера можно рассмотреть изменение представлений о столь важном параметре вселенной, как возраст Земли. Грубо говоря, эти представления находятся в интервале от нуля до бесконечности, но если попытаться выразить различные представления о возрасте Земли в различное время (фиг. 1.3) в цифровых данных, в полученном графике отразятся те принципы, о которых говорилось на предыдущих страницах.

Значения возраста Земли меняются от чисто качественных оценок наших далеких предков до количественных очень точных определений, основанных на скорости радиоактивного распада. Вряд ли можно сомневаться в том, что с течением времени определение возраста Земли стало более точным. Характеристика систематических отклонений, однако, остается еще недостаточной, и небольшие изменения наших представлений о возрастной модели Земли приводят к относительно большим изменениям наиболее вероятного значения. По-видимому, мы все еще не знаем истинного значения, хотя по мере совершенствования измерительной техники стало отчетливым стремление к некоторому постоянному пределу, а по мере роста наших знаний — к стохастическому пределу. Судя по оценкам большинства других параметров вселенной, существует подобное же приближение; для науки, по-видимому, вообще свойственно такое стохастическое приближение с увеличением наших знаний о вселенной (например, определение скорости света [391]).

Поэтому мы можем ожидать, что ответы на вопросы, связанные с реальным миром, будут представлены обобщающими числами, характеризующими наиболее вероятные значения, или средние значения $\overline{X}$. Они будут сопровождаться оценкой точности, выборочным, стандартным отклонением $\hat{\sigma}$, оценкой систематического смещения и надежности, которые покажут на основе отправных положений выбранной модели степень нашей уверенности в результатах.

ГЛАВА 2

Опробование осадочных пород

Изучая свойства одного образца или пробы как таковой, нельзя получить информацию о случайном характере опробования. Поэтому к критерию случайности опробования следует подходить иначе, а именно изучая процесс или методику опробования. Если бы можно было разработать специальную методику случайного отбора проб, случайной называлась бы проба, отобранная по этой методике.

P. O. Johnson, Statistical Methods in Research, 1949

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Все экспериментальные аналитические работы проводятся на образцах или пробах. Любая толща горных пород сама представляет собой образец или пробу земной коры. Изучая обнажение, мы проводим опробование таких толщ, отбирая образцы размером 4 × 1,5 дюйма, которые и являются пробами, взятыми с обнажений. В лабораториях из этих образцов берутся пробы, например выбирается тонкий срез породы (шлиф) площадью 0,75 квадратных дюйма для детального изучения под микроскопом или какое-то количество рыхлой породы, кратное 100 *г* или 100 зернам для просеивания или других аналитических исследований. Совершенно очевидно, что анализируемая часть — весьма малая доля изучаемой толщи. Когда анализы закончены, результаты их используются для характеристики всей толщи, из которой были взяты пробы. Чтобы эта характеристика имела какой-то смысл, нужно быть уверенным, что проанализированные пробы были представительными, или репрезентативными, для изучаемого объекта.

С проблемами опробования, или выборки, нам приходится сталкиваться не только в научных исследованиях, но и в повседневной жизни. Обычно мы действуем, считая, что образец представляет все множество: выбор одной конфеты из коробки, пробное курение сигарет какого-то сорта в течение 30 дней, испытание нескольких электрических ламп из всего ящика ламп, описание 10 проб пляжных песков из скважины глубиной 10 000 футов — все это примеры процессов опробования. Поэтому очень важно иметь гарантию в том, что выбранные на пробу элементы действительно являются представительными для того множества, которое нужно описать.

Проблемы, возникающие в связи с выборкой, наиболее тщательно разработаны специалистами по статистике в связи с переписями населения. Поэтому терминология статистиков и демографов обычно используется и в других подобных анализах [75, 457]. Категория, выбранная для изучения, называется *популяцией*, или *генеральной совокупностью* (population). Из нее берутся пробы, образующие выборку, анализ которой приводит к получению общих характеристик для всей совокупности. Аналогию этому можно видеть в логическом принципе от частного к общему. Но в обоих случаях — и для

лабораторных исследований, и для логических заключений — нужно быть уверенным в том, что выборка действительно представительна для данной совокупности, чтобы основанные на ней выводы имели силу.

Каждое подобное исследование следует начинать с определения совокупности. Нужно, например, определить средний рост мужчины и рост среднего мужчины США. В первом случае совокупность составляет рост и мы находим средний рост; во втором — совокупность составляют мужчины США; нужно найти среднего из них и измерить его рост. Гораздо легче иметь дело с первой совокупностью, чем со второй, но производить измерения гораздо легче в случае второй совокупности, чем первой. Аналогично, когда петрограф хочет определить размер зерен пляжных песков, он обычно имеет в виду не площадь или объем песков, а размер песчинок, которые слагают пляж. Предположим, что нужно узнать, однородна ли структура каких-либо гранитов. Правильно ли будет полагаться на образцы, взятые из карьеров или обнажений, или необходимо найти еще дополнительные места для взятия проб? Прежде всего нельзя забывать, что карьеры закладываются для какой-то цели. Предположим, что в карьерах добывают сырье для поделок из гранитов, причем одно из желательных свойств этого сырья заключается в его однородном сложении. Если опробование будет проводиться лишь по карьерам, результаты его могут показать высокую степень однородности пород. Эта характеристика будет обязательной не для всей совокупности гранитных пород района, а лишь для той, которая обнажена в карьерах. Точно так же во многих дорожных выемках обнажаются более устойчивые породы, а дорожные насыпи закрывают участки, сложенные более мягкими породами. Поэтому до начала опробования необходимо четко определить объем изучаемой совокупности.

Следующий процесс исследования состоит в обеспечении представительности отбираемой выборки для данной совокупности. Например, музейные образцы минералов и горных пород нельзя считать репрезентативными для земной коры, так как обычно для музеев отбираются редкие или уникальные образцы. Такие термины, как «типичный участок», «типичный образец» и «голотип»— примеры непредставительности, так как все они, хотя и отбирались в качестве стандартных, но на самом деле относятся ко всему, чему угодно, но не к представительным элементам той или иной генеральной совокупности. Часто выбор наиболее совершенного либо наиболее заметного образца или участка, «наиболее полно» представляющего что-то, — лишь дело вкуса. Если такие образцы будут приняты за представительные, это приведет к ложному выводу о характере всех пород и к изменению представлений об эталоне, по которому сравниваются породы. Все эти ошибки довольно характерны для многих полевых геологических исследований. Неправильное опробование вносит систематическую ошибку в изучение генеральной совокупности по показателям опробования. Очень часто описание образца или пробы применяется затем не к той совокупности, из которой он взят, а к другой. Эффект таких ошибок называется *смещением*, или *систематическим отклонением*, а соответствующие образцы или пробы называются *систематически отклоняющимися*. Обычно результаты анализа таких образцов приводят к заключениям, содержащим систематические ошибки.

Чтобы быть представительным для данной совокупности, образец должен быть взят наугад. Эта случайность обеспечивается в том случае, когда каждый из элементов, составляющих совокупность, имеет равную вероятность попасть в выборку. Но, как будет показано ниже, обеспечить условия случайного отбора элементов выборки очень трудно, поэтому необходимо всегда предпринимать какие-то позитивные действия, чтобы обеспечить получение случайной выборки.

Допустим, что совокупность состоит из 100 элементов. Требуется взять из нее наудачу выборку, состоящую из 10 элементов. Если элементы сово-

купности пронумерованы от 1 до 100 и соответствующая нумерация сделана также на специальных карточках, карточки следует перемешать и затем последовательно отобрать наудачу 10 карточек. Для этого обычно используют таблицы случайных чисел, которые весьма удобны и гарантируют случайный выбор [3, 15, 128].

В общем нужно признать, что рандомизация (обеспечение случайного отбора) является одной из наибольших практических трудностей [221, стр. 187]. Задача большинства приложений заключается в выборе таких приемов отбора проб, которые бы обеспечили устранение систематических отклонений и чаще всего это все, чего можно достигнуть. Условие случайного отбора имеет весьма большое значение почти для всех статистических критериев. Но, несмотря на это, единственный позитивный практический совет, которого следует придерживаться,— это избегать систематических ошибок во время опробования.

2.2. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ СОВОКУПНОСТИ

В геологической практике можно различать несколько совокупностей [78, 176]:

1. *Гипотетическая совокупность* — те горные породы, которые составили данный объем земной коры. Такая совокупность является гипотетической, так как обычно имеется некоторая неопределенность относительно пород, которых сейчас нет. Неопределенность заключается в том, что породы, которые, как предполагается, были отложены, но затем эродированы, возможно, никогда и не отлагались. Материал, которого нет, не может быть и опробован. Отсюда следует, что при любой схеме опробования разные части совокупности не одинаково доступны. Так как отсутствующий материал в пробах не представлен, в окончательных результатах возможно появление систематических отклонений.

2. *Существующая совокупность* — те горные породы, которые в настоящее время составляют определенный объем земной коры. Такую совокупность можно определить вполне однозначно. Однако доступность разных ее частей для опробования редко бывает одинаковой. Почти при всех геологических исследованиях приходится иметь дело с этой совокупностью. Она не может быть опробована с равной вероятностью, т. е. все части совокупности могут быть налицо, но не все они могут входить в программу опробования.

3. *Доступная наблюдениям (опробуемая) совокупность* — совокупность, представленная в имеющихся обнажениях, дорожных выемках, буровых скважинах и др. Если схема опробования соответствующим образом разработана, результаты анализа проб можно применить к этой доступной совокупности.

Мы будем иметь дело с такими схемами опробования, которые относятся к доступной наблюдению совокупности. Для некоторых районов доступная совокупность будет, вероятно, полностью совпадать с существующей. Например, Розенфельд [363], занимаясь изучением формации Орискани и опробованием ее пород, обнаружил, что все обнажения этой формации приурочены только к крыльям антиклиналей и их приядерным частям. Следовательно, пробы, собранные с этих обнажений, представили совокупность, доступную наблюдениям. Но, исходя из незначительной мощности формации, составляющей в среднем 150 футов и не превышающей 300 футов, Розенфельд предположил, что деформация слоев в результате аппалачской складчатости не привела к существенному изменению мощности формации. Так как изучаемая совокупность при этом была представлена множеством значений размера зерен кварца (X_i = длинная ось), Розенфельд заключил, что изменчивость в размере зерен независима от складчатости, а следовательно, и от существующих обнажений. Если эти предположения верны, пробы доступной совокупности должны дать несмещенную оценку существующей совокупности.

Для некоторых доступных наблюдению совокупностей, связанных, например, с такими хорошо обнаженными районами, как плато Колорадо или Большой Каньон, или с детально разбуренными районами, опробованием можно охватить все их части. В этих случаях опробуемая совокупность практически совпадает с существующей.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Индуктивные доводы, с помощью которых по образцам или пробам (выборкам) составляют впечатления о всей совокупности, вполне оправданы. При этом обычно пользуются обозначениями, приведенными в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Параметры	Выборочные статистические характеристики (оценки)	Параметры генеральной совокупности
Среднее	$\overline{X}$	μ
Дисперсия	$\hat{\sigma}^2$	σ^2
Стандартное отклонение	$\hat{\sigma}$	σ
Число элементов	n	N

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} \qquad \mu=\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{N} \tag{2.1}$$

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1} \qquad \sigma^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(X_i-\mu)^2}{N} \tag{2.2}$$

Необходимо вначале строго определить такие понятия, как элементы совокупности, выборки, генеральные совокупности, а также рассмотреть процедуры опробования.

Следуя индуктивным рассуждениям, от выборки к совокупности нужно, чтобы по мере приближения n к N величина $\overline{X}$ приближалась к μ, а $\hat{\sigma}^2$ — к σ^2. Для обеспечения этих условий опробование генеральной совокупности должно быть случайным.

Существуют определенные критерии, с помощью которых из множества статистических характеристик можно выбрать наилучшие и использовать их для описания генеральной совокупности на основе случайного опробования. Так, обычно предполагается, что переменная X имеет нормальное распределение, а статистические оценки $\overline{X}$ и $\hat{\sigma}$ — несмещенные, состоятельные, эффективные и достаточные оценки для μ и σ соответственно (см. гл. 12.6; [127, стр. 10, 162 и 176]).

В качестве иллюстрации рассмотрим выборочную дисперсию, определенную формулой

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n}. \tag{2.3}$$

Эта оценка состоятельная, сходящаяся к некоторому постоянному значению даже в выборках небольшого объема. Но она является смещенной и не сводится к σ^2, а стремится к величине $[n/(n-1)]\,\sigma^2$. В больших выборках, где n приближается к N (бесконечности), $n-1$ очень мало отличается от n, а s^2 — от σ^2. Для небольших выборок необходимо вносить поправку на отклонение, и поэтому используется величина $\hat{\sigma}^2=[n/(n-1)]s^2$. Умножая уравнение (2.3) на $n/(n-1)$, мы получим уравнение (2.2), по которому вычислим наилучшую несмещенную оценку $\hat{\sigma}^2$ для σ^2 по малым выборкам (см. также гл. 16.9).

Подобным же образом в качестве оценки для μ можно использовать медианное значение Md, которое представляет собой несмещенную и состоятельную оценку, но она менее эффективна, чем среднее арифметическое условие нормального распределения [95, стр. 71].

Достаточность оценки — желательное свойство, но обычно такие оценки трудно найти. Выборочное среднее является достаточной оценкой неизвестного среднего значения совокупности при нормальном распределении. Другие оценки не несут какой-либо дополнительной информации относительно «центральной тенденции», или «параметров расположения», частотной кривой. Подобным же образом и выборочная дисперсия в условиях нормального распределения также служит достаточной оценкой для неизвестной дисперсии генеральной совокупности.

В общем для индуктивного обоснования выводов о параметрах генеральной совокупности по выборочным статистическим характеристикам желательно выбирать такие оценки, которые бы были несмещенными и состоятельными.

2.4. ОПРОБУЕМЫЕ СОВОКУПНОСТИ

Случайная выборка из генеральной совокупности отбирается с таким расчетом, чтобы все элементы совокупности могли иметь одинаковую вероятность попасть в эту выборку. Понятие рандомизации легко определить, но обычно очень трудно применить на практике. Относительно того, каким образом можно осуществить рандомизацию, единого мнения нет [221, 293, 302, 333]. Во всех руководствах требуется, чтобы эти условия соблюдались, однако остается неясным, насколько та или иная методика опробования обеспечивает получение рандомизированных выборок.

При опробовании однородных геологических объектов обычно не возникает проблем, связанных с рандомизацией выборки. Как правило, геологическая совокупность бывает неоднородной по своей природе и доступности для опробования. В таких случаях получить рандомизированную выборку оказывается делом невозможным [176, 266, 453]. Естественно, что если выборка не представительна для данной совокупности, последнюю по такой выборке описывать нельзя.

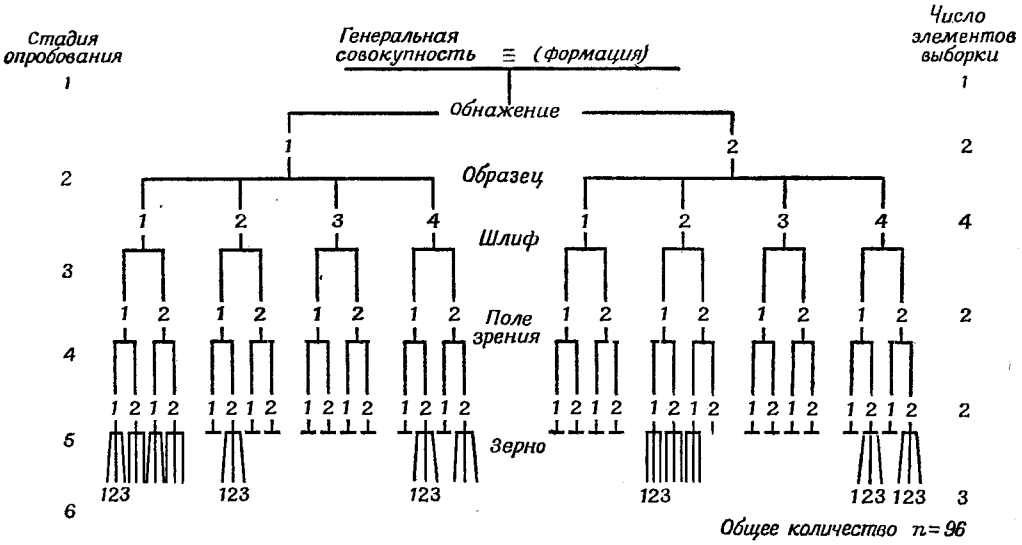
Рассмотрим обычный случай из геологической практики.

Нужно опробовать формацию или какую-то другую геологическую единицу, показанную на геологической карте. Формация выходит в отдельных обнажениях. Таким образом, обнажения являются первой стадией опробования геологической формации и было бы желательно, чтобы они были расположены случайно. Каждое обнажение опробуется путем отбора образцов, совокупность которых должна быть случайной выборкой из изучаемого обнажения. Образец в лаборатории обычно разделяется на более мелкие кусочки, как, например, это делают при производстве шлифов. Такие кусочки также должны быть случайной выборкой по отношению к образцу. При изучении шлифа исследователь выбирает какое-либо поле зрения либо изучает породу в пределах какой-то полоски, пересекающей шлиф, и в каждом поле зрения или полоске считает либо замеряет лишь отдельные зерна.

Получение случайной выборки должно быть целью на каждой стадии опробования, которое в подобной ситуации называется *многостадийным*, или *иерархическим* [76, 176, 266] (фиг. 2.1). Различные модификации этого способа широко используются при геологических исследованиях [262, 314, 335].

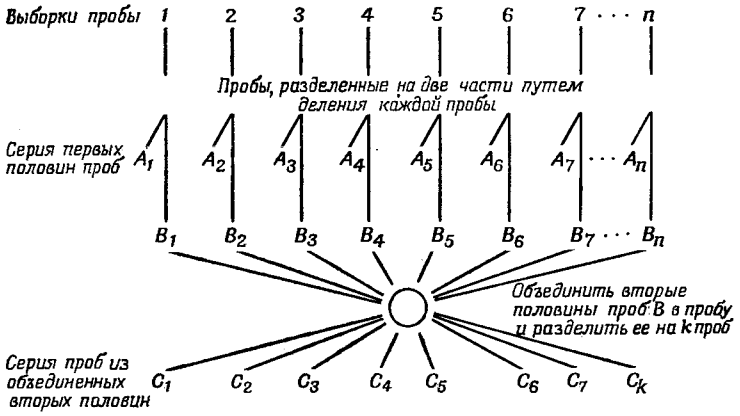
Интересный вариант этого способа описан Крамбейном [239]. Он важен как для полевых, так и лабораторных исследований. Каждую пробу из данной серии делят на две части и каждую из этих половин, выбранную произвольно из пары, анализируют. Все другие половины объединяют, из полу-

ченной массы отбирают представительные пробы, которые затем также анализируют. В результатах анализа вторых половин [1] проявляется изменчивость, обусловленная ошибками в аналитических определениях, связанными с техникой эксперимента, в то время как изменчивость в результатах



Ф и г. 2.1. Многостадийный, или иерархический, выборочный план.

определений первых половин отражает как неоднородность самих образцов, так и ошибки в экспериментальных определениях [155, 239]. Таким образом,



Ф и г. 2.2. Выборочный план для сравнения величины изменчивости между выборками с ошибками экспериментальных определений.

представляется возможность отделить аналитические ошибки от изменчивости свойств образцов. Этот способ опробования показан на фиг. 2.2. Его рекомендуем применять при решении вопроса об однородности опробуемой совокупности относительно изучаемого свойства или когда нужно убедиться в том, что амплитуда изменений этого свойства в разных образцах не превышает ошибки экспериментальных определений.

[1] Фактически этот вариант является эквивалентом бороздового секционного опробования (см. ниже).

Многие геологические совокупности (объекты) не гомогенны, а стратифицированы. Таковы осадочные породы, а также расслоенные интрузивные породы (габбро, ультрабазиты) и метаморфические (рассланцованные) породы. С точки зрения статистики все эти объекты можно считать стратифицированными. Есть два способа опробования таких образований. По первому способу, называемому *бороздовым опробованием*, образцы или пробы берут по направлению, пересекающему направление слоистости. Каждая бороздовая проба должна быть случайной для данной совокупности; если это условие соблюдается, каждая проба будет иметь вполне самостоятельное значение и обеспечивать несмещенные состоятельные оценки параметров данной совокупности. Действуя этим способом, можно оценить среднее значение и дисперсию с любой заданной степенью точности, например путем увеличения числа бороздовых проб.

Второй способ опробования слоистых совокупностей состоит в отборе проб по слоям. Этот способ называется *стратифицированным опробованием* [1] [75, 264, 409, 410]. Путем соответствующих пересчетов (например, на мощность пласта) можно получить адекватную оценку среднего значения и дисперсии совокупности. Из отдельных статистических оценок можно затем получить данные об изменениях изучаемого свойства по всему слою либо по группе слоев.

Безусловно, есть ряд и других типов изменчивости свойств совокупности, но почти все они могут быть сведены к однородному, слоистому, пятнистому или гнездовому распределениям компонентов. Пятнистое распределение можно приравнять к слоистому, если считать пятно эквивалентом слоя. Таким образом, если характер распределения компонентов был своевременно выявлен. опробование такой совокупности не представит трудностей. Предположим теперь, что правильное распределение компонентов, обусловленное слоистостью или пятнистостью, имеется, но что этого нельзя уловить ни до, ни во время опробования. В таком случае анализ отобранных проб скорее всего приведет к смещенным оценкам характеристик совокупности.

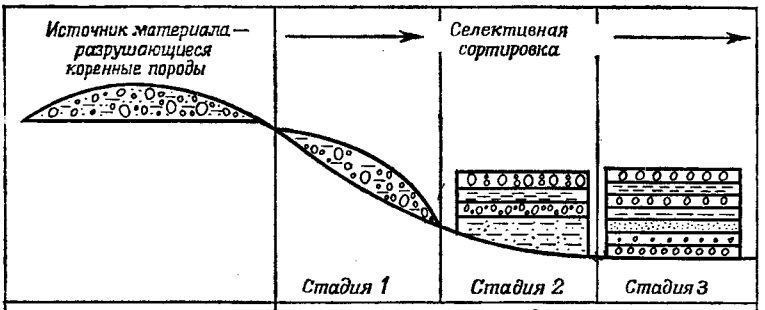
Естественно возникают вопросы, каким способом можно опробовать совокупность так, чтобы избежать ошибок, связанных с ее неоднородностью, и, если это нужно, как вскрыть эти неоднородности. Эти вопросы преобретают особенно большое значение в тех случаях, когда объектом изучения и единицей для опробования служит какое-либо подразделение седиментационного цикла [14, 317]. В результате ряда исследований, проведенных с целью решения поставленных вопросов, была разработана специальная схематическая модель опробования осадочных пород [163, 176], которая была проверена на ряде примеров [163, 170, 171, 174, 204, 458].

2.5. МОДЕЛЬ ОПРОБОВАНИЯ СОВОКУПНОСТЕЙ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Представим, что обломки горных пород и продукты их выветривания сползают под действием силы тяжести с вершины холма по склону и аккумулируются на склоне в положении 1 (фиг. 2.3). Задача состоит в определении размеров зерен кварца, типичных для этого положения. Изучаемая генеральная совокупность будет представлять собой длинные оси *a* кварцевых зерен породы, зафиксированной в положении 1. Из этих пород берут выборки объемом. допустим, равным 50 зернам, с единственным условием: объем каждой выборки должен быть таким, чтобы в нее могло попасть наиболее крупное для положения 1 зерно кварца. Очевидно, что это условие практически осуществить нетрудно. Затем измеряют длинные оси каждого зерна

[1] В данном случае рассматривается бороздовое секционное опробование. — *Прим. перев.*

в каждой выборке, вычисляют среднее арифметическое и выборочное стандартное отклонение или дисперсию по каждой выборке, а также дисперсию средних арифметических по всем выборкам. Так как кварцевые зерна любых размеров распределены в породе случайно, то по среднему арифметическому и дисперсиям, вычисленным для каждой выборки, можно оценить дисперсию генеральной совокупности. Дисперсия средних арифметических разных



Источник изменчивости	Относительная амплитуда изменчивости		
Между разными выборками	Малые	Умеренные	Большие
Внутри выборок	Большие	Умеренные	Малые

Фиг. 2.3. Процесс седиментации и принципы опробования осадочных пород [300].

выборок будет небольшой, так что в данном случае изменчивость размеров между разными выборками будет малой, а внутри одной и той же выборки — большой.

Пусть теперь породы, отмеченные положением 1, будут эродированы, а продукты их разрушения перенесены на несколько сотен миль и вновь отложены (мы можем также предположить, что процесс этот был столь длительным, что в результате селективной сортировки зерна различных размеров распределились по сравнительно гомогенным, относительно размеров зерен, группам и что сформировалась слоистая толща, отмеченная на фиг. 2.3 как положение 3). Опробуем эту толщу, соблюдая следующие два условия:

1. Объем каждой выборки должен быть столь большим, чтобы в нее могло попасть самое большое зерно кварца из имеющихся в данном слое.
2. Каждая выборка не должна выходить за пределы какого-либо слоя (или седиментационного подразделения [317], или фазы [14]).

Затем измеряют по длинной оси a каждое зерно кварца; в данном случае (положение 3) размах изменений a для каждого слоя очень сильно уменьшился, так что средний размер для слоя не будет служить хорошей оценкой среднего значения для всей совокупности. Дисперсии внутри каждой выборки будут малы. Различия между средними значениями для разных слоев будут большими, т. е. дисперсия незначительна внутри одной выборки, но велика для разных выборок.

Отсюда становится очевидным, что опробование в двух рассмотренных случаях должно проводиться различным способом. Для положения 1 достаточно небольшого числа выборок, включающих большое количество зерен, а для положения 3 нужно много выборок с небольшим числом зерен. Безусловно, имеются и любые промежуточные положения, например положение 2. Практически вначале нам придется провести какие-то предварительные наблюдения, с тем чтобы выбрать наиболее эффективную схему опробования.

Исследуя размеры и форму галек кварцитов из ледниковых, аллювиальных и морских галечников в штате Нью-Джерси, Штейнмец [411, 412] показал, что во всех случаях для оценки среднего значения совокупности и дисперсии бороздовое опробование вполне эффективно (хотя в случае слоистых отложений этот метод и нельзя считать наиболее эффективным). Однако с помощью единственной бороздовой пробы мы не сможем определить, являются ли данные отложения слоистыми. Поэтому сначала нужно решить, стоит ли вообще производить такое определение. С геологической точки зрения необходимость эта очевидна, так как среднее значение μ и дисперсия σ^2 для совокупности, составляющей длинные оси зерен кварца из ледниковых, аллювиальных и морских отложений, могут быть близкими, а коренное отличие может состоять в том, что в морене слоистость отсутствует, а в отложениях пляжа она прекрасно выражена.

Если перед нами такой случай, необходимо допустить слоистый характер среды и опробовать выбранные «слои» согласно описанной схеме. Далее путем сравнения дисперсий между пробами (выборками) и внутри проб можно узнать, имеется ли в действительности слоистость или нет. Опробование массивных гомогенных отложений как слоистых не вносит элементов неопределенности, в то время как отсутствие данных стратифицированного опробования слоистых отложений может легко привести к ошибочным заключениям. Другими словами, при опробовании гомогенной совокупности характер проб, их размеры и форма не имеют решающего значения, но если опробовать слоистую совокупность по схеме, в которой не учтена ориентировка слоистости, это может привести к ложным заключениям и потере ценной информации.

Бороздовые пробы, взятые по всей мощности осадков, эквивалентны отдельным случайным выборкам. С их помощью можно оценить среднее значение и дисперсию для данной совокупности, но нельзя получить какую-либо информацию о характере распределения элементов внутри совокупности. При геологических же исследованиях выяснение этого характера распределения подчас бывает весьма важным.

До сих пор еще не выработано удовлетворительного определения размера и формы исходной единицы для опробования осадочной толщи (седиментационного члена Отто, или фазы Апфеля), если не считать исследование кварцитов Хомвуд в 1955—1956 гг. [176]. Особенно трудно определить исходную единицу для таких осадочных пород, в которых слои или линзы обладают микроскопической величиной.

В заключение следует заметить, что, вырабатывая схему опробования, нужно ориентироваться на наиболее тонкие слои, например на мелкие прослои, непрерывно прослеживающиеся по распределению каких-либо зерен. Размер и форму таких прослоев можно установить лишь экспериментально. Чтобы выработать схему опробования, необходимо провести специальные исследования с целью выяснения размера и формы исходных единиц опробования.

2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ПРОБ

Можно легко показать, что при весьма общих условиях для небольшого числа проб, характеризующихся небольшим числом определений по каждой пробе, обобщенное среднее значение определений обнаруживает меньшую изменчивость, чем отдельные индивидуальные значения по тем же пробам. В табл. 2.2 индивидуальные значения меняются в пределах от 1 до 110 единиц, а средние — от 5,25 до 37,25 единиц. Эти взаимоотношения можно выразить следующей, очень нужной формулой [1]:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n \quad \text{или} \quad \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n},$$

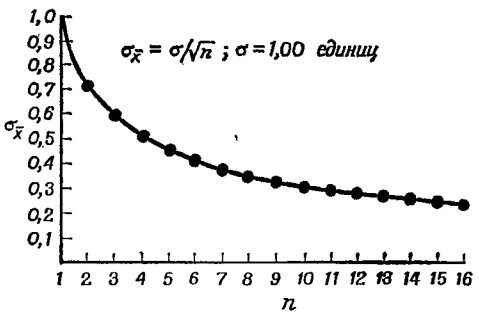
[1] Величина $\sigma_{\bar{X}}$ часто называется стандартной ошибкой среднего.

Таблица 2.2

Сравнение размахов средних значений и отдельных наблюдений

Исполнители	Номер выборки			
	1	2	3	4
1	100	50	3	15
2	20	30	5	40
3	15	1	6	81
4	4	2	7	8
$\sum_{i=1}^{n=4} X_i$	149	83	21	144
$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n=4} \frac{X_i}{n}$	37,25	20,75	5,25	36,00

где $\sigma_{\overline{X}}$ — дисперсия средних значений, а σ^2 — дисперсия частных (индивидуальных) значений [1]. Можно показать, что эти взаимоотношения остаются справедливыми для самых различных условий [198, 231]. Теперь предположим, что мы располагаем хорошей оценкой для σ. Тогда можно уменьшить $\sigma_{\overline{X}}$ путем увеличения n, как показано на фиг. 2.4. Увеличение n с 1 до



n	$\sigma_{\overline{x}}$
1	1,0
2	0,707
3	0,577
4	0,500
5	0,447
6	0,408
7	0,378
8	0,353
9	0,333
10	0,316
11	0,301
12	0,288
13	0,277
14	0,267
15	0,258
16	0,250

Фиг. 2.4. Связь между стандартной ошибкой и объемом выборки при простом случайном опробовании.

4 приводит к уменьшению $\sigma_{\overline{X}}$ вдвое, а увеличение n до 16 уменьшает значение $\sigma_{\overline{X}}$ в четыре раза против его первоначального значения. Во многих экспериментах увеличение точности оказывается дорогостоящим вследствие быстрого роста значения n.

Из изложенного следует два правила, которые следует принять в качестве руководящих при разработке плана опробования:

1. Чем больше количество определений (измерений), тем большей будет точность, или, другими словами, количество анализируемых проб должно быть пропорционально амплитуде изменчивости. Если изменения изучаемого свойства одного вещества в два раза больше изменения другого вещества, то для достижения одинаковой точности в определении средних значений количество определений в первом веществе должно быть в четыре раза больше, чем во втором.

[1] Это утверждение справедливо только в условиях равенства неизвестных средних μ_i, оценками которых являются $\overline{X}_i$.— *Прим. ред.*

2. Увеличивая точность определений при экспериментах, нужно тщательно соблюдать равновесие между следующими альтернативами: а) между увеличением сложности эксперимента и соответствующим уменьшением числа экспериментов, выполненных за единицу времени или приходящихся на единицу стоимости; б) между сохранением простой и менее точной техникой эксперимента, с одной стороны, и повторением эксперимента на каждой пробе с целью улучшения точности — с другой (естественно, при соответствующем увеличении стоимости или времени).

2.7. ОПРОБОВАНИЕ В ГЕОЛОГИИ И СМЕЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

Выяснив общие правила и основные принципы отбора проб (выборок), пригодных для анализа, необходимо рассмотреть, какими выборками обычно пользуются и насколько они удовлетворяют требованиям, предъявляемым к представительным выборкам.

При рекогносцировочных исследованиях обширных территорий анализ отдельных проб дает представление о тех или иных характеристиках пород. Примером таких проб может служить *точечная* (spot) проба, которая состоит из множества зерен или кусочков, взятых в какой-то точке выхода породы. Эта проба, конечно, должна быть взята наудачу, но она может дать точную оценку параметров породы лишь в том случае, если порода в высшей степени однородна. Чтобы избежать очевидных недостатков опробования единственной точечной пробой и добиться большей представительности, можно отобрать несколько таких проб, объединить их, а затем сократить до необходимого размера. Такая комбинированная проба дает лишь довольно ограниченную информацию об изучаемой породе, особенно о среднем значении и дисперсии совокупности. Каждая точечная проба групповой пробы должна быть представительной. Объединение точечных проб и последующее сокращение нужно проводить с максимальной тщательностью [316].

Проблемы, связанные с точечным опробованием, рассматривались Апфелем [14] и Отто [317], которые предложили брать точечную пробу из некоторого элементарного слоя осадочной породы. Апфель называл такой слой *фазой*, а Отто — *единицей седиментации*. Под единицей седиментации, или элементарным слоем, Отто понимал «слой осадков определенной мощности, отлагавшийся в одних и тех же постоянных физических условиях» [317]. При таком способе опробования заранее предполагается, что в поле можно выбрать однородный слой и что весь разрез представляет собой набор таких слоев, из которых наудачу можно взять точечные пробы. При этом возникает два затруднения. Первое, если мощность элементарного слоя, или фазы, очень мала, как это часто и бывает, то взять пробы именно из такого слоя, не затронув соседние слои, практически довольно сложно. Второе затруднение более существенно, так как, считая данный слой однородным, мы заранее, еще до анализа, оцениваем степень изменчивости свойств. В действительности же гарантии «постоянных условий» соблюдаются лишь тогда, когда проба состоит из единственного зерна.

Если берется только одна проба, то совершенно очевидно, что при любом плане опробования получится лишь единственное среднее значение, которое может быть, а может и не быть представительным для изучаемой совокупности. Далее, единственная оценка степени изменчивости, полученная по одной пробе, определяет лишь изменчивость внутри этой пробы, а если между пробами существует более значительная изменчивость, чем изменчивость внутри проб, то полученная оценка будет очень далекой от той, которая на самом деле свойственна данной совокупности.

Поэтому необходимо взять серию проб, и если такое решение принято, возникает другой важный вопрос: как расположить эту серию? Разработано несколько различных планов опробования в соответствии с особенностями строения разных отложений, например пляжных песков, конусов выноса или дельт [248, стр. 15]. Но эти планы, вследствие самого факта приспособле-

ния их к различным условиям, уже, вероятно, вносят отклонение в результаты опробования (см., например, работу [126, стр. 62 и 74]. Следовательно, если стремиться к достижению полной представительности, более целесообразно выбрать некоторый симметричный план опробования, не привязанный к каким-то воображаемым градиентам изменений изучаемой совокупности. С другой стороны, было бы нерезонным отвергать более эффективные схемы расположения проб, как, например, групповое пли стратифицированное распределение представительных проб [76, 460]. Такие схемы целесообразны лишь в том случае, если доказано, что они улучшают эффективность опробования, достигая меньшей дисперсии результатов, и не вносят отклонений. К этим схемам, по замыслу их составителей, относится опробование фазы, или элементарной единицы седиментации. Но эти схемы трудно осуществить на практике без рекогносцировочного изучения с целью определения степени изменчивости свойств.

Геологическое опробование можно разделить на две основные категории — наземное и подземное. В первом случае пробы берутся с глубины до 100 футов от дневной поверхности, во втором — с более глубоких горизонтов.

При наземном опробовании наиболее обычным объектом изучения служат естественные и искусственные обнажения. Типичные места, которые вполне могут подходить для отбора проб вещества земной коры,— это каменоломни, карьеры, выемки железных и шоссейных дорог, берега рек. В общем случае при опробовании только обнажений мы не получаем случайных выборок, так как большая часть обнажений сделана искусственным путем для какой-то определенной цели. Эти обнажения обычно вскрывают породы, обладающие определенными свойствами, например глины для производства огнеупорного кирпича, стекольные пески и т. д. В таких случаях обнажения представляют лишь небольшую и нетипичную часть всей совокупности горных пород. В железнодорожных и автодорожных выемках обнажаются прочные породы, а под насыпями скрыты неустойчивые породы. Поэтому, используя обнажения как места взятия проб, необходимо отдавать себе отчет об их непредставительности. Иногда положение можно исправить внесением статистических поправок, устраняющих смещение оценок. Но обычно это сделать невозможно, и тогда необходимо опробуемую совокупность считать совокупностью, доступной для опробования. Результаты опробования не следует применять к тем породам, которые не вскрываются в обнажениях.

Несомненно, что по мере совершенствования наших знаний о степени изменчивости свойств осадочных пород со временем будет возможно вносить поправку, устраняющую систематические отклонения, обусловленные опробованием. Однако до тех пор, пока эта оптимальная стадия не достигнута, следует ограничить применение результатов анализов лишь к тем породам, которые опробованы, а не рисковать применением полученных результатов к толщам, не представленным в пробах.

В тропических странах, где естественные и искусственные обнажения редки и далеко отстоят одно от другого, а горные породы в приповерхностных частях не консолидированы, пробы берут с помощью бура. Точки бурения можно расположить по какой-либо правильной сетке, но это редко применяется, так как геолог еще не знает, насколько представительной будет выборка, отобранная по такой симметричной сетке. Если неизвестен характер геологической структуры, то по симметричной сетке лишь по счастливому стечению обстоятельств можно отобрать случайную выборку, однако это скорее исключение, чем правило. Обычно при отборе проб буром отклонения (ошибки) возникают по техническим причинам, так как песчаный материал извлекать труднее, чем глинистый.

Для вскрытия неустойчивых к эрозии пород иногда применяют шурфы, но они задаются обычно с целью изучения каких-либо контактов или

структур данной толщи, и поэтому в шурфах вскрываются какие-то характерные породы.

При подземном опробовании пробы отбирают на рудниках, шахтах и в скважинах. Шахты и рудники также являются искусственными обнажениями и обычно они находятся в местах, представляющих особый экономический интерес. Несомненно, что такие места нетипичны, но если геолог правильно представляет всю совокупность, то для некоторых специфических целей в шахтах и рудниках можно отобрать представительные образцы [190, 365].

При бурении поисковых скважин на воду, нефть, урановые и другие руды также извлекаются горные породы. Значительная часть наших знаний об осадочных породах основана на пробах, взятых из керна скважин. При разведочном бурении керн из скважин часто можно считать представительной выборкой для формаций, развитых в районе. Но обычно скважины привязаны к определенным геологическим структурам, например к ядрам антиклиналей или разломам, в силу чего пробы, полученные из них, могут отклоняться как угодно далеко. По таким скважинам можно определить лишь ту совокупность, которую представляют собственно пробы, но не более.

В нефтеносных районах бурение обычно ведется двумя способами — роторным и ударно-канатным (ударным). При роторном бурении отверстие скважины пробуривается путем вращения долота. Основными процессами при этом являются скалывание, разламывание и стачивание. Для отбора проб пород, проходимых скважинами, существует несколько способов. Первый, наиболее совершенный способ применяется в скважинах колонкового бурения, причем различные методы колонкового бурения дают различные результаты. При алмазном бурении, наиболее дорогостоящем, процент извлечения керна меняется в интервале от 90 до 99. При бурении керн заполняет колонковую трубу, присоединенную одним концом к буровой колонне; на другом конце трубы находится полый буровой снаряд. Разбуренная порода попадает в колонковую трубу и когда последняя заполняется, всю колонну штанг вместе с колонковой трубой поднимают и керн извлекают из колонковой трубы. В случае глубоких скважин эта процедура весьма трудоемка и сопряжена, кроме того, с риском аварии, которая может привести к потере скважины.

Благодаря недавно введенному усовершенствованию теперь можно поднимать только колонковую трубу и оставлять на месте всю буровую колонну. Извлеченный керн составляет 60—90% поднятой породы, так как при подъеме «теряются» неустойчивые породы (пески и глины), что в большинстве случаев не может не привести к ошибкам. Нефтеносные пески, которые сцементированы очень слабо, подчас вовсе выпадают из сферы опробования, так как из скважин на этих интервалах извлекают только обломки более прочных пород.

При роторном бурении глинистый раствор, несущий обломки пробуренных пород, проходит через фильтр и затем изливается в отстойник. Для опробования часто пользуются обломками, остающимися на фильтре. Следует помнить, что любая легко разрушающаяся порода, образуя тонкодисперсную взвесь в глинистом растворе, проходит сквозь фильтр и поэтому не будет представлена в пробах, взятых с фильтра.

Ударно-канатное бурение основано на ином принципе. Долото главным образом работает на раздробление и размалывание, поэтому такое бурение называется еще ударным. Керна практически не получается, но при очистке устья скважины извлекают осколки пробуренных пород, которые вполне пригодны для аналитических исследований. Допуская, что загрязнение проб за счет вышележащих горизонтов незначительно, можно считать, что эти осколки, собранные вместе, представляют собой комбинированную пробу пройденного горизонта. Мягкие, легко разрушающиеся породы,

конечно, не будут представлены в этой пробе. Например, в пробах из продуктивных на газ песчаных горизонтов Орискани почти полностью выпадают пески пенсильванского возраста, так как они слабо сцементированы и легко разрушаются.

Во всех этих случаях результаты анализа проб будут содержать систематические отклонения, величина которых изменяется от очень малых значений вследствие почти полного извлечения керна при алмазном бурении до довольно значительных, обусловленных большими потерями при ударном бурении. Кроме того, скважины бурят не в произвольных местах, а в совершенно определенных, поэтому степень отклонения может быть большой. В любом случае приходится либо пытаться оценивать величину отклонения и вносить соответствующую поправку, либо строго ограничивать область использования полученных результатов только теми интервалами скважин, которые представлены пробами.

В большинстве случаев при геологическом опробовании систематическое отклонение неизбежно. Изучая кварциты Орискани, Розенфельд [363] обнаружил, что, несмотря на случайный характер выбранной сетки, опробование привело к весьма значительному отклонению (смещению). Это произошло из-за неравноценной обнаженности в условиях складчатых структур Аппалачей, где крылья, а иногда и ядра антиклиналей обнажены, а в пределах синклиналей выходы пород встречаются редко. Альтернатива заключается в следующем: либо описать совокупность в том виде, как она представлена в имеющихся обнажениях, не пытаясь экстраполировать ее на всю формацию Орискани, либо показать, что анализ проб из обнажений не приводит к смещенной оценке параметров совокупности изучаемого свойства. Например, если размеры зерен кварца в песчаниках Орискани не зависят от структурного положения, выходы песчаников, относящиеся к антиклиналям, можно считать представительными для всей формации Орискани. Формация Орискани маломощна, и поэтому маловероятно, что мощность ее претерпела значительные изменения во время Аппалачской складчатости. Если это так, то имеющиеся обнажения, обусловленные складчатостью, а также последующей эрозией, и размеры зерен кварца не зависят друг от друга, т. е. эти обнажения представляют всю формацию Орискани в целом.

Такие аргументы необходимы для доказательства представительности и случайности расположения проб и показа, насколько данные пробы удовлетворяют соответствующим требованиям. Если степень изменчивости свойств пород достаточно хорошо известна, величину отклонения, вероятно, можно оценить и внести соответствующие поправки в расчеты.

2.8. КРИТЕРИИ СЛУЧАЙНОСТИ ОПРОБОВАНИЯ

Из вышесказанного очевидно, что при геологических исследованиях трудно осуществить случайное опробование. Нам приходится либо обеспечивать такую сетку опробования, которая гарантировала бы отбор случайных проб, либо отказываться от изучения гипотетической и существующей совокупности и ограничиваться доступной наблюдениям совокупностью. Если принято решение о необходимости изучить существующую совокупность, следует иметь в виду также и необходимость иметь соответствующие средства для выполнения случайного опробования. Если установлено, что случайные пробы существующей геологической совокупности получить невозможно, значит, цель не оправдает средств, требуемых на ее осуществление. Но, пока мы будем оставаться на такой позиции, наши геологические предсказания будут страдать серьезными недостатками. Если геологические предсказания применяются в различных проектах по изучению природных ресурсов, на которые уже затрачены большие средства, то затраты на опро-

бование будут в результате оправданы. Выполнение требований эффективного случайного опробования значительно улучшит качество геологических предсказаний, так как по выборкам, дающим смещенные оценки, почти невозможно получить надежные оценки характеристик генеральной совокупности.

После того как схема опробования разработана и необходимые пробы отобраны, нужно доказать, что эти пробы являются случайными. К сожалению, доказать условия случайности с помощью каких-либо приемов невозможно. Единственное, что можно сделать в этом направлении,— стараться избежать систематического смещения. В качестве основы для случайного опробования обычно служат таблицы случайных чисел, которые обеспечивают отсутствие сколь бы то ни было упорядоченного расположения материала. По поводу требований, которым должно удовлетворять случайное опробование, высказывались различные авторы [15, 128, 343, 430]. Однако до тех пор, пока существует проблема операционного определения равной вероятности, несомненно, будет чрезвычайно трудно определить, что же практически представляет собой случайное опробование [126, 129, 217, 333].

Простой и широко применяющийся критерий следует из соотношения

$$\sigma_{\overline{X}} = \sigma/n$$

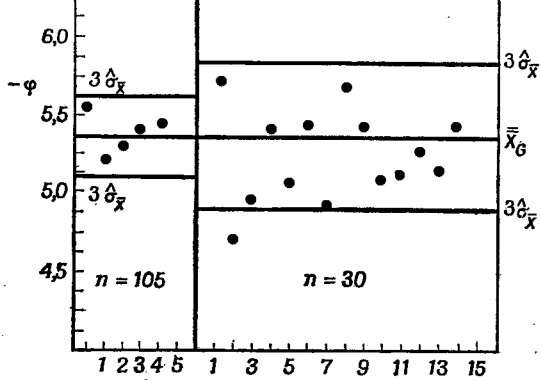
и из центральной предельной теоремы, согласно которой распределение среднего арифметического, полученного по выборке объема n, стремится к нормальному по мере увеличения значения n (см. гл. 13.7). Так как интервал $\overline{X} \pm 3\hat{\sigma}_{\overline{X}}$ охватывает 99,7% площади, лежащей под нормальной кривой, мы можем считать, что если берутся случайные выборки объема n, то приблизительно три средних значения из 1000 не попадут в пределы этой площади.

В качестве примера можно привести исследование размеров галек кварцитов по длинной оси в галечниках Монтурсвилла, предпринятое на учебной практике в 1960—1961 гг. Было взято две серии проб, ориентированных вкрест простирания слоистости. Первая состояла из 5 бороздовых проб по 105 галек в каждой пробе, вторая (секционная) захватывала 15 слоев по 30 галек в каждой пробе. Оценки генерального среднего значения и стандартного отклонения равны $\overline{X} = -5{,}358$ φ, и $\hat{\sigma} = 0{,}827$ φ; соответствующее стандартное отклонение для средних значений проб с $n = 105$ составляет $\hat{\sigma}/\sqrt{105} = 0{,}081$, а для $n = 30$ — $\hat{\sigma}/\sqrt{30} = 0{,}151$ и соответствующие доверительные интервалы (гл. 13.8) равны:

n	$\hat{\sigma}$.	$\overline{X} \pm 3\hat{\sigma}_{\overline{X}}$
105	0,0808	$-5{,}358 + 0{,}242 = -5{,}116$ до $-5{,}600$
30	0,151	$-5{,}358 + 0{,}453 = -4{,}905$ до 5,811

На фиг. 2.5 видно, что все пять бороздовых проб попали в доверительные интервалы, т. е. данное испытание не дало доказательств, отвергающих допущение о том, что по средним значениям бороздовые пробы являются представительными пробами совокупности с $\mu = 5{,}358$ φ и $\sigma = 0{,}827$ φ. Что касается 15 проб, взятых по слоям, то две из них оказались вне доверительного интервала, что значительно выше числа 3 из 1000. Пытаясь это объяснить, можно предположить или какой-то непредвиденный случай, из-за которого две пробы отклонились (две из трех ожидаемых в первых 15), или что средние значения по этим пробам отклоняются больше, чем это можно ожидать от средних значений, взятых из совокупности с $\mu = -5{,}358$ φ и $\sigma = 0{,}827$ φ.

Так как геологические процессы, обусловливающие различные размеры зерен, следуют в направлении сортировки зерен и аккумуляции зерен разного размера в отдельных слоях, то в результате зерна того или иного размера и концентрируются в разных слоях. Если бы изменения были случайными для всей взятой в целом совокупности, слоистости вообще бы не было (во всяком случае, она бы не выражалась размером зерен). На фиг. 2.4 видно, что средние значения по секционным пробам изменяются гораздо более резко, чем средние по бороздовым пробам, хотя они и несопоставимы, если мы не внесем поправку, учитывающую различный размер проб.



Фиг. 2.5. Проверка случайности опробования при помощи доверительных интервалов.
Совокупность — стенка шурфа в галечниках Монтурсвилла [169]; элемент — длинная ось a, в φ-единицах.

В последующих главах описывается ряд других способов, с помощью которых устанавливается закономерность, или систематичность изменений свойств, т. е. различного рода смещений. Очевидно, что, применяя тот или иной способ, следует представлять природу ожидаемого смещения. Результат испытаний нужно рассмотреть на предмет специфических отклонений от условий рандомизации. Однако каких-либо общих приемов, вскрывающих все возможные отклонения от этих условий, нет.

2.9. НЕКОТОРЫЕ РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ПРИЕМЫ

Подобно тому как не существует общих приемов испытаний на любые возможные отклонения от условий рандомизации, также невозможно рекомендовать какую-либо единую практическую процедуру, пригодную для всех случаев. Проекты экспериментов и сопровождающие их выборочные планы довольно разнообразны. Различные проекты разрабатываются для решения различных проблем. Необходимо иметь четкое представление о различных схемах, применяющихся в различных ситуациях. Этой цели служат превосходные руководства, которые можно использовать как справочники ([76, 79, 183, 460], а также последующие главы данной книги). В общем чем меньше мы знаем об изучаемой генеральной совокупности, тем более простым будет проект исследования и план проведения опробования. Чем большими знаниями мы располагаем относительно возможных результатов опробования, тем более сложной и эффективной должна быть схема опробования.

В настоящее время для решения геологических проблем требуется проведение рекогносцировочных исследований в целях определения амплитуды изменений свойств. При этих исследованиях приходится использовать лишь самые простые способы случайного опробования. Модель для изучения совокупностей, которые встречаются в петрографии осадочных пород, уже была рассмотрена (фиг. 2.3). Однако кроме этой модели, нужны также весьма точные данные о степени изменений свойств на различных уровнях для разработки определенных рекомендаций относительно размеров и минимального количества проб. Это в свою очередь обусловливает необходимость предварительных исследований.

Всегда необходимо четко определять цель исследования. Чем точнее это будет сделано, тем яснее будет постановка задачи. Это в полной мере относится к разработке плана выборки (схемы опробования). Если требуется оценить параметры какой-либо совокупности, то еще до решения вопроса о размере и количестве проб нужно предварительно определить степень изменчивости свойств. Целесообразно также выбирать некоторый вероятностный коэффициент и проводить предварительные расчеты для определения приблизительного объема выборок и их количества. Эти два последних показателя должны соответствовать имеющимся средствам. Указанные требования соблюдались при статистических исследованиях в сельском хозяйстве, в результате этих исследований были выработаны выборочные единицы специально для условий сельского хозяйства. Эти выборочные единицы, известные в агрономии как блоки и полосы, имеют квадратную и прямоугольную формы соответственно, причем полоса пересекает всю площадь блока. Полосы по существу эквивалентны бороздовым пробам. Каждая из них охватывает все участки блока, неоднородные по качеству почвы. Подобные же эксперименты необходимо проверить и в геологии, с тем чтобы можно было установить наиболее подходящие размеры и формы выборочных единиц (проб). Для этой цели обычно выполняются лишь самые необходимые рекогносцировочные работы и очень редко ставятся эксперименты, направленные на решение проблем опробования. Однако такие эксперименты необходимы, если мы хотим получить надежные выводы.

Проблемы опробования геологических совокупностей рассматривал Крамбейн [255, 258, 264, 267]. Имеется также ряд других работ, в которых описываются различные схемы опробования [63. 155, 257, 262, 314. 334, 453]. Некоторые эксперименты, направленные на решение специфических проблем опробования однородных и стратифицированных совокупностей, базируются на работах студентов, закончивших университет [169]. Штейнмец [411] впервые изучил различные схемы для опробования галечников. Кокран [74] изучал опробование применительно к изменениям общей плотности пород. В горном деле Хейзен [25, 190, 191] изучал проблемы представительного опробования руд, а Зихель [395, 397], Крайг [238] и Росс [368] рассматривали различные приемы опробования золотоносных жил Ранда в Южной Африке. С несколько более общих позиций проблемы опробования разбираются в руководствах по статистике [76, 94, 184, 460]. Весьма поучительна работа [78], в которой автор рассматривает проблемы построения выборочных планов с довольно широкой областью применения и возможные систематические отклонения, вызванные «отсутствием реакций», что может быть включено, например, в статистические исследования характеристик сексуального поведения мужчин [236].

В общем существует огромная информация по опробованию. Литература о совокупностях, встречающихся в геологии, также весьма обширна. Но пока не будут поставлены и выполнены специальные эксперименты, направленные на решение проблем опробования геологических совокупностей, нельзя ожидать появления руководства, пригодного на все случаи.

ГЛАВА 3

Свойства осадочных пород

Выяснить строение какого-либо объекта — это значит выявить его составные части и характер взаимоотношений между этими частями.

B. Russell, Human Knowledge, Its Scope and Limits, George Allen and Unwin, Ltd., p. 267, 1948

3.1. ВВЕДЕНИЕ; ПОНЯТИЕ СВОЙСТВА

Понятие о каком-либо объекте обычно состоит из описания его свойств и характера взаимоотношений между этими свойствами. Если таким объектом служат осадочные породы, число свойств, которые можно использовать, неопределенно велико. Однако одни свойства представляются более важными, другие — менее. Чтобы решить, какие из свойств являются главными, обычно пользуются двумя критериями: 1) свойства должны быть такими, чтобы ими можно было пользоваться наиболее широко, т. е. они должны характеризовать любой объект или все объекты; 2) они должны представлять собой такой простейший набор свойств, с помощью которого можно было бы получить определение данной породы. Эти критерии с успехом можно выразить математически в качестве необходимых и достаточных условий для полного и однозначного описания какого-либо объекта.

Любую горную породу можно аксиоматически определить как агрегат минералов, причем минералы являются элементами, или составными частями, которые не идентифицируются, а агрегат, или совокупность,— группой элементов (минералов), из которых состоит множество (горная порода). Отсюда следует другое экивалентное обобщенное определение: *совкупность — это агрегат элементов.*

Чтобы охарактеризовать совокупность, надо знать свойства, общие для всех элементов, а также свойства ассоциаций элементов. Сначала следует классифицировать элементы, для чего необходим набор критериев, с помощью которых любой и каждый элемент можно свести к какому-то простому классу. Классы — это взаимно исключающие и всеобъемлющие категории, т. е. подмножества, охватывающие полную последовательность элементов от пустого множества (элементы отсутствуют) до их полного набора, составляющего совокупность. Применительно к описанию какой-либо породы подобная процедура состоит в определении минералов (классов элементов) и таких диагностических свойств различных минералов, с помощью которых выделяются классы.

Затем следует сосчитать количество элементов в каждом классе или определить относительные количества элементов (минералов), составляющих агрегат, т. е. совокупность, или данную породу.

После того как элементы классифицированы и определены их относительные количества в данном классе, приступают к характеристике свойства каждого элемента (или серии свойств), например определяют размер и форму каждого элемента. Практически эта процедура сводится к определению функций распределения переменных, например разновидности элемента, размера, формы и т. д. Эту функцию можно определять для элементов одного класса (монодисперсность) или охватывать элементы разных классов (полидисперсность). В последнем случае целесообразно вычислить относительное количество элементов в каждом классе и таким образом узнать адекватные соотношения между частотами встречаемости разных элементов.

Применительно к горным породам четыре указанные операции охватывают минеральный состав, определение относительных количеств, размера и формы. Если положение каждого элемента в R-пространстве (для евклидова пространства $R = 3$) известно однозначно, можно считать, что агрегат теперь полностью определен. К сожалению, на практике неудобно определять положение каждого элемента и эта характеристика заменяется двумя другими — ориентировкой каждого элемента и его положением по отношению к соседним элементам или характером упаковки.

3.2. УРАВНЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СОВОКУПНОСТЬ

Обычно генеральная совокупность характеризуется типами образующих ее элементов, их размерами и формой, а также ориентировкой относительно друг друга и характером упаковки. Эту зависимость можно выразить символически в виде общей формулы

$$P = f(m, s, sh, o, p), \tag{3.1}$$

где P — показатель, характеризующий совокупность (породу), который является функцией пяти свойств составляющих ее элементов (минеральных частиц). К свойствам относятся типы элементов и их относительные количества (m_1, m_2, m_3, . . ., m_k для k классов элементов), их размеры s, формы sh, ориентировка o и плотность упаковки p. Различные классы элементов характеризуются размерами, формой и другими свойствами, а также частотными функциями распределения. Последние содержат параметры θ_i, вместо которых в практике используются подходящие статистические оценки $\hat{\theta}_i$.

Классификацию элементов и процедуру определения их относительных количеств можно представить с помощью биномиального распределения, если имеется лишь два класса ($k = 2$), или с помощью полиномиального распределения, если число классов больше двух ($k > 2$); эта процедура детально описывается в гл. 9, 10 и 14. Удобными статистическими оценками для характеристик, указанных в выражении (3.1), являются средние арифметические $\overline{X}$. Чтобы соблюдать правила классификации, нужно выработать такие критерии, по которым можно было бы выделять взаимно исключающие и точно охарактеризованные классы. При минералогическом анализе такими классами являются минералы. Все минералы и каждый минерал определяются с помощью соответствующих диагностических критериев. Далее определяется относительное количество минералов в каждом классе путем подсчета частоты встречаемости в выборке из данной совокупности. Количество классов меняется в зависимости от целей анализа, и мы всегда находимся в некотором компромиссе между идеальным случаем «полного» определения (определения всех минералов) и некоторой степенью «неполноты». Но в любом случае по меньшей мере в одном из классов всегда будет содержаться ряд различных минералов. В качестве примера предположим, что принято решение определить кварц (A), полевой шпат (B) и слюду (C) и игнорировать все остальные минералы, что эквивалентно четырем классам — A, B, C и все остальные минералы (в которые не должны входить

ни A, ни B, ни C). Если диагностические критерии, использованные при делении элементов на классы, не вполне эффективны, могут быть выделены и различные другие классы, такие, например, как AB, AC или BC, причем первоначально выделенные классы не должны быть взаимоисключающими. Необходимо всегда проверять эффективность диагностических критериев с целью показать состоятельность классификации (см. гл. 9 и 10). Выполнение условия состоятельности наиболее важно при подсчете относительных количеств. Неправильную классификацию гораздо легче распознать, если она основана на количественных данных.

После того как элементы удовлетворительно расклассифицированы, измеряется их количество. Если для этой цели изучается лишь один какой-то класс (например, кварц) и выбрана соответствующая методика измерений (см. гл. 4 и 5), то распределение изучаемой переменной, полученное при этих исследованиях, будет приблизительно логарифмически нормальным (или φ-нормальным). Подходящими оценками параметров в этом случае явятся среднее значение $\overline{X}$ и стандартное отклонение $\hat{\sigma}$ или дисперсия $\hat{\sigma}^2$. Если определяется содержание элементов больше чем в одном классе, распределение почти определенно окажется полимодальным, а подходящими оценками будут порядковые статистики, такие, как медианное значение Md_φ и квантильное отклонение PD_φ, подсчитанные также в логарифмической шкале. Пока еще не установлены надежные методы для определения весовых коэффициентов распределения элементов по классам, чтобы можно было упростить описание распределений.

Подобным же образом при измерении формы элементов одного класса данные этих измерений комбинируются для определения сферичности (см. раздел 6.1.1) либо используются как линейные компоненты логарифмов переменных (см. раздел 3.2). В таком случае распределение также станет приблизительно нормальным. Среднее значение $\overline{X}$ и стандартное отклонение $\hat{\sigma}$ будут подходящими оценками для μ и σ. Измерение формы по различным классам элементов разработано еще слабо.

До настоящего времени еще нет общепринятой процедуры измерения ориентировки элементов в данном классе. Приемы, описываемые ниже (гл. 7), приводят к определению некоторого произвольного среднего. Единственная оценка, которую можно включить в определяющее уравнение (3.1),— это стандартное отклонение как мера степени параллелизма или предпочтительной ориентировки элементов.

Для определения плотности упаковки p разработана соответствующая методика, которая при подходящих условиях ведет к биномиальному или полиномиальному распределению; среднее значение $\overline{X}$ здесь вновь является хорошей обобщающей статистической характеристикой.

Безусловно, есть ряд других свойств, которые можно использовать для характеристики агрегата (совокупности, или горной породы), например пористость, твердость и др. Все это вторичные или производные свойства в том смысле, что изменение каждого из них зависит от изменений пяти свойств, входящих в основное уравнение (3.1). Из этих основных свойств можно вывести, по крайней мере теоретически, производные свойства. Таким образом, пять свойств приняты в качестве адекватных для характеристики агрегата. Они являются необходимыми и достаточными условиями для однозначного определения P.

3.3. ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ

Когда основные свойства выбраны, следует наметить план для определения значений каждого из свойств. В основном в этот план должен быть включен комплекс каких-то приемов для производства измерений, т. е. для

получения серии чисел в каких-то единицах измерения, которые можно будет подставить в уравнение (3.1) и которые в совокупности должны определять значение P. Последнее представляет собой однозначное определение образца какой-то горной породы. Такой подход представляется многообещающим и имеющим широкую область применения [113, 114, 166]. Но, чтобы можно было пользоваться намеченным методом, нужно понять и как-то выразить взаимоотношения между свойствами, измеряемыми различными способами, что представляется делом довольно трудным.

Существуют многочисленные способы измерения размеров зерен, но при адекватной проверке оказывается, что в большинстве из них лишь частично соблюдаются требования экспериментальных исследований. Недостатки сводятся в общем к тому, что понятия подчас заменяются практическими (операционными) определениями и наоборот. Поэтому необходимо выразить взаимоотношение между свойствами количественно и решить, можно ли действительно с помощью намеченных приемов добиться поставленной цели.

Например, рассмотрим детально столь хорошо известное свойство, как размер зерен, и попытаемся выразить по аналогии другие свойства. С самого начала необходимо подчеркнуть соблюдение двух условий: 1) следует определить цель проводимого анализа; 2) приемы анализа должны быть применимы для изучения осадочных пород. Конечное значение размера зерна P_s будет функцией свойств породы, поэтому мы можем выразить результат эксперимента в виде формулы

$$P_s = f(m, s, sh, o, p). \tag{3.2}$$

Теперь определим цель эксперимента. В общем изучение размеров частиц породы преследует две цели — сравнение различных пород и (или) выяснение условий формирования породы. В последнем случае, очевидно, нужно знать размер зерен вещества во время их отложения, и поэтому мы допускаем, что размер зерен, изучаемых в настоящее время, существенно не изменился с момента их отложения [300]. В силу этого из рассмотрения автоматически исключаются такие вещества, как глинистые минералы [1] и вообще большая часть минералов, слагающих цемент пород [270], в том числе те минералы цемента, которые испытали перекристаллизацию. Отсюда следует, что, если мы хотим выяснить условия формирования породы, эти минералы нужно удалить до начала анализа. Это условие значительно упрощает процедуру дезинтеграции. Таким образом, фактически мы будем определять размер лишь части зерен, составляющих породу.

Теперь рассмотрим типичный комбинированный прием, используемый в гранулометрическом анализе — просеивание (ситовый анализ) через сито и осаждение в воде (метод пипетки). Сначала образец породы разделяют на составляющие ее зерна, не изменяя при этом размеров зерен. Эта процедура может оказаться сложной, но допустим, что она успешно выполнена. Путем дезинтеграции мы нарушили упорядоченное расположение элементов породы, т. е. мы уничтожили первоначальную ориентировку (o) и упорядоченную текстуру породы (p) [2] (уравнение 3.2), но не нарушили при этом никаких других свойств. Отсюда уравнение измерения P_{s_1} можно

[1] Практически определить размер частиц глинистых веществ в момент их осаждения представляется невозможным даже для современных осадков; более того, мы не сможем достичь и более ограниченной цели — определить точно величину частиц этих веществ в том виде, в каком они присутствуют в изучаемых ныне породах.

[2] Заметьте, что при дезинтеграции вещество, цементирующее породу, не удаляется, изменяется лишь его структура; например, из упорядоченного слоистого расположения цемент переходит в беспорядочное состояние; таким образом, те свойства, которые охватываются термином «цемент», оказываются не связанными с изучаемыми свойствами и они не воздействуют на последние.

теперь записать в виде

$$P_{s_1} = f(m, s, sh). \tag{3.3}$$

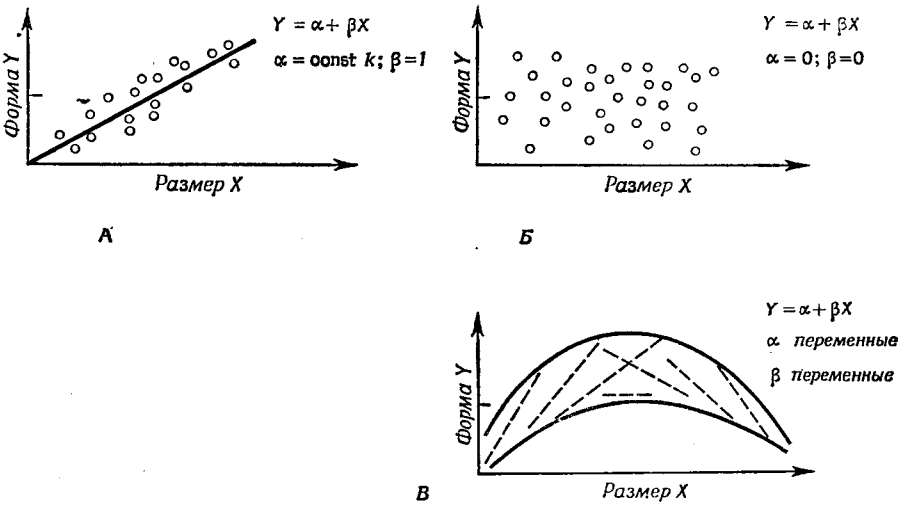
Ниже будет отмечено, что изменение размера P_{s_1}, полученного таким образом, есть функция трех переменных — состава, размера и формы агрегата измеряемых зерен. Теперь нужно установить, что величина P_{s_1} действительно является мерой величины зерна, на которую не влияют состав и форма зерен, а если они влияют, то применяются соответствующие поправочные коэффициенты. Предположим, что агрегат состоит из зерен кварца и чешуек слюды. Следовательно, состав неоднороден и изменения количества слюды не будут влиять на величину P_{s_1}. Поэтому необходимо оценить количество слюды или кварца и применить поправочный коэффициент. Конечно, кварц и слюда отличаются по форме кристаллов, но так как форма здесь целиком определяется составом, достаточно одного поправочного коэффициента, чтобы устранить влияние слюды и разницу в форме кристаллов.

Этот гипотетический пример показывает, насколько важны взаимоотношения между свойствами для оценки величин, полученных при эксперименте. Рассмотрим теперь другой гипотетический пример: размер зерен определяется в агрегате, состоящем из зерен двух и более минералов, но форма зерен не зависит от их состава. Независимость выражается здесь в том, что зерна разного состава или имеют сходную форму, или изменяются в широких пределах. В последнем случае нет необходимости вводить поправочный коэффициент: поведение всех компонентов при просеивании оказывается одинаковым, мера величины P_{s_1} меняется с изменением размера зерен и на нее уже не будут влиять изменения в количестве компонентов. Однако, если размер зерен определяется методом осаждения в воде, различия в удельном весе минералов повлияют на получаемые результаты, вследствие чего, видимо, следует вводить поправку на изменения содержаний различных минералов.

Теперь вместо гипотетических примеров разберем пример с осадочной породой и попытаемся решить, являются ли свойства ее зависимыми или независимыми. В данном случае кварциты и многие разновидности пляжных песков можно считать мономинеральными породами. Основные их компоненты — кварц (обычно свыше 70%) и обломки кремней и кварцитов (10—15%). Здесь не возникает каких-либо проблем, так как этот агрегат довольно близок гомогенной однокомпонентной системе. Однако среди осадочных пород преобладают граувакки или аркозы (около 80% всех обломочных пород), т. е. многокомпонентные системы. Основные компоненты этих пород — кварц (30—70%), полевой шпат (10—15%) и обломки пород (10—50%). В целях упрощения задачи кварц и полевой шпат рекомендуется объединить ввиду сходства в форме их зерен. После этого можно использовать ход рассуждения, касающегося разобранного выше отвлеченного примера, иллюстрирующего случай независимых свойств.

Форма обломков таких пород, как кварциты и кремни, существенно не отличается от формы зерен кварца; обломки других пород, например филлитов, различных сланцев и гнейсов, уплощены и их форма значительно отличается от формы кварцевых зерен. В данном случае в категорию «обломки пород» попадают, с одной стороны, зерна, сходные по форме с кварцевыми, и, с другой, зерна, формой напоминающие слюду. Здесь форма не зависит от состава, но нельзя сказать, что она и независима от него. В таких породах (в большинстве разновидностей граувакк и в некоторых аркозах) выявляются новые отношения между свойствами — отношения частичной зависимости и частичной независимости или взаимозависимости. Чтобы проиллюстрировать значение взаимосвязей между свойствами, необходимо рассмотреть некоторые основы теории эксперимента.

О физическом смысле понятий «зависимость», «независимость» и «взаимозависимость» дает представление система двух переменных (фиг. 3.1). На фиг. 3.1, *А* изменение размера и формы связано прямой линейной зависимостью. На фиг. 3.1, *Б* размер не зависит от формы, а на фиг. 3.1, *В* размер связан с формой, но отношения между ними не такие, как на фиг. 3.1, *А*. Между формой и размером в случае на фиг. 3.1, *В* имеется взаимодействие [43, 126, 127, 409]. В первом случае (фиг. 3.1, *А*), после внесения



Ф и г. 3.1. Взаимоотношения между свойствами осадочных пород [175].
А — зависимость; *Б* — независимость; *В* — взаимозависимость.

поправки за форму, можно определить размер независимо от формы. Во втором случае (фиг. 3.1, *Б*) нет надобности в поправочном коэффициенте. Размер независим от формы, и отсюда следует, что полученные при опыте значения являются реальными размерами зерен. В последнем случае (фиг. 3.1, *В*) нужно вносить различные поправочные коэффициенты для каждого интервала размера.

Еще более сложна система с тремя переменными, т. е. измерение величины P_{s_1} при просеивании многокомпонентной системы. Источники изменчивости сведены в табл. 3.1 и графически представлены на фиг. 3.2. Если

Таблица 3.1

Схема трехфакторного эксперимента, иллюстрирующая источники изменчивости [175]

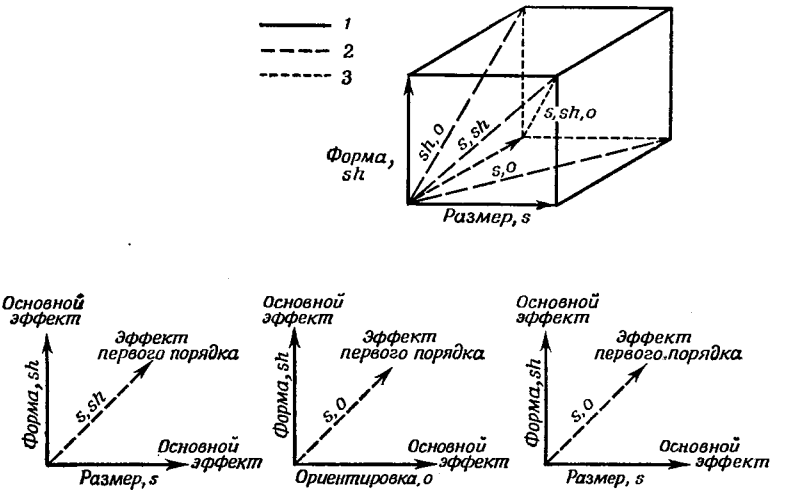
Размер Форма Ориентировка	Три основных эффекта
Размер — форма Размер — ориентировка Форма — ориентировка	Три специальных эффекта первого порядка
Размер — форма — ориентировка	Один смешанный эффект второго порядка

три переменных взаимозависимы, значит, их взаимодействие практически увеличивает изменчивость P_{s_1} [1].

[1] Следует заметить, что при двухмерном изображении на фиг. 3.2 не выявляются взаимодействия второго порядка, в силу чего, изучая систему с помощью выделения пар изменяющихся факторов, можно прийти к ошибочным заключениям, если взаимодействия второго порядка играют существенную роль.

В таком случае недостаточно использовать один поправочный коэффициент, каждую из переменных нужно определить с помощью соответствующих экспериментов и учесть ее взаимодействие с другими переменными. Такой план практически очень трудно осуществить, надо использовать какой-то более простой способ измерения размера.

Во многих случаях породу нельзя дезинтегрировать, не изменив размера ее компонентов, подлежащих измерению. В таких породах размеры зерен



Ф и г. 3.2. Геометрическая иллюстрация трехфакторного эксперимента и его смешанных эффектов.

определяются в шлифах [241]. В качестве изучаемого минерала рекомендуем выбирать кварц, что дает возможность рассматривать состав породы как константу и тогда состав можно игнорировать. Обозначим размер зерен кварца через P_{s_2}, т. е.

$$P_{s_2} = f(s, sh, o, p). \tag{3.4}$$

Очевидно, что в этой системе из многих переменных свойства взаимосвязаны и взаимодействуют. Длина сечения зерна кварца является функцией объема зерен, их формы, ориентировки шлифа и ориентировки зерна. Плотность заполнения осадочной породы зернами будет также влиять на ориентировку зерен [48]. Здесь мы имеем систему, охватывающую четыре главных фактора, и соответствующие им шесть взаимодействий первого порядка (типа s, sh; s, o и др.), четыре взаимодействия второго порядка (типа s, sh, o; s, sh, p и др.) и одно взаимодействие третьего порядка (s, sh, o, p). Совершенно очевидно, что, если меняется характер сложения породы, а размеры зерен остаются неизменными, значение P_{s_2} будет меняться; поэтому оно не является лишь мерой величины зерна, а косвенно зависит от ряда других переменных, т. е. изменения в размерах в данном «измерении» P_{s_2} происходит в тесной связи с изменениями других компонентов.

Неоднократно пытались привести в соответствие эти изменения путем сравнения одного изменения с другим. Вопрос сводился только к изучению взаимоотношений между P_{s_1} и P_{s_2}, т. е.

$$f_1(m, s, sh) = f_2(s, sh, o, p). \tag{3.5}$$

Если в изучаемом наборе проб состав постоянен, т. е. $m = k$, как, например, в «чистых» кварцитах, уравнение упрощается до

$$kf_1(s, sh) = f_2'(s, sh, o, p).$$

Выявление соответствия будет представлять собой попытку привести случайную структуру левой части уравнения к упорядоченной правой части. Это можно легко осуществить в песках, состав которых приближается к мономинеральному, но с изменением состава изменится и поправочный коэффициент [136, 365]. В данном случае очевидно, что наличие или отсутствие взаимодействий свойств — это важный фактор для оценки разных способов измерений [1].

Наконец, мы можем вернуться к простейшему и наиболее прямому способу измерения — процедуре чрезмерно популярной в естественных науках — измерению размеров зерен кварца независимо от их расположения в породе. Другими словами, мы дезинтегрируем образец породы соблюдая единственное условие — не нарушать размер и форму зерен кварца. В случае необходимости образец разлагается на все компоненты и затем измеряется величина и характеризуются формы зерен и кварца. Это можно представить в виде формулы для P_{s_3}, где

$$P_{s_3} = f(s, sh), \tag{3.6}$$

т. е. в виде простой двухмерной системы, в которой учитывается два главных фактора (s и sh) и одно взаимодействие первого порядка (s, sh). Если, однако, мы измеряем оба главных фактора одновременно на одном и том же зерне, можно соединить эти два действия в одно независимое определение размера. Методика для осуществления такой операции была выработана Халбе [203]. Но можем ли мы в действительности отделить размер от формы? Представьте человека, который стоит в дверях и спрашивает группу людей, которые находятся в комнате: «Шнур, который вы видите в моей руке, прикреплен к сферическому предмету; внести этот предмет в комнату?» Люди, находящиеся в комнате, не могут ответить на этот вопрос, не получив некоторой информации о величине предмета. Если бы было сказано, что шнур прикреплен к двухметровому предмету, то также нельзя было бы ответить на этот вопрос, так как никто не мог знать, пройдет ли этот предмет в дверь. Следовательно, в физических объектах форма и размер неотделимы друг от друга; чтобы объекты были удовлетворительно описаны, обычно нужно знать как их форму, так и их величину.

Далее, если мы хотим определить величину зерна какой-то осадочной породы с целью восстановления истории ее формирования, необходимо непосредственно измерить эту величину; если же цель состоит или в сравнении «размеров» зерен двух образцов пород, или в нахождении различий между двумя образцами по «размерам» зерен, этой цели можно достигнуть почти любым способом, конечно, при условии применения стандартизированных технических приемов и соблюдении необходимой точности. Однако, если такие различия обнаружены, их интерпретация сопряжена с весьма большими трудностями. К такого рода способам относятся почти все косвенные определения размеров.

Известны разнообразные технические приемы для измерения величины и формы зерен [2, 8], их ориентировки [149], плотности заполнения зернами пространства [114, 225], их состава [63], но все они страдают одними и теми же недостатками: изменения, вызываемые различными свойствами, обобщаются в едином замере. Для того же, чтобы проанализировать образец породы, нет другого выхода, как оценить все свойства агрегата одновременно и затем пытаться решить с помощью многомерного анализа [234], содержится ли в серии измерений какая-либо дополнительная информация.

---

[1] Почти при всех попытках рационализировать измерение размеров зерен в шлифах используется евклидова геометрия, а следовательно, и трехмерное плоское пространство, в то время как наличие взаимодействий указывает на то, что пространство, в котором измеряется это свойство, криволинейно.

3.4. ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОСНОВНЫМИ И ПРОИЗВОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Предыдущий анализ приводит к следующему общему заключению: чтобы оценить обобщенный показатель, который составляет однозначную характеристику породы, нужно измерить каждую из пяти переменных и взаимно их увязать. Такая цель редко ставится (см., однако, работы [177 и 180]), но в статистике имеется соответствующая методика, и ею часто пользуются в генетике и психологии.

Взаимозависимость пяти основных свойств играет важную роль также и при более полном исследовании свойств осадочных пород. Так, пористость является функцией этих пяти свойств, и оценить «абсолютную пористость» можно с помощью уравнения (3.1), рассматривая показатель P как меру пористости. Тогда пористость, или объем пор, можно определить как

$$P = f(m, s, sh, o, p). \tag{3.7}$$

При обычных измерениях пористости принимается, что жидкость, заполняющая поры, не взаимодействует с другими компонентами породы; эта точка зрения была бы правильной, если можно было бы полностью исключить пустоты. Но в большинстве случаев при изучении пористости в поры вводят некоторое количество жидкости. Таким образом, возникает какое-то взаимодействие между жидкостью и компонентами породы. Одна из причин использования газов при определении пористости заключается в их очень слабом взаимодействии с породой. Показатель пористости, измеренный с помощью заполнения газами, позволяет упростить последующие расчеты и манипуляции с ними. Следует отчетливо представлять, что, определяя пористость породы по отношению к воде, необходимо учитывать рассмотренные взаимодействия. Определяя коллекторские свойства породы путем использования жидкостей, которые предположительно не взаимодействуют с породой, мы получим результат, несопоставимый с другими результатами, выведенными из опыта с взаимодействующей жидкостью. Здесь вновь показано, насколько важна и плодотворна концепция взаимозависимости связанных друг с другом переменных. Показатель пористости можно представить как

$$P_0 = f(r, l), \tag{3.8}$$

где P_0 — показатель пористости, r — порода, l — жидкость. Нельзя оценивать r и l отдельно, так как если две переменных независимы (как мы предполагаем в данном случае), они не будут взаимодействовать одна с другой. Различие между свойствами коллектора-резервуара, замеряемыми в поле и в лаборатории, можно объяснить в основном отсутствием взаимодействия в экспериментальных условиях и его наличием в природе.

Подобным же образом можно достигнуть лишь частичного успеха, если мы попытаемся ввести поправочный коэффициент для r, конечно, если этот коэффициент не учитывает взаимозависимости всех пяти переменных. Эмпирически вычисленный поправочный коэффициент можно использовать только в том случае, если в значениях пяти переменных, входящих в r и соответственно в поправочный коэффициент, обнаружены ограниченные изменения. Другими словами, эмпирически полученные поправочные коэффициенты будут действенны только в тех пределах изменений переменных, которые наблюдались в данном эксперименте, т. е. этот коэффициент можно использовать лишь для единого однородного множества пород.

Объемная плотность является функцией плотности расположения зерен и пористости. Это несколько более сложная переменная, чем пористость. Плотность расположения зерен часто принимается в виде линейной функции плотности компонентов породы — минералов. Но, как следует из вышесказанного, плотность расположения зерен породы есть функция пяти пере-

менных и маловероятно, чтобы эта функция была линейной (исключая некоторые очень ограниченные условия). Действительно, любое измерение, которое основано на линейных (или, как иногда называют, аддитивных) взаимоотношениях компонентов, должно восприниматься весьма критически, если, конечно, линейная зависимость не устанавливается адекватными экспериментами.

Проницаемость — это вектор, или направленное свойство горных пород относительно жидкостей. Его можно считать динамическим выражением пористости. Почти во всех экспериментальных определениях проницаемости уравнения, оценивающие скорость потока, содержат постоянную величину, которая по существу является поправочным коэффициентом. Считается, что этот коэффициент вводится на разнообразие свойств горных пород [305, 330]. Совершенно очевидно, что постоянная величина, которая охватывает изменения пяти взаимозависимых переменных плюс взаимоотношения между этими пятью и жидкостью, используемой для измерения скорости потока,— это нечто похожее на чудо. Различия между лабораторными измерениями проницаемости и поведением коллекторов в естественных условиях будут оставаться до тех пор, пока существует упрощение сложных природных зависимостей. Несомненно, что экспериментальные определения проницаемости в условиях, напоминающих естественные, чрезвычайно трудно осуществимы, и вероятно, они могут быть осуществлены лишь путем последовательных приближений. Но альтернатива принять большой разрыв в значениях изменений в равной степени неудовлетворительна.

Анализируя осадочные породы в данном аспекте, необходимо оценить изменения пяти основных свойств: состава, размеров и формы зерен, ориентировки, плотности заполнения зернами пространства и, кроме того и насколько это возможно, надо еще выяснить функциональные взаимоотношения между этими переменными. В результате окончательного анализа различные характеристики пород могут быть выражены в виде некоторого показателя, представляющего собой сложную функцию пяти взаимозависимых переменных.

Измерения более сложных свойств можно выполнить, только если мы отнесем их к тем же пяти переменным с одновременным учетом других взаимодействующих переменных, введенных в данный эксперимент. Здесь уместно подчеркнуть, что любой поправочный коэффициент, вводимый для пяти или более взаимодействующих переменных в экспериментальном анализе, может иметь лишь ограниченную область применения, и пределы, в которых коэффициент эффективен, будут определяться амплитудой изменений одних или всех переменных, предположительно обусловливающих введение поправочного коэффициента. Любой поправочный коэффициент, установленный в основном с помощью «рационального анализа» и допускающий линейную зависимость без подтверждения ее экспериментами, вероятно, следует считать скорее ошибочным, чем правильным.

Совершенно очевидно, что изучение таких природных систем, как горные породы, должно включать все необходимые переменные. Нельзя недооценивать или упрощать сложные взаимоотношения между этими переменными. Лишь при соблюдении этих условий изучение будет эффективным и будет иметь определенный смысл. Экспериментальные работы, с помощью которых достигается поставленная цель, являются необходимой составной частью научного подхода. Следовательно, необходимо его знать с тем, чтобы можно было получить имеющие смысл ответы на вопросы, касающиеся природных систем. Взаимодействующие переменные, которыми характеризуются взаимозависимые соотношения, могут быть выражены количественно и рассчитаны в результате экспериментов. Лишь эксперименты позволяют оценить как относительное значение взаимодействия переменных, так и значение основных эффектов или самих основных переменных.

ГЛАВА 4

Гранулометрический анализ

Операции, с помощью которых измеряется длина, должны быть определены однозначно. При нескольких сериях операций соответственно есть и несколько концепций. Каждая серия операций должна иметь какое-то строго определенное название.

P. W. Bridgman, The Logic of Modern Physics, The Macmillan Co., p. 10, 1946

4.1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

После того как принимают решение, какие свойства подлежат изучению, обычно намечают определенные технические и методические приемы, представляющиеся наиболее подходящими, и затем приступают к измерениям. Такая практика в большинстве случаев приводит к получению множества данных, которые трудно интерпретировать или их вообще не интерпретируют. На этой стадии экспериментального анализа чрезвычайно важно знать, что после выбора изучаемых свойств нужно принять еще ряд решений, прежде чем намечать приемы, с помощью которых будут производиться измерения. Прежде всего следует рассмотреть концептуально данное свойство. Так, размеры и форма зерен связаны с объемными категориями, и если эти два свойства измеряются независимо одно от другого, то при попытке осмыслить полученные данные возникнут значительные затруднения. Как уже упоминалось выше (стр. 41), знание размера без знания формы (и наоборот), теоретически рассуждая, имеет мало смысла.

Концептуально имеется какое-то интуитивное представление о том, что размер зерна относится к степени его крупности. Но еще не было дано (и не может быть дано) четко выраженного определения размера без сравнения с каким-либо условным стандартом. Например, зерна кварца малы по сравнению со стульями и столами, но они велики относительно атомов и молекул. Что в таком случае подразумевается под размерами? Единственный ответ, который можно дать на этот вопрос,— размер определяется масштабом, а пределы самого масштаба — от вселенной до частицы атома. При определении размера объема выбирается линейный масштаб. Амплитуда изменений размеров составных частей осадочных пород находится в пределах от долей микрона до какого-то числа метров, т. е. превышение составляет более чем $1 : 10^6$. Под размером составной части, или зерна осадочной породы, понимается положение, или цифровая отметка, на этой числовой шкале. Но как мы узнаем это положение, или это число? Здесь мы переходим от концептуальных определений свойств размера к операционному определению каких-то действий, которые приведут нас к искомой величине на выбранной числовой шкале (табл. 4.1, верхняя часть).

Таблица 4.1

Задача измерения свойств

Последовательность действий	Концепция	
	Концептуальное определение	
	Операционное определение	
	Процедура	
	Техника	
	Первоначальные измерения	
Систематическое смещение	Выбор техники измерений	
Точность и осмысливание измерений	Результаты измерения	Суждение о точности и смысле полученных данных
	Техника	
	Процедура	
	Операционное определение	
	Концептуальное определение	
	Концепция	

Стоит лишь приступить к указанным действиям, как становится очевидным, что имеется множество способов узнать некое число на шкале и что разные способы могут привести к разным числам. Возникает вопрос — на чем основан выбор процедуры измерений? Наиболее справедливым ответом нужно считать, что ни один способ не лучше других. Чтобы выбрать тот или иной способ, ту или иную процедуру, необходимо что-то «знать» об измеряемом свойстве, а единственный способ узнать это состоит в проведении экспериментов (измерений). В простейшем случае начальных измерений наилучшая процедура та, при которой можно получить наиболее точные результаты. Тогда наилучшую процедуру можно определить операционно с помощью наилучшей оценки среднего значения, величины разброса значений около среднего в виде стандартного отклонения. Здесь мы вновь встречаемся с двумя концепциями — систематическими отклонениями и разбросом отдельных значений и снова видим, что довольно просто уменьшить систематическое отклонение при строгом операционном определении этого понятия. Рассеяние остается еще трудной для определения концепцией, и единственный способ, с помощью которого можно разрешить дилемму,— это следовать рекомендациям, предложенным выше, т. е. использовать несколько различных процедур. Каждая процедура дает некоторое наиболее вероятное значение и отличается определенной степенью точности. Если, усовершенствуя процедуры и увеличивая их точность, мы обнаружим, что получаемые наиболее вероятные значения ложатся на асимптотическую кривую (фиг. 1.2), можно предполагать, что при этом уменьшаются и систематические отклонения и разброс результатов измерений.

На практике используются эти две основные характеристики экспериментов и измерений, что и помогает нам получать необходимую информацию. Сначала мы пользуемся понятием точности, считая, что из двух способов, направленных на решение одной и той же цели, предпочтительнее тот, который обеспечивает более высокую точность. Естественно, что цель исследований следует определить еще до оценки разных способов и процедур, направленных на достижение этой цели.

После того как уже выбрано какое-то свойство для изучения, необходимо сформулировать его концептуальное определение и выбрать систему технических операций, с помощью которых наилучшим образом выполняется операционное определение. Затем, при анализе результатов эксперимента, делают обратную попытку — переходят от операционных определений к концептуальным (табл. 4.1). Выше упоминалось, что выбор технических приемов и процедур определяется величиной систематических отклонений, приемы же, выбранные окончательно, являются наиболее осмысленными или такими, при которых обеспечен простейший путь от операции к концепции. Иными словами, желательно найти такую технику

эксперимента, которая обладала бы уже известной точностью и обеспечивала бы возможность осмысленных измерений. Следует заметить, что слово «осмысленный» нельзя здесь считать достаточно определенным, и до тех пор, пока мы не решим, что под ним подразумевается, эксперименты будут оставаться неудовлетворительными. Но как только мы определим цель, это слово становится эквивалентом точности (разброса) измерений, что и поможет выбрать наиболее эффективную процедуру.

Итак, мы начали с концепции, затем свели ее до операции, которая приносит информацию в виде измеренных значений с заданной точностью, подобрали технические приемы, которые наилучшим способом отвечают требованиям операционного определения и отличаются наименьшими систематическими отклонениями, потом данные, полученные с помощью этих приемов, свели к операционному определению, а последнее сформулировали в виде концепции. Если эксперимент был успешным, полученные данные будут иметь определенный смысл относительно данной концепции, приведут к большей точности и приблизят к истинному значению с помощью последовательных аппроксимаций. В табл. 4.1 последовательно перечислены все эти этапы, приводящие к осмысленным измерениям.

4.2. ПОНЯТИЕ РАЗМЕРА И ЕГО ИЗМЕРЕНИЕ

Понятие размера связано с объемом, и, чтобы представить содержание этого понятия, придется вспомнить сначала некоторые правильные тела, объем которых определяется довольно просто. Так, для куба или шара объем равен третьей степени длины какой-то линии, однозначно выражающей форму данного правильного тела. Для куба это будет третья степень его ребра, а для шара — его радиуса, умноженного на некоторую постоянную величину $\left(\frac{4}{3}\pi\right)$. В менее правильных телах, например в прямоугольном параллелепипеде, объем определяется произведением размеров трех его неравных между собой граней. В случае еще менее правильных тел для получения удовлетворительного значения объема необходимо выполнить еще большее число измерений. Для тела неправильной формы, каким является зерно кварца в осадочной породе, необходимо выполнить n измерений, чтобы получить полные данные об объеме [181].

Зная объем, можно получить размер тела в плоскости, измерив какую-то характерную ось, лежащую в этой плоскости. Разные тела можно сравнивать по величине осей. При выборе характерной оси правильных тел (куба или шара) не возникает никаких трудностей. Но при выборе оси для тела октаэдрической формы приходится допускать некоторую условность, причем степень этой условности будет увеличиваться по мере перехода к телам с более неправильной формой. Тем не менее размер зерен можно определить путем выбора одних и тех же осей и сравнения их в каком-либо масштабе. В этом случае мы получим меру длины некоторых однозначно определенных осей.

Другой способ, часто применяемый на практике, состоит в непосредственном определении объема тела по количеству вытесняемой им жидкости. При этом способе мы получаем какое-то другое представление о размере тела. Так, можно измерить объем тела неправильной формы, поместив его в воду и затем высчитать величину ребра куба или радиуса шара, равновеликих по объему с объемом измеряемого тела, т. е. эта операция сводится к сравнительному измерению размера тела. Такая процедура применима к любым телам, объем которых можно определить, поместив их в жидкость.

Мы можем пользоваться и еще какими-то другими косвенными способами, например измерять некоторые свойства, обусловленные размерами,

и сравнивать затем результаты измерений. Примером таких способов могут служить определения скорости осаждения частиц в воде и метод просеивания.

При более сложных экспериментах получаются такие результаты, по которым трудно судить о самом размере. Сложная измерительная техника позволяет получать сравнимые результаты, но от них уже нельзя перейти к понятию размера или к другой первичной концепции. Поэтому нужно вначале решить, является ли предметом эксперимента сама концепция или цель его состоит в том, чтобы найти какие-то различия, не всегда поддающиеся интерпретации. Вторая цель гораздо легче достижима, но результаты соответствующего эксперимента значительно труднее осмысливать.

4.3. ИЗМЕРЕНИЕ РАЗМЕРА ЗЕРЕН ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Размеры зерен осадочных пород определяются для того, чтобы понять процессы, приводящие к образованию этих пород. Подобные попытки реконструировать условия образования осадков путем измерения размеров частиц, их составляющих, предпринимаются довольно часто. Определения проводят в основном косвенными методами, так как размеры неправильных по форме частиц практически трудно измерить непосредственно. В большинстве случаев при этих попытках изучают поведение частиц в условиях, предположительно сходных с природными. В основе многих применяющихся сейчас процедур лежит осаждение зерен кварца в воде или воздухе. Разработана методика измерения скорости осаждения частиц и посредством какой-либо модели, например закона Стокса, переводят значение этой скорости в величину зерен. Подобные процедуры обычно состоят из двух стадий: 1) образец породы (или совокупность) дезинтегрируют на составляющие компоненты (или элементы) и 2) полученные таким образом частицы (элементы) измеряют. Рекомендуем рассматривать обе эти стадии независимо, хотя в данных измерений зерен содержится суммарный эффект обеих стадий и одна из них редко оценивается независимо от другой.

4.4. ДЕЗИНТЕГРАЦИЯ ПОРОДЫ НА ЕЕ СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ

Степень консолидации осадочных пород различна. Несцементированные пески и глины отличаются от слабо сцементированных материалов, которые в свою очередь отличны от плотных и крепких песчаников, сланцев, алевролитов. В соответствии с этим существуют различные способы дезинтеграции пород. При поиске подходящей для данных пород процедуры дезинтеграции следует иметь в виду следующее.

Во-первых, надо иметь в виду, что основная цель анализа состоит в определении размера зерен, из которых состоит порода, для момента ее формирования с учетом способа ее формирования. Эта цель редко достигается. Многие исследователи были бы рады, если бы они достигли более ограниченной цели, т. е. смогли бы измерить размер зерен в том виде, в каком эти последние слагали породу. К сожалению, даже этой цели также трудно достигнуть, так как в измерении размера зерен в той или иной степени заключен эффект способа, который был использован для дезинтеграции породы на составные части. Еще более ограниченная цель, которая обычно и достигается, состоит в измерении зерен, или элементов, как функции, зависящей от взаимодействия методики дезинтеграции и специфики самой породы. Попытки интерпретировать получаемые при этом результаты в качестве относящихся к размеру зерен обычно оказываются бесплодными. Тем не менее, если задача состоит лишь в сравнении двух образцов или серий образцов друг с другом без попытки объяснить выявившиеся различия, эта процедура вполне приемлема.

Во-вторых, чтобы принятый способ дезинтеграции был эффективным, он должен строго соответствовать составу и структуре анализируемой породы. Конечно, не существует каких-либо проблем дезинтеграции рыхлых или полуконсолидированных пород. Полной дезинтеграции, в процессе которой не нарушился бы размер отдельных частиц, можно достигнуть очень просто. Чем выше степень консолидации, тем грубее способы обработки пород, которые сведены в следующую схему [1]:

1. Растирание пальцами.
2. Легкое растирание в воде (если необходимо, то в теплой).
3. Продолжительное встряхивание в сосуде с водой (с кипячением или без кипячения).
4. Легкое растирание пестом с резиновым наконечником в фарфоровой ступке.
5. Дробление в металлической ступке металлическим пестом.

Эти способы представляют различные физические процедуры дезинтеграции пород, причем при более грубых способах увеличивается вероятность нарушения первоначальных размеров частиц. Поэтому нужно всегда стараться использовать наименее грубый способ, достаточный для дезинтеграции данной породы.

Естественно, что консолидированные породы гораздо труднее дезинтегрировать без риска изменить размер их частиц. Тип консолидации зависит от двух групп основных компонентов, присутствующих в осадочных породах, и, к сожалению, влияние обоих этих компонентов обычно выражается лишь в суммарном эффекте.

Одна группа компонентов представлена цементом, дезинтеграция которого обычно производится путем либо растворения, либо механического разрушения. Очевидно, что растворившиеся компоненты цемента уже не будут влиять на последующие измерения размеров цементируемых частиц. Но следует также помнить, что цемент, обычно состоящий из кристаллов, в период формирования породы был в каком-то другом состоянии. Следовательно, если нужно определить размер зерен в момент их осаждения, то цементом можно пренебречь, и его разрушение никоим образом не осложнит решение поставленного вопроса. Но, если нужно узнать размер зерен для настоящего момента, необходимо учесть некоторые данные о количестве и способе распределения цемента. В этом случае разрушать и удалять цемент нельзя.

Для цемента осадочных пород характерен различный его состав. Наиболее обычен карбонатный и кремнистый цемент. Довольно часто в роли цемента могут выступать сульфиды, например пирит или пирротин. Не менее обычным цементом являются сульфаты, а также фосфатные или органические вещества. Все эти типы цемента обычно удаляются с помощью растворения. Карбонаты почти всегда растворяются в слабых кислотах, доломит (сложный карбонат магния и кальция) довольно полно растворяется в теплом слабом растворе соляной кислоты. Иногда используют более слабые кислоты, например слабый раствор щавелевой кислоты. Такие растворители применяются в том случае, если предполагается, что в составе обломочного материала имеются остатки диатомовых водорослей, радиолярий и кремнистых фораминифер, которые можно разрушить более сильными растворителями.

В большинстве разновидностей граувакковых пород и, вероятно, во многих других породах цементом служит сложный карбонат типа анкерита. В составе его имеются ионы кальция, магния, железа, марганца и, вероятно, других металлов. Наиболее подходящими растворителями для таких пород будет теплый раствор щавелевой кислоты, который отвечает двум требованиям: растворяя карбонат, он одновременно переводит железо в раствори-

[1] Детально эти способы описаны во многих руководствах по осадочным породам; см., например, работы [249] и [300].

мую закисиую форму. Многие очень крепкие горные породы, сцементированные сложным карбонатом, растворяются только так.

Сульфиды, обычно представленные пиритом, разрушаются в теплом растворе азотной кислоты, пирротин можно удалить раствором соляной кислоты; сульфаты кальция растворяются в соляной кислоте, гипс — в теплом концентрированном, а ангидрит — в слабом растворе, для сульфата бария (барит) требуется горячий концентрированный раствор серной кислоты, а для фосфатов — подогретый раствор азотной кислоты; цемент, состоящий из органического материала, можно удалить четыреххлористым углеродом, ацетоном или спиртом.

Цемент, наиболее неблагоприятный для обработки, конечно, кремнистый; по всей вероятности, он присутствует в небольших количествах в большинстве разновидностей консолидированных пород. Для растворения кремнистого цемента иногда рекомендуются горячие сильные кислоты. Но эти реагенты почти наверняка будут воздействовать и на зерна обломочного материала породы, вследствие чего этими кислотами следует пользоваться только в качестве последнего средства. Существуют различные способы дезинтеграции стойких пород с помощью насыщения их жидкостями и последующей кристаллизации этих жидкостей, но они не дают нужного эффекта. По другим способам породы насыщают водой, затем замораживают и оттаивают. При некоторых способах предусмотрено насыщение пород раствором либо гипосульфита натрия плюс последующая кристаллизация, либо бикарбоната кальция с добавлением слабого раствора кислоты, предназначенного для разрушения породы.

Вторая группа цементирующих компонентов. обычная для аркозовых и граувакковых [1] песчаников, в основном представляет собой мелкозернистый агрегат таких минералов, как кварц, слюда, хлорит и минералы из группы глин — в основном каолин, иллит и монтмориллонитоиды. Этот агрегат называется *матрицей породы*. Обычными компонентами матрицы являются также гидроокислы алюминия и железа. Разработана серия методов для разрушения пород с различными минеральным составом матрицы. При попытке дезинтегрировать такие породы мы сталкиваемся с теми же трудностями, которые возникают при разложении глин или илов на их составные компоненты. Совершенно очевидно, что в таком случае измеренная величина частиц будет функцией способа дезинтеграции, а характер распределения частиц в более мелкозернистых осадках, получаемый в результате эксперимента, в действительности окажется мерой эффективности способа дезинтеграции.

Таким образом, необходимость дезинтеграции матрицы мелкозернистых осадочных пород представляет собой серьезное препятствие для полного анализа распределения зерен разного размера. В данном случае нашей целью должно быть уже не определение размеров зерен в период их осаждения и обычно даже не определение размеров зерен в современной породе, а нечто другое. Тем не менее часто бывает необходимо дезинтегрировать как матрицу песчаников, так и более мелкозернистые породы. Во-первых, это нужно для оценки других частиц обломочного материала, а во-вторых, для разделения породы на фракции в целях последующего минералогического анализа. Для этих операций не устанавливается каких-либо специфических задач. Нужно иметь в виду лишь два обстоятельства: 1) Необходимо стандартизировать используемые приемы и сравнивать результаты, например, сравнивать скорости осаждения дезинтегрированного материала или размеры зерен, вычисленные по скоростям осаждения. Любые различия в результатах анализа трудно интерпретировать однозначно, так как различия в скорости осаждения могут быть обусловлены или первичными раз-

[1] Вся петрографическая терминология дается по Крынину [270].

личиями минерального состава породы, связанными в той или иной степени с разницей в размере зерен, или различиями в характеристике показателей химической породы осадка, таких, например, как значение pH, тип оснований или способность к обмену оснований. 2) Пытаясь дезинтегрировать мелкозернистую породу до такой степени, чтобы можно было высвободить ее мельчайшие компоненты, приходится пользоваться наиболее эффективными способами дезинтеграции, т. е. очень грубыми способами обработки пород. Но в таком случае будет совершенно невозможно интерпретировать результаты измерения зерен.

Мы примем два способа: 1) будем обрабатывать матрицу породы так же, как цемент, но с единственной целью — дезинтегрировать породу, не обращая при этом внимания на то, какой эффект окажет сам процесс разрушения породы на матрицу песчаников или на мелкозернистые осадочные породы; 2) в случае изучения тонкозернистых пород, особенно из группы глин, цель исследований сведется лишь к сравнению результатов экспериментов с использованием строго стандартизированных методов дезинтеграции пород.

Глина, погруженная в воду, распадается на положительно и отрицательно заряженные частички — мицеллы. Реакцию можно изобразить в таком виде:

$$\text{H глина OH} \rightleftarrows \text{H}^+ + (\text{глина})\,\text{OH}^-$$

$$\text{H глина OH} \rightleftarrows \text{H}\,(\text{глина})^+ + \text{OH}^-$$

Любой метод обработки, который будет усиливать процесс ионизации, можно считать способствующим быстрому и полному разрушению породы. Катионы являются здесь более важными в объемном отношении, но роль анионов не вполне ясна.

Было обнаружено, что процесс образования катионов усиливается при добавлении какой-нибудь натриевой соли. Ионы натрия увеличивают степень дисперсности значительно сильнее большинства других ионов. В общем виде это объясняется следующим образом.

При добавлении соли натрия в раствор соответствующей концентрации глина насыщается едким натром, т. е.

$$\text{NaOH} + \text{H глина OH} \rightleftarrows \text{Na}\,(\text{глина})\,\text{OH} + \text{HOH},$$

и поэтому она легче ионизируется, чем та глина, которая помещена в простую воду. В общем при насыщении натрием можно добиться наиболее тонкой дисперсности глины по сравнению с другими основаниями [1].

Приведенный пример чрезвычайно сильно упрощен. Было обнаружено, что NaOH — сильно ионизирующее основание — не самый эффективный пептизатор; эффект приносит сочетание сильного основания со слабыми кислотными радикалами. Такое сочетание наиболее благоприятно для ионного обмена. Практически оно достигается использованием карбоната натрия и оксалата натрия как наилучших пептизаторов для дисперсирования пород. Вообще растворы с сильным основанием (обычно натрий) и слабой кислотой (обычно органической) наиболее пригодны для обработки природных глинистых материалов.

Однако это сочетание нельзя считать самым лучшим, так как на практике, особенно для обработки глинистых буровых растворов, состоящих из глины и воды, наиболее эффективным оказывается сочетание натриевого фосфата и натриевого танната. Поэтому в качестве наиболее эффективного дисперсатора можно рекомендовать раствор, содержащий сильное основа-

[1] Реже применяются анионы лития и хрома, однако для них требуются более точные концентрации, а соответствующие реакции более трудно контролировать.

ние, слабую кислоту и крупные кислотные анионы. Причины этого не вполне ясны, но, по-видимому, они объясняются особенностями катионного и анионного обменов. В некоторых специфических случаях, например при насыщении глин кальцием и магнием, образуются крупные анионы комплексных солей этих металлов, препятствующих реакции между ионами кальция и системой вода — глина. Частички глины, насыщенные едким кальцием, собираются у контакта с водой и такая обработка необходима для достижения наиболее полной дисперсности материала.

Реагенты, обеспечивающие дисперсность, обычно называются *пептизаторами*, а реагенты, дающие обратные эффекты, или флоккуляцию,— *коагуляторами*. Следует помнить, что характер реагента зависит от степени его концентрации, так как любой пептизатор будет действовать как коагулянт, если достаточно повысить его концентрацию. Практически обычно получают взвесь глины в воде, в которую затем добавляют пептизатор в определенном объеме и определенной концентрации. Для более полной взвешенности и лучшей дисперсности рекомендуется поместить суспензию глины в воду, содержащую пептизатор, на механический вибратор, где и держать ее то или иное время.

При исследованиях величины зерен наиболее часто применяемыми пептизаторами являются нашатырный спирт и оксалат натрия. Первый из них умеренно эффективен как пептизатор и легко испаряется при последующем нагревании образца. При использовании второго следует учитывать вес пептизатора для расчета весовых процентов анализируемого материала (табл. 4.2).

В заключение следует заметить, что в большинстве случаев консолидация осадочных пород обусловлена несколькими различными факторами. Почти всегда имеется как цемент, так и основная масса. Небольшая примесь кремнистого цемента в тонкой глинистой основной массе столь же эффективно связывает частицы, сколь это достигается большим количеством кремния в почти чистых кварцевых песчаниках. Вследствие диагенетических изменений, степень которых увеличивается с возрастом породы, а также связанных со складчатостью, происходит перекристаллизация и перераспределение частиц цемента сложного состава и, возможно, также материала основной массы. Если точный состав цементирующего материала неизвестен, нельзя дать какого-либо рецепта для способа дезинтеграции породы. Рекомендуем изучить породу в шлифе под микроскопом с целью определения состава связующего материала, затем в соответствии с результатами этого изучения наметить тот или иной способ дезинтеграции.

В случае если факторы, обусловливающие консолидацию, неизвестны, приходится действовать только путем подбора способа, но начинать нужно с наименее грубых и затем переходить к более грубым. Кроме того, следует по возможности использовать механические способы дезинтеграции, так как эффект их применения определяется более четко. В большинстве случаев для дезинтеграции пород древнее мезозойских необходимо последовательно повторять комбинацию механических и химических методов. Часто довольно значительно консолидированные граувакки и аркозы можно дезинтегрировать путем обработки слабым теплым раствором щавелевой кислоты с последующим легким дроблением.

Следует помнить, что какой бы способ дезинтеграции ни был выбран, размер зерен, несомненно, будет нарушен. Возможное решение проблемы сводится, вероятно, к проведению специальных экспериментов с целью определения эффекта каждого из методов дезинтеграции. Такой подход к решению ее представляется, безусловно, плодотворным, но подобные попытки пока остаются еще очень редкими (см. гл. 19). Геологов более привлекает, вероятно, измерение зерен в шлифах, что и можно делать, но в тех случаях, когда порода не поддается дезинтеграции. В некоторых случаях,

Таблица 4.2

Форма таблицы для расчета распределения частиц в весовых процентах по методу пипетки

(Каталог лабораторных инструкций под ред. Розенфельда)

(а) Вес сухого материала ——— *г*, Т ——— °С, проба № ———

Пределы размеров частиц, ф	Глубина, *см*	Время осаждения при Т ——— °С уд. вес ——— / *час мин сек*	Дата и время начала опыта	Лабораторный стакан №	Вес сухого стакана	Вес стакана + вес пробы, высушенной до постоянного веса	Вес пробы	(*b*) Минус пептизатор	(*b*) ×50	$\left(\frac{b}{a}\right)$ Кумулятивный процент меньше чем
Меньше 4,0	20									
» 4,5	20									
» 5,0	10									
» 5,5	10									
» 6,0	10									
» 6,5	10									
» 7,0	10									
» 7,5	10									
» 8,0	10									
» 8,5	10									
» 9,0	10									
» 9,5	10									
» 10,0	10									
» 10,5	5									
» 11,0	5									

Примечание (реагент, используемый для диспергирования, его состав и количество; процедура диспергирования и т. д.): ———

Аналитик ——— Дата ———

Предлагаемая лабораторная инструкция заимствована из учебной программы «Каталог лабораторных инструкций» (под ред. М. А. Розенфельда), используемая студентами-седиментологами старших курсов Пенсильванского университета.

например в случае кварцитов с кремнистым цементом, шлифы остаются единственным способом, однако этот способ ни в коем случае нельзя считать панацеей, так как он обладает рядом недостатков (см. раздел 4.9).

4.5. ИЗМЕРЕНИЕ ЗЕРЕН

Известны многочисленные практические приемы или способы измерения величины зерен дезинтегрированной породы. Каждый из этих способов обладает не только определенными специфическими преимуществами, но

и недостатками, так как каждым из них можно успешно пользоваться лишь в каких-то определенных условиях. Горные породы, к сожалению, лишь очень редко удовлетворяют тем требованиям, которые требуются для того или иного способа. Поэтому все они основаны на каком-то компромиссе между теоретическими требованиями и практическими трудностями, возникающими при выполнении этих требований. Детальное описание различных способов измерений можно найти в известных руководствах (например, в работах [85, 248, 300]), и поэтому вряд ли целесообразно рассматривать их здесь полностью.

Измерение размеров зерен осадочных пород не самоцель, а лишь средство для достижения другой цели. Считается, что, изучая размер зерен и интерпретируя результаты измерений, можно познать процесс седиментации, т. е. размер зерен отражает способ образования породы. Так как большая часть породы образовалась путем седиментации в водной среде, применяются такие способы измерения зерен, которые отражают поведение частиц в воде. Положительные и отрицательные стороны нескольких методов такого рода будут подчеркнуты при описании одного широко известного метода — метода пипетки. Ввиду того что недостатки метода пипетки свойственны и другим сходным методам, его описание применимо по существу ко всем «мокрым» методам.

Метод пипетки применяется лишь для зерен, размеры которых менее 50 *мк*. При более крупных зернах обычно пользуются просеиванием. В тех случаях, когда породу нельзя дезинтегрировать без нарушения размера составляющих ее зерен, целесообразно применять способы, не требующие дезинтеграции. Возможный выход из положения для таких пород состоит в измерении зерен в шлифах. Наиболее прямые способы — измерение диаметров свободных зерен дезинтегрированной породы — применяются гораздо реже, чем это можно было бы ожидать, если иметь в виду их теоретические и практические преимущества. Четыре таких основных способа рассмотрены в данной главе.

Определение размеров составных частей полидисперсной гетерогенной поликомпонентной системы представляет собой очень трудную проблему. Поэтому нельзя ожидать, что любой способ может удовлетворить всем требованиям и что с его помощью можно полностью определить всю систему. Следовательно, неизбежно применение нескольких способов, каждый из которых способен обеспечить решение какой-то определенной части столь сложной задачи, как определение размеров поликомпонентных природных материалов. Если поликомпонентность материала не признается, все же не следует применять способы, годные в основном для исследований простых систем, т. е. состоящих из немногих компонентов, так как этот путь приводит к наиболее неправильным результатам интерпретации измерений размеров зерен осадочных пород.

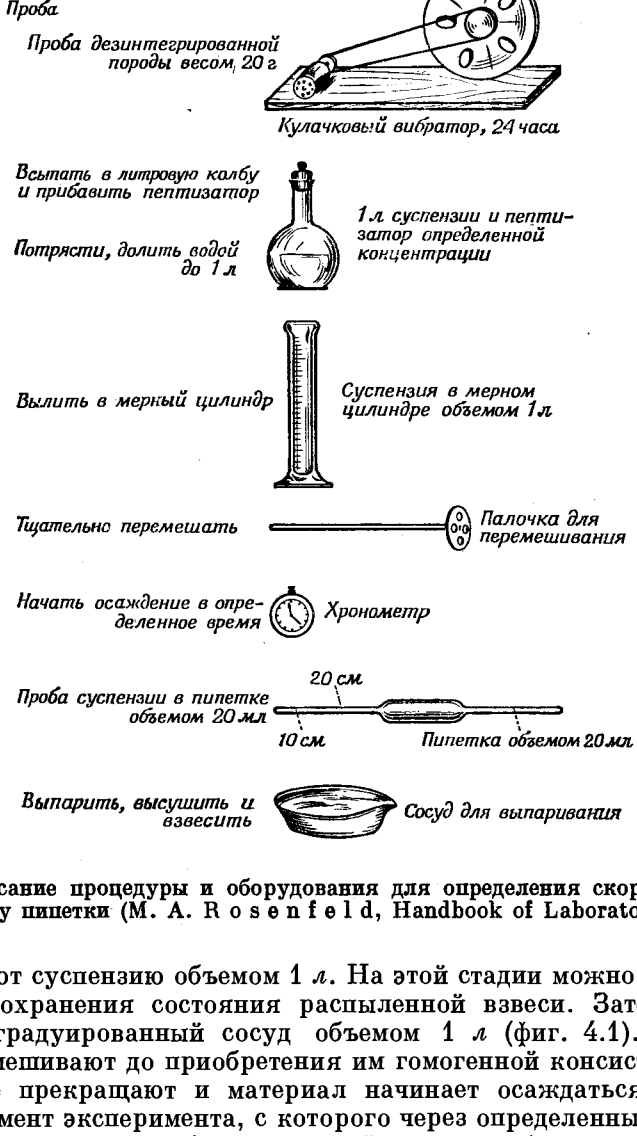
4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЗЕРЕН МЕТОДОМ ПИПЕТКИ

Метод пипетки — один из многих методов, применяющихся для определения размеров зерен дезинтегрированной породы путем осаждения их в воде. Он сравнительно прост, необходимая аппаратура есть почти во всех лабораториях, контроль в процессе эксперимента, по крайней мере в случае зерен некоторых размеров, довольно прост, работы может выполнять персонал средней квалификации. Суть его состоит в определении скорости осаждения зерен в воде, поэтому с первого взгляда может показаться, что эти условия весьма сходны с естественными условиями седиментации. Все это обеспечивает широкое применение рассматриваемого способа.

До начала измерений породу необходимо разделить на составные части. Соответствующие способы разделения уже рассматривались. Следует под-

черкнуть, что термин «составные части» является функцией способа, принятого для разделения породы. Колебания в результатах измерений, зависящие от различных способов разделения, будут учтены при окончании измерений.

Практически операция проведения измерений состоит в следующем. В 1 *л* дистиллированной воды всыпают 20 *г* дезинтегрированной породы



Фиг. 4.1. Описание процедуры и оборудования для определения скорости осаждения частиц по методу пипетки (M. A. Rosenfeld, Handbook of Laboratory Instructions).

и приготовляют суспензию объемом 1 *л*. На этой стадии можно ввести пептизаторы для сохранения состояния распыленной взвеси. Затем суспензию выливают в градуированный сосуд объемом 1 *л* (фиг. 4.1). Взвешенный материал размешивают до приобретения им гомогенной консистенции. Затем размешивание прекращают и материал начинает осаждаться. Это и есть начальный момент эксперимента, с которого через определенные промежутки времени с определенной глубины пипеткой начинают брать пробы суспензии объемом 20 *мл*, которые выпаривают досуха. Вес осадка после высушивания представляет собой концентрацию материала в 20 *мл*. Так как первоначальная концентрация суспензии равна 20 *г* на 1000 *мл*, то вес осадка в последовательно взятых пробах, равных 20 *мл*, представляет собой его количество в весовых процентах, присутствующее на фиксированной глубине через

определенный промежуток времени. Форма заполнения журнала данными измерениями приведена в табл. 4.2 и 4.3 [уравнение (4.1)]. Теоретически

Таблица 4.3

Пример регистрации времени осаждения и глубины взятия проб по методу пипетки (при 760 *мм рт. ст.*)

(Каталог лабораторных инструкций под ред. Розенфельда)

Пределы размеров частиц, ф	Размер частицы, (*мк*)	Глубина, *см*	Время осаждения при T 20° С, уд. вес 2,65		
			час	*мин*	*сек*
Меньше 4,0	62,5	20			58
» 4,5		20		1	56
» 5,0	31,2	10		1	56
» 5,5		10		3	52
» 6,0	15,6	10		7	42
» 6,5		10		15	
» 7,0	7,8	10		31	
» 7,5		10	1	1	
» 8,0	3,9	10	2	3	
» 8,5		10	4	5	
» 9,0	1,95	10	8	10	
» 9,5		10	16	21	
» 10,0	0,98	10	32	42	
» 10,5		5	32	42	
» 11,0	0,49	5	65	25	

[См. уравнение (4.1).]

все частицы должны начать осаждаться сразу же по получении суспензии, но экспериментами было установлено, что в практике это несильно проявлено и обеспечение гомогенной суспензии к началу опыта вполне достаточно [335].

В основе данного способа лежит простой принцип: если две частички начали опускаться одновременно, то бóльшая осядет быстрее меньшей. Следовательно, в пипеточных пробах, отбираемых через последовательные промежутки времени, будет содержаться все меньше и меньше грубых частиц. Таким образом, каждая проба является пропорцией в весовых процентах какого-то количества частиц размером меньше некоторого определенного размера (табл. 4.3).

Скорость осаждения пересчитывается на величину зерен посредством модели, основанной на законе Стокса. Способ применения этого закона описан в работах Крамбейна и Петтиджона [248] и Далла Валле [85]. Вычисления производят по формуле

$$V = \frac{2}{9} \frac{(d_1 - d_2)\, gr^2}{\eta}, \qquad (4.1)$$

где V — скорость, или степень осаждения, *см/сек*, d_1 — плотность материала частиц, *г/см*^{3}, d_2 — плотность жидкости, *г/см*^{3}, g — ускорение силы тяжести, *см/сек*^{3}, r — радиус частиц, *см*, η — вязкость жидкости, *пуаз*.

Обычно исходят из того, что практически главный компонент осадочных пород — кварц. Поэтому $d_1 = 2{,}65$. Осаждение происходит в воде, т. е. $d_2 = 1{,}00$. Для любого данного эксперимента температура, давление и местоположение остаются одними и теми же, откуда следует, что величина η постоянна и равна 0,01 *пуаз* (при 20° С и нормальном атмосферном давлении). Ускорение силы тяжести обычно принимается равным 980 *г/см*^{3}. Таким обра-

зом, формула (4.1) упрощается до

$$V = \frac{2}{9} \frac{(2{,}65 - 1{,}00)\, 980 r^2}{0{,}01}, \qquad (4.2)$$

или

$$V = Cr^2,$$

где $C = 3{,}59 \times 10^4$ при 20° С и атмосферном давлении.

При данном способе скорость зависит от двух переменных — расстояния и времени. Принято использовать расстояния в 20 или 10 *см*, отмеченные на пипетке. Интервалы времени бывают различными. Подставляя в уравнение искомые размеры для r, можно установить интервалы времени для взятия проб. Например, зерно кварца диаметром 31,2 *мк* (5ф) будет проходить отметку 10 *см* через 1 *мин* 56 *сек*, так что проба, взятая на этой глубине, через указанный промежуток времени теоретически должна состоять только из частичек диаметром меньше 31,2 *мк*. На табл. 4.3 указаны интервалы времени и размеры зерен кварца, но вообще желательно установить условия данного опыта, в частности учесть дневные изменения температуры в лаборатории и вычислить указанные значения для данных условий. Рекомендуется по возможности использовать аппаратуру, обеспечивающую постоянную температуру, так как в большинстве случаев в лабораториях перепад температуры в течение дня довольно велик, а время осаждения частицы диаметром 1 *мк* до глубины 20 *см* составляет около 8 *час*.

Окончательный результат выразится в виде кумулятивного распределения в весовых процентах какого-то количества частиц, размером «меньше чем» определенный размер или «грубее чем...», если каждое значение весовых процентов мы будем вычитать из 100.

4.7. ОГРАНИЧЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ В ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПИПЕТКИ

Очевидно, что рассматриваемый способ также имеет какие-то ограничения и что он основан на определенных допущениях, которые должны быть четко сформулированы, чтобы мы могли правильно интерпретировать полученные результаты. Уже указывалось, что результаты в какой-то мере будут зависеть от способа дезинтеграции. Полнота дезинтеграции и дисперсности особенно большое значение имеет для мелкозернистых пород, содержащих большое количество глинистых частиц, так что результаты измерений, которые производят в случае глин и глинистых сланцев по существу исключительно способом дезинтеграции, слабо отражают либо вовсе не отражают ни первоначальный размер частиц в момент осадконакопления, ни тот, который был им свойствен до их обработки в процессе дезинтеграции. Тем не менее, если способы обработки стандартизированы, результаты анализа можно успешно использовать для достижения третьей цели — для сравнения разных пород по размерам зерен. Следует, однако, отчетливо представлять, что получаемые при опыте различия нельзя относить только за счет собственно размера зерен. Эти различия могут обусловливаться также дифференцированным поведением частиц разного состава при обработке.

Если мы допустим, что эффект дезинтеграции незначителен, все равно остается ряд других ограничений, связанных, в частности, с возможностью применения закона Стокса. Весьма важно знать пределы размеров частиц, к которым этот закон применим. Частицы могут быть настолько малыми, что под воздействием броуновского движения молекул они будут оставаться во взвешенном состоянии неопределенно долго. За нижний предел размера частиц свободно осаждающихся систем можно принять 0,5 *мк*. Скорость осаждения таких частиц чрезвычайно мала, так что эксперимент может

длиться несколько дней. В таких случаях во избежание возникновения конвекционных течений в суспензии необходимо на время опыта обеспечить более или менее постоянную температуру. Время опыта можно сократить, уменьшив путь осаждения, т. е. брать пипеточные пробы на глубине, например, 5 *см*.

Грубые частицы диаметром несколько миллиметров при падении создают турбулентные явления за счет очень большой скорости. Отсюда появляется и верхний предел, который теоретически равен 50—70 *мк* [248]. За верхний предел обычно принимают диаметр частиц, равный 50—55 *мк*. Некоторые теоретические ограничения этого способа и сравнение вычисленных диаметров с экспериментально определенными прямыми способами рассмотрены Невином [308].

Помимо ограничений, связанных с размером частиц, существуют многочисленные другие ограничения для применения закона Стокса. Пытаясь выполнить все требования этого закона, мы столкнулись с рядом проблем, анализу которых посвящено много работ. Чтобы избежать наиболее очевидных трудностей, было предложено несколько альтернатив. С их помощью для простых систем был достигнут определенный успех. Превосходный анализ различных вариантов способа и их достоинств и недостатков дает Крамбейн [248]. Попытка рассмотреть этот способ на широкой теоретической основе принадлежит Невину [308]. Следует иметь в виду, что по рассматриваемому вопросу есть две крайние точки зрения: согласно первой, нужно создать такую теоретическую модель, которая могла бы обеспечить надежное измерение частиц; согласно второй, необходимо провести стандартизацию техники опыта и методов сравнения результатов. Например, Дуглас [99], который игнорирует действие размера частиц на скорость их осаждения, предлагает проводить опыт в мерном цилиндре длиной 6 футов, взвешивать осадок, накапливающийся на дне цилиндра через определенные промежутки времени и калибровать скорости осаждения независимо от отклонений от идеальной модели. Результаты такого опыта, строго говоря, не будут иметь отношения к определению размера и их нельзя будет интерпретировать относительно размеров зерен. Однако они представляются вполне пригодными для сравнения различных образцов друг с другом, хотя физический смысл различий, устанавливаемый опытом, остается не вполне ясным.

Почти все попытки усовершенствовать теоретическую модель оказались безуспешными и, как это часто бывает, более строгий метаматический подход приводил лишь к бóльшим отклонениям от реальный условий. Пытались, например, оценить эффект влияния формы зерен на скорость осаждения. Проводили специальный анализ этих взаимоотношений, результаты которого проверяли экспериментальными определениями скорости осаждения частиц, имеющих форму шара, палочки, пластинки и т. д. Были высчитаны поправочные коэффициенты, вводимые на отклонение формы от сферической. В осадочных породах форма частичек кварца значительно отклоняется от сферической. Оказалось, что степень сферичности, измеренная одним из способов, находится в пределах от 0,5 до 1,0 [82]. Известно, что частицы слюды отличаются плоской формой. В этом случае, если относительное количество слюды в породе известно, с помощью поправочного коэффициента можно учесть эффект влияния формы частиц. Однако количество слюды в породе редко определяют и очень сомнительно, чтобы, к примеру, наличие 5% примеси слюды делало необходимым введение специального поправочного коэффициента. В тоже время два минерала (кварц и слюда), рассматриваемые по форме, являются взаимоисключающими, и пользование поправочным коэффициентом здесь вполне правомочно; оно приведет к получению несколько лучших результатов. В большей части горных пород содержатся обломки сланцеватых пород. Форма их меняется от пластинчатой, как у слюды, до округлой с разной степенью сферичности, как у кварца.

В то же время их размер и состав различны, т. е. форма не зависит от состава, чего нельзя сказать о кварце и слюде. В общем случае все три показателя — форма, размер и состав — взаимозависимы и в то же время взаимонезависимы, как это уже подчеркивалось выше (гл. 3). Взаимозависимые факторы подобного рода обусловливают сложные взаимоотношения и никаким постоянным поправочным коэффициентом нельзя учесть все возможные вариации, что является наиболее важным препятствием, которое не преодолевается ни в одном из применяемых способов. Эффект, обусловленный этими сложными взаимоотношениями, трудно оценить аналитически, и до сих пор его не пытались выявить эмпирическим путем.

Таким образом, основной недостаток метода пипетки состоит в том, что полученные по этому способу «размеры» частиц в действительности отражают сложные взаимоотношения, существующие между тремя взаимозависимыми свойствами, т. е. $P = f(m, s, sh)$.

Все «мокрые» способы анализа страдают этим недостатком и практически ни один из них не лучше другого. Поэтому выбор того или иного способа — вопрос вкуса и убеждений исследователя. Рассмотренный нами способ легко поддается контролю, т. е. обеспечивает высокую точность.

4.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА ЧАСТИЦ СИТОВЫМ АНАЛИЗОМ

Осаждение в воде обычно считают неподходящим способом в том случае, если частицы породы имеют диаметр, превышающий 50 *мк*. Правда, иногда этим способом пользуются для значительно более грубых частиц [99]. По скоростям осаждения можно вычислить размеры частиц с помощью модели, основанной на законе Стокса по модифицированной формуле Уоделла, или закона ударяющихся частиц, или с помощью эмпирически установленных эталонов. Полученные по разным пересчетам результаты можно сравнить. Результаты опытов не всегда легко интерпретировать относительно «размера», но их всегда можно использовать как основу для сравнения различных пород.

Альтернативный «сухой» способ, который, вероятно, наиболее популярен, состоит в просеивании дезинтегрированной породы. Процедура заключается в том, что навеску дезинтегрированной породы весом 100—150 *г* просеивают через несколько сит, начиная с наиболее грубого и кончая наиболее тонким [248, фиг. 33, стр. 139]. Остатки пробы на каждом сите взвешивают и записывают по форме табл. 4.4. Результаты анализа выражаются в весовых процентах, соответствующих интервалу размеров между двумя соседними ситами.

Сита обычно бывают латунными с дном, затянутым сеткой из тонкой проволоки. Сетка имеет квадратные отверстия соответствующего размера, которые и служат стандартом. В США стандарты сеток включают набор от 325 меш (диаметр одной ячеи равен 44 *мк*) до 1 меш (диаметр — 25,4 *мм*). Отношение диаметров ячей любой пары соседних по размерам ячей сеток равно $4\sqrt{2}$. Для осадочных пород обычно пользуются сетками диаметром ячей от 62,5 *мк* до 2 *мм*.

Было установлено, что для работы с ситами наиболее хорошие результаты дают механические вибраторы [422]. К их числу относится вибратор Ротап. Последним и пользуются в большинстве лабораторий. Наиболее эффективное время вибрации и просеивания составляет 15—25 *мин*. Такой промежуток времени представляется критическим, так как при более длительном процессе просеивания начинается истирание частиц и сит (после 20 *мин*), при более коротком — не происходит полной сепарации (закон уменьшения выхода). Естественно, что при большой навеске (более 100—150 *г*) некоторые частицы могут «не дойти» до дна сита.

Таблица 4.4

Форма таблицы для расчета и записей хода анализа определения размеров зерен методом просеивания

(Каталог лабораторных инструкций под ред. Розенфельда)

Аналитик _____ Ситовый анализ

Дата _____

Если грубый галечник:
вес первичной пробы (a) _____ $100\frac{b}{a}$ = _____ Зерна (%) размером
вес зерен, размером 4 *мм* (—2 ϕ) (b) _____ 4 *мм* (c)

Если обработано кислотой:
вес пробы до обработки (d) _____ $100\frac{c}{d}$ = _____ Вес нерастворимого
вес остатка (e) _____ материала, % (f)

Если профильтровано:
вес профильтрованной пробы (ff) _____ $100\frac{g}{ff} - m$ _____ Зерна (%) размером
вес остатка после фильтрования (g) _____ 0,044 *мм* (4,5 ϕ) (h)

Вес в ситах (j) _____

Меш	Первичный вес (m)	Процент (n)	Исправленный вес (p) ($m-mn$)	$\frac{p}{q}$, %	Вес нерастворимого остатка, %	Вес всей пробы, %	Кумулятивный вес, %
5							
10							
18							
20							
25							
30							
35							
40							
45							
50							
60							
70							
80							
100							
120							
140							
170							
200							
230							
270							
325							
P							

Всего _____ (k)

Потери _____ ($j-k$) _____ (q) _____ _____ _____

Примечание (способ дезинтеграции, специфические затруднения, возникшие при выполнении данного анализа, другие замечания):

Практически в большинстве случаев возникает необходимость удалять тонкие частицы из породы, так как на более грубых сетках происходит их агломерация и они «забивают» отверстия на более тонких ситах. Для просеивания в сухом виде нижний предел размеров частиц осадочных пород составляет около 105 *мк*. Работа с тонким материалом труднее и, кроме того, она сопряжена с появлением значительных ошибок. Известно, что в промышленных условиях достигается последовательная сепарация гомогенных фракций с размером частиц до 5 *мк* и меньше.

Обычно считается, что для большинства частиц, особенно кварцевых зерен, поведение на ситах определяется в основном величиной их среднего диаметра. Вопрос этот рассматривали многие исследователи. Риттенхаус [355, 357] показал, что диаметры частиц, остающихся на любом сите, довольно разнообразны. В своих работах этот автор рассматривает многие трудности, которые возникают при использовании данного метода. Основная ошибка, по-видимому, обусловлена наличием слишком крупных ячей в тех ситах, с которых начинают просеивать. Воспроизводимость результатов просеивания песков изучал Уокер [442], установивший значительные расхождения в результатах повторных анализов одних и тех же пород в одной и той же или в различных лабораториях (см. также работу [13]).

Так же как и осаждение в воде, просеивание представляет собой компромисс между практическими возможностями и теоретической целью. Оба способа сопряжены с очень большим количеством ошибок. Одни из ошибок относятся к обычным для любых лабораторных исследований, их можно оценить и избежать с помощью соответствующих лабораторных операций. Другие же заключены в самой сути метода и от них нельзя избавиться никаким способом. Эти последние обусловлены следующим.

Во-первых, изучая один и тот же образец методами пипетки и просеивания мы характеризуем частицы с размерами от 1 до 50 *мк* и от 62,5 до 2000 *мк* соответственно, т. е. уже имеем разрыв в результатах, получаемых по обоим способам. Гриффитс [152], несмотря на этот разрыв, описал прием построения плавной кумулятивной кривой. Но этот прием остается лишь приемом для плавного графического изображения, который никоим образом не устраняет объективно существующего разрыва.

Во-вторых, некоторые особенности пород, влияющие на результаты, получаемые «мокрыми» способами, сказываются также при просеивании. Полученные значения «размера» отражают изменения трех взаимозависимых и взаимодействующих переменных $P = f(m, s, sh)$; влияние каждой из них нельзя оценить с помощью какого-либо поправочного коэффициента. Много раз пытались с помощью как теоретических расчетов, так и эмпирических определений внести поправку за изменение в форме зерен. Однако если эти три фактора взаимодействуют и взаимозависят, то уже один этот факт автоматически делает все подобные попытки безуспешными. Поправочные коэффициенты можно применять лишь к простым однокомпонентным системам, в которых колебания формы и размера незначительны.

Итак, при условии применения стандартной аппаратуры и стандартных приемов, результаты, полученные по способу просеивания, можно сравнивать но вряд ли приходится рассчитывать на успех, если мы захотим объяснить физический смысл результатов просеивания сложной поликомпонентной смеси.

4.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЗЕРЕН В ШЛИФАХ

Как уже указывалось (стр. 53), не все породы можно дезинтегрировать, не изменяя при этом размера их зерен. В случае прочных пород результаты как «мокрого», так и «сухого» осаждений будут отражать лишь эффективность процесса дезинтеграции. Крамбейн [241] предложил измерять зерна таких пород в шлифах. Этот способ можно рекомендовать и для всех других

пород. Возможность применения одной и той же методики для изучения всех пород — очень большое достижение.

Выбирают какой-либо минерал (обычно кварц) и измеряют диаметры сечений зерен или непосредственно под микроскопом, или при помощи специальных приспособлений, или на спроектированном изображении зерна. Для последней цели можно использовать микропроектор или проекционную камеру.

Длина оси сечения зерна чаще выражается в миллиметрах, иногда в микронах; эти значения можно сгруппировать и непосредственно изобразить на графике частоты встречаемости. В данном случае это будут не весовые проценты, а количества зерен.

Главнейшая трудность состоит здесь в определении того сечения, которое нужно замерить. По выше рассмотренным причинам (стр. 46) однозначное определение измеряемой оси необходимо. С этой целью выбирают длинную ось сечения зерна, но можно измерять и короткую ось спроектированного зерна и затем перпендикулярную ей длинную [149]. По-видимому, нельзя априорно узнать, чем одно сечение лучше другого, так как в каждом случае для измерений выбирают однозначно определяемые оси. Во всяком случае, по результатам измерений можно сравнивать различные породы. Еще раз отметим, что получаемые результаты не представляют абсолютных размеров и интерпретировать данные измерений в этом смысле нерационально.

В шлифах измеряют зерна породы, первичное сложение которой не нарушено. Результат измерения можно выразить в виде формулы

$$P = f(m, s, sh, o, p). \tag{4.3}$$

Если измеряются зерна одинакового минерального состава, величина m становится постоянной и формула примет вид

$$P = f(s, sh, o, p). \tag{4.4}$$

Неоднократно пытались оценить значение P как с помощью теоретических расчетов, так и эмпирически. Теоретические расчеты, по крайней мере применительно к данному способу изучения осадочных пород, представляются слишком наивными, так как, пытаясь оценить каждый фактор в качестве независимой переменной, мы отнюдь не способствуем решению всей проблемы. В литературе известна единственная попытка такого рода. Она принадлежит Крамбейну [241], который изучал пробу песчаников Сен-Питер. К сожалению, эта проба была единственной. К тому же песчаники Сен-Питер оказались кварцитами, представляющими только простейшие по составу осадочные породы.

Нужно твердо знать, что какая бы ось ни была выбрана для измерений, ее длина, полученная в результате эксперимента, является функцией размера и формы зерна, ориентировки зерен или ориентировки сечения шлифа, а также плотности заполнения зернами шлифа, т. е. упаковки. И вновь мы должны констатировать: так как размер и форма взаимосвязаны с ориентировкой и упаковкой, нельзя использовать какой-либо поправочный коэффициент для сепаратной оценки каждой из переменных. Для оценки точного эффекта влияния размера независимо от эффектов, вносимых другими факторами, необходимо эмпирически оценить эффекты всех четырех факторов, а также шести взаимодействий первого порядка, четырех — второго порядка и одного — третьего порядка.

В литературе можно найти многочисленные попытки сопоставить или калибровать результаты измерений в шлифах с данными, получаемыми по способу просеивания и (или) по другим способам. Какого-либо успеха при этом не было достигнуто, если не считать простейших идеализированных

примеров. Эмпирическая попытка такого рода [365] состояла в сравнении результатов измерений, полученных различными методами по каждому из 32 образцов, отобранных от трех различных типов пород. Анализируя эту попытку, можно заключить, что породы разного минерального состава нельзя изучать одним и тем же способом. Для пород простого состава, таких, как кварциты, различия между результатами оказались незначительными [136]. Но по мере усложнения состава резко увеличивалась и разница в результатах, полученных разными методами.

В заключение следует напомнить, что если сравнивают серию образцов с целью определить их различия, то для этого достаточно любой стандартной методики. Однако различная методика приносит и различную информацию: например, методом пипетки определяют пропорцию классов определенного «размера» в весовых единицах; в шлифах ту же пропорцию определяют по числу зерен; если же важнейшей переменной является размер зерен кварца, то ни осаждением в воде, ни просеиванием мы не получим значений, которые бы поддались смысловой интерпретации (естественно, что здесь не имеются в виду породы очень простого состава, например кварциты). В последнем случае рекомендуем измерять зерна в шлифах. С другой стороны, если нужно определить количество илистых частиц, независимо от их состава наилучший результат дает «мокрая» седиментация.

Значения, получаемые по всем рассмотренным методам, никоим образом нельзя относить к истинным размерам зерен, так как каждым способом определяется единая результирующая переменная, являющаяся сложной функцией трех или большего числа взаимодействующих переменных. Если нужно сравнить результаты, полученные способами просеивания и измерения в шлифах, лучше всего следовать эмпирическим путем. Теоретические расчеты для предсказания результатов экспериментальных анализов осадочных пород оказываются безуспешными.

4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПУТЕМ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ СВОБОДНЫХ ЗЕРЕН

Любой совершенный способ определения размеров должен удовлетворять ряду требований. Определение размеров зерен пород для момента их осаждения настолько сложно, что задача эта не решается с помощью лишь одного способа. Одно из требований состоит в том, что любой способ можно успешно применять к породам, значительно отличающимся по степени их консолидации, избегая при этом, по возможности, грубых и трудоемких процедур дезинтеграции. Другое требование основано на том, что минеральный состав является сложной переменной. Определение размеров зерен независимо от их состава и пропорций зерен различного состава не обеспечивает достижения поставленной цели, так как при этом будет определен лишь средний размер всех зерен. Если же зерна имеют разный состав, интерпретировать полученный средний размер будет трудно. Все рассмотренные способы в этом смысле оказываются несостоятельными. Отсюда второе требование заключается в необходимости упростить минеральный состав, т. е. найти метод, который можно применять к какому-то одному минеральному виду.

Способ определения размера в шлифах удовлетворяет обоим требованиям. К сожалению, объект изучения остается агрегатным, вследствие чего из-за зерен другого минерального состава наши измерения грешат ошибками. Наиболее трудно учитываемые факторы — ориентировка и плотность упаковки. Тем не менее эти факторы можно учесть с помощью правильно поставленного эксперимента и получить результаты более надежные по сравнению с результатами других способов. Если зерна кварца отделить от других компонентов, то, вероятно, можно достичь еще более лучших результатов.

Одна из основных трудностей дезинтеграции состоит в том, что на разные минералы этот процесс действует по-разному. Кроме того, получить 100- или даже 20-граммовые навески дело весьма сложное. Но мы сильно облегчили бы задачу, если бы могли использовать, скажем, 100 зерен минерала, не затронутых при дезинтеграции. Для такой цели весьма подходящими представляются зерна кварца. Далее, если мы игнорируем другие минералы, то их можно разрушать при дезинтеграции, что позволяет применять любые растворители, не реагирующие с кварцем. Таким образом, измерение свободных зерен, по-видимому, обладает рядом преимуществ.

Кроме того, при статистическом анализе рекомендуем пользоваться частотой встречаемости зерен, а не весовыми процентами. Для опыта достаточно всего 50—100 зерен. Получить же несколько десятков зерен из небольшого образца породы не составит труда. Исключение могут представлять только наиболее сильно консолидированные кварциты.

Изучая гомогенный материал, мы уже заранее можем допустить гомогенное распределение. Это допущение не соблюдается ни при одном способе, в котором не предусмотрена сложность минерального состава. Следовательно, как с точки зрения технического исполнения, так и выполнения требований, предъявляемых к анализам, рассматриваемый метод представляется вполне правомочным [12, 216].

Рассмотрим теперь вопрос о его теоретическом обосновании. Этот вопрос уже поднимался в гл. 3. При измерении свободных зерен мы получаем однозначные определения их величины, которые наиболее просто интерпретировать. В данном случае измеренное значение является функцией двух взаимодействующих переменных. Этот способ позволяет одновременно определять как величину, так и форму зерен. Величина длинной оси, измеряемая по данному способу, по-видимому, весьма близка к ее истинному значению. В большинстве случаев путем манипуляции положения зерна мы имеем возможность добиться получения максимальной оси его проекции. Таким образом, и теоретически данный способ представляется наиболее совершенным.

Наконец, для данного способа можно предложить с некоторыми допущениями модель интерпретации условий осадконакопления.

Здесь следует возвратиться к цели анализа размеров частиц. Геологически эта цель заключается в возможности представить условия седиментации по тому размеру частиц, каким он был в период осадконакопления. Допустим, что одновременно и параллельно в жидкости могут осаждаться только частички гидравлически эквивалентных размеров. Этот постулат был эффективно использован Руби [371] и Риттенхаусом [357], пытавшимися объяснить изменения относительных содержаний тяжелых минералов в осадочных породах.

Если исходить из этого постулата, то, обнаружив в обломочной породе частицу кварца вместе с какой-либо другой частицей, мы можем говорить о первичной гидравлической эквивалентности обеих частиц. Тем самым распределение размеров кварцевых зерен отражает распределение размеров всех других зерен осаждавшегося материала. Зная эффективную плотность материала и распределение размеров всех зерен, ассоциирующихся с кварцевыми, можно также выяснить закономерность распределения зерен, слагающих этот материал.

Таким образом, если в шлифе осадочной породы обнаружены совместно зерна кварца, обломки гранитного состава, глинистые частицы и обломки раковин, то на основании рассматриваемой модели можно предположить, что все они были гидравлически эквивалентны для какого-то момента времени и места отложения. Следовательно, их эффективные удельные веса были близкими, и если плотность обломков пород больше плотности кварца, эти обломки должны иметь меньший размер, поэтому более крупный обломок

раковины карбонатного состава по сравнению с кварцевым обломком будет иметь меньшую плотность, чем этот последний; глинистые частицы осаждались, вероятно, в виде сгустков. Если такую породу дезинтегрировать и затем выяснить распределение размеров зерен методом пипетки или просеивания, полученные результаты, очевидно, дадут совершенно неверную картину условий осадконакопления, так как частицы, ведущие себя одинаково, окажутся в разных по размеру классах. Если же отделить только кварцевые зерна, распределение их размеров будет отражать условия на месте их накопления. Результаты экспериментов, проведенных различными способами на гомогенном дезинтегрированном агрегате кварцевого состава, будут отличаться лишь по величине лабораторной ошибки (ошибки определений).

Оперируя с рассматриваемой моделью, мы, разумеется, исходим из ряда допущений.

Первое допущение. Модель основана на представлении о свободном осаждении зерен кварца. Но в породах, содержащих значительную примесь глинистого материала, например в субграувакках, а возможно, в некоторых аркозах и грауваккаx [1], глинистые частицы скорее всего будут образовывать сгустки, в которые включаются пылеватые частички кварца. Определить, какая именно часть породы будет осаждаться таким образом, можно только экспериментально. В таких крайних случаях, к которым относятся турбулентные течения и различного типа мутьевые потоки, условия осадконакопления резко отличаются от условий образования «нормального» детритуса, хотя и здесь гидравлическая эквивалентность остается главенствующим фактором. Для упомянутых крайних случаев с помощью изучения распределения размеров зерен нельзя установить условия осадконакопления, какими бы способами мы ни пользовались.

Второе допущение. Мы исходим из того, что частички всех размеров одинаково доступны наблюдениям. Это требование выполняется для частичек кварца, но не для других детритусовых зерен. В соответствии с принципом гидравлической эквивалентности, определив размеры зерен кварца и зная эффективную плотность другого компонента, можно рассчитать распределение зерен последнего. Если же затем эмпирически определить размер зерен другого компонента, расхождение в теоретических и эмпирических данных поддается интерпретации. Здесь вновь видно, что единственный способ проверки выполнения рассматриваемого требования заключен в эмпирическом определении распределения размеров зерен кварца.

Интерпретируя условия формирования породы на основе измерений зерен кварца, обычно исходят еще из одного допущения: размер зерен кварца оставался неизменным с момента образования породы, т. е. эти зерна не менялись под влиянием диагенетических и других процессов [298]. Физическая и химическая устойчивость кварца дает некоторые гарантии для этого допущения, но для обломочных пород иного состава таких гарантий нет. Отклонения от характера распределения зерен, вычисленные по принципу гидравлической эквивалентности, могут служить указанием на нестабильность материала. Учитывая другие факторы, как, например, одинаковую доступность для наблюдения, этими отклонениями можно пренебречь.

Наконец, последнее требование касается лишь сравнения распределения размеров зерен кварца и других компонентов. Чтобы обеспечить правильную интерпретацию, нужно показать, что при принятом способе определений размеров нет необходимости делать различия между кварцем и другими компонентами, т. е. не должно быть взаимодействий между способом анализа и характером частиц.

[1] Автор, видимо, пользуется классификацией Петтиджона и Фолка, согласно которым граувакки отличаются от субграувакк более высоким содержанием полевых шпатов, обломков изверженных пород и т. п.— *Прим. перев.*

Измерение размеров свободных зерен кварца привлекает исследователя тем, что только этот способ дает возможность определить истинный размер зерна, т. е. при таком измерении исследователь может быть уверен, что длинная ось зерна является действительной, а не видимой длинной осью.

При небольшом количестве зерен устойчивого минерала (кварца) (обычно 50 штук) сложные операции дезинтеграции становятся ненужными и, следовательно, их отрицательное воздействие на результаты измерений сводятся к нулю. Как по этой последней причине, так и из-за однородности минерального состава изучаемого компонента и нарушения сложения породы сильно облегчается оценка полученных измерений. В основе результатов лежит минимальный эффект взаимодействия между переменными [$P = f(s, sh)$].

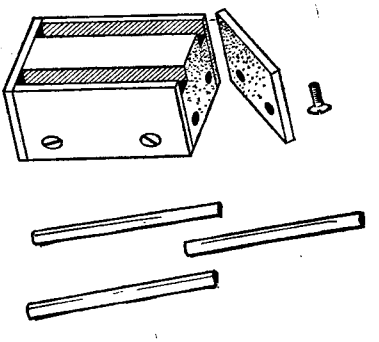
Наконец, к результатам индивидуальных измерений свободных кварцевых зерен, по всей видимости, следует относиться как к наиболее надежным при геологической интерпретации условий накопления толщ осадочных пород.

Допущения, положенные в основу модели интерпретации, требуют специального рассмотрения и оценки путем эксперимента. Вполне вероятно, что с помощью соответствующим образом разработанных экспериментов с обломочными породами, условия накопления которых известны и которые в различной степени подвержены позднейшим изменениям, можно определить не только эффект условий седиментации, но и диагенетических изменений пород. Полученные данные можно затем применить к породам неизвестного происхождения.

Сравнение моделей гидравлической эквивалентности распределений размеров зерен минералов, подверженных и не подверженных диагенетическим изменениям, будет мощным средством интерпретации условий осадконакопления древних осадочных толщ.

4.11. ПРОЦЕДУРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ СВОБОДНЫХ ЗЕРЕН КВАРЦА

Одна процедура для измерения свободных зерен кварца была описана Пай [338], другая предложена Халбе [203]. Согласно последней, нужно получить выборку, состоящую из 20—50 зерен кварца, которые кладут на прямоугольную пластиковую пластинку. Зерна проектируют микропроектором. Определение размеров проводят на проекциях зерен.



Фиг. 4.2. Алюминиевые пластинки и формочка аппарата Капролит (держатель зерен кварца). Длина пластинок 2 дюйма [204].

В качестве термопластика используют кастолит, из которого с помощью алюминиевой формы изготовляют пластинки прямоугольных очертаний (фиг. 4.2). Форму с подвижной крышкой заполняют наполовину пластиком. Пластик затвердевает при добавлении специального активатора, а затем его слегка подогревают в течение нескольких минут. Затем 20—50 кварцевых зерен размещают по одной линии на медленно затвердевающем пластике, так что зерна фиксируются в пластике примерно в положении максимальной проекции. Затем добавляют новую порцию кастолита вместе с активатором и форму нагревают в печи до температуры 100—110° С. Нагревание длится 10 *мин*. За это время пластик приобретает свою постоянную форму. Затем пластинки вынимают из формы и

дают им остыть до их полной прозрачности. Окончательный вид пластинки показан на фиг. 4.2.

Такие пластинки удобно хранить, а зерна можно пронумеровать. Квадратное сечение пластинок позволяет оператору видеть их площадь в максимальной и минимальной проекциях, что дает возможность определять в трех измерениях сферичность зерен. Меняя размеры формы этим способом, можно непосредственно измерять частицы разного размера — от пылевидных до галек. По проекциям определяют также сферичность зерен. Так же можно оценить и степень их окатанности.

Недостаток этого способа состоит в том, что показатели преломления кварца и кастолита довольно близки, но в большинстве случаев при достаточном контрасте границы зерен видны. Некоторая неясность границ зерен всегда возникает вследствие клиновидности их очертаний. Увеличение контраста ничего не дает, но, используя наблюдения различных операторов, можно получить характеристику изменчивости, обусловленной неясностью границ.

ГЛАВА 5

Представление результатов измерений

Общепринятое выражение статической изменчивости состоит в представлении наблюдаемых значений в виде частотных распределений или вариационных рядов, которые представляют собой простое суммарное изображение значений в возрастающем порядке. Если это же представить графически, то полученный график называется «гистограммой», «частотным полигоном» или «частотной кривой» в зависимости от способа изображения графика.

J. G. Smith, A. J. Duncan, Sampling Statistics and Application, McGraw-Hill Co., p. 1, 1945

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Когда эксперимент закончен и получено множество значений, переходят к рассмотрению и анализу данных. Если данные немногочисленны, это довольно простой процесс и всю серию их легко осмыслить. Но обычно данных бывает много, и тогда осмыслить их будет трудно, если не расположить в каком-либо порядке. Обычно этот последний сводится к классификации. Полученные результаты измерений представляют собой значения на некоторой шкале — непрерывной или дискретной. В случае непрерывной шкалы значения выражаются любыми целыми числами и долями чисел, а на дискретной — только конечным набором заданных чисел. Измеряя величину зерен в миллиметрах, можно получить любое число миллиметров и все доли миллиметра. Но если определяется число зерен граната в пробах из 300 зерен в тяжелой фракции, то полученные значения могут быть равными 0, 1, 2 и т. д., но не могут составлять 1,5 зерна. Шкала, по которой можно учитывать только целые единицы, является дискретной.

Следует подчеркнуть, что это деление на непрерывные и дискретные шкалы довольно условно, так как число зерен граната можно выразить и в процентном отношении, и тогда шкала становится непрерывной. Вообще непрерывная шкала относится скорее к идеальному случаю, ею редко пользуются, так как измерительная техника обеспечивает лишь определенную точность измерений. Например, миллиметровая шкала позволяет оперировать только миллиметрами, а так как на ней нет долей миллиметров, ее нужно считать дискретной. Практически все шкалы дискретны до некоторого конечного уровня подразделений. Тем не менее удобно делить их на дискретные и непрерывные (см. гл. 12).

Непрерывные шкалы обычно делят на классы. Каждый класс отвечает некоторому интервалу значений. Предположим, что набор измеренных значений принадлежит интервалу от 1 до 100 *мм*, причем в его пределах возможны любые значения. При таком большом диапазоне значений удобно выделить классы, т. е. подразделить шкалу на условные интервалы, каждый из которых равен, например, 5 или 10 единицам. Интервалы обычно должны быть равными. Это условие не обязательно, но при его выполнении упро-

щаются последующие расчеты. Первое требование состоит в выборе количества таких интервалов, классов или групп. Это количество ограничивается пределами от 10 до 20. Конкретно число групп определяется числом наблюдений в выборке. Во избежание пустых групп [1] при небольшом количестве данных классов должно быть мало.

Когда шкала расклассифицирована, всю серию полученных экспериментальных значений группируют по классам, подсчитывают число замеров, попавших в каждый класс, затем сгруппированные данные заносят в таблицу, которая является суммарным выражением первичных значений. Эта таблица количеств значений, попавших в каждый интервал шкалы или в класс, называется *таблицей частот*. Группируя данные в классы таблицы, мы теряем непрерывную цепь, составленную из первичных значений, а значения, оказавшиеся в классе, рассматриваются как соответствующие средней точке данного класса. Пример дан в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Распределение результатов измерения размеров частиц

Интервал		Середина интервала		Частота, %	Кумулятивная частота, %
мм	ф	*мм*	ф		
0,5—0,25	1—2	0,375	1,5	1	1
0,25—0,125	2—3	0,187	2,5	2	3
0,125—0,0625	3—4	0,094	3,5	6	9
0,0625—0,0312	4—5	0,047	4,5	21	30
0,0312—0,0156	5—6	0,023	5,5	40	70
0,0156—0,0078	6—7	0,012	6,5	25	95
0,0078—0,0039	7—8	0,006	7,5	4	99
$<$0,0039	8+		?	1	100

Приведенная классификация основана на двух переменных: на интервале значений в классе и на числе, или частоте, значений в каждом интервале. Выбор величины класса произволен, но выбранный интервал будет влиять на количество значений в каждом классе. Так, если шкала разбита на 20 классов, которые затем были сведены до 10, частоты во второй классификации почти удвоятся по сравнению с первой. Другими словами, величина класса, выбранного на измерительной шкале, является независимой переменной и частоты зависят от величины интервала класса. Принято считать эти переменные аргументом и функцией соответственно.

Размер обычно измеряют на какой-нибудь линейной шкале — миллиметровой или дюймовой. Эту шкалу затем подразделяют на классы для группировки полученных данных. Существует много способов деления шкалы. При исследовании размеров зерен система использованных подразделений, или система классификаций, называется *шкалой градаций*. Чтобы выбрать подходящую шкалу градаций, необходимо иметь точное представление о ее назначении; например, при изучении размера и формы зерен шкалы могут быть разными. В общем шкала градаций должна служить основой при описании и сравнении результатов, быть независимой от особенностей того или иного способа определений и в то же время иметь под собой какое-то физическое обоснование. Этим требованиям отвечают лишь немногие из существующих шкал. Наиболее приемлемая шкала была предложена Уэнтуэртом [446].

[1] Потеря информации при группировке данных и соответствующие рекомендации рассмотрены Фишером [127, стр. 50].

Эта шкала градаций разделена на неравные классы. Интервалы в классе относятся друг к другу, как $1 : \sqrt{2}$. Каждый предел класса в два раза больше предыдущего интервала и в два раза меньше последующего. Каждый класс этой шкалы имеет также дескрипторное наименование, например грубые песчинки, тонкие песчинки, илистые частицы и т. д., что позволяет стандартизировать описание зерен различных осадочных пород.

Шкала Уэнтуэрта в дальнейшем была модифицирована Комитетом по осадочным породам Национального совета по научным исследованиям [432] и в таком виде она является ныне общепринятой в США. Шкала имеет следующие положительные стороны.

По этой шкале удобно сравнивать осадочные породы по размерам зерен, а ее дескрипторные обозначения обеспечивают стандартное описание пород. Исследователю весьма важно знать, что в настоящее время опубликовано очень большое количество анализов, произведенных по этой шкале. Таким образом, каждый аналитик может пользоваться солидным справочным материалом, выраженным в терминах этой шкалы. Она не зависит от особенностей методики того или иного способа. Известно, что верхний предел величины диаметра капиллярных сосудов составляет 2 *мм*, а максимальный размер частиц, способных находиться во взвешенном состоянии при нормальных условиях седиментации, равен 62,5 *мк*. В пределах этого диапазона в целях максимальной унификации размеры ячеек стандартных сит, выпускаемых в США, довольно точно совпадают с интервалами шкалы Уэнтуэрта. В пределах от 2000 до 62,5 *мк* имеется 21 размер ячеек через $4\sqrt{2}$, т. е. на каждый класс шкалы есть 4 размера ячеек. Наконец Крамбейн предложил логарифмическую, или ϕ-шкалу (ϕ), совпадающую со шкалой Уэнтуэрта, увеличив тем самым значимость шкалы путем упрощения расчетов.

Модифицированная шкала Уэнтуэрта представлена в виде табл. 5.2. В этой же таблице помещены размеры ячеек сит, эквивалентных американским стандартам сит (эквиваленты ϕ-шкалы и соответствующие дескрипторные названия).

Многие породы состоят из частиц различного размера, и для их характеристики приходится пользоваться названиями, взятыми из нескольких классов. Для упрощения описания и удобства сравнения пород, сложенных зернами разных размеров, иногда применяют треугольные диаграммы. Наиболее полное описание распределения размеров зерен достигается с помощью таблицы частот, о которой говорилось выше, а попытка заменить распределение частот менее точными дескрипторными терминами может привести лишь к потере информации.

Если необходимо обобщить данные о распределении, их можно представить либо графически, либо выразить статистически. В обоих вариантах встречаются серьезные трудности, обусловленные тем, что эмпирические распределения неполны (имеют открытые концы), и тем, что они нередко слишком сложны, т. е. полимодальны. Эти трудности заключены в самой природе выборочных распределений, которые частично являются функцией способа определения размеров зерен, и (также частично) определяются поликомпонентным характером большинства типов осадочных пород. Если при графическом изображении получается симметричная кривая, что бывает в случае нормального распределения (гл. 13), такое изображение и суммирующая статистика будут простейшими и наглядными средствами. При нормальном или близком к нему распределении отпадает необходимость в сложных дескрипторных терминах и появляется возможность для эффективных и точных сравнений различных пород по характеру распределения зерен разных размеров. Описательный способ сравнений в этом случае не эффективен и не точен. Действительно, если экспериментально полученные данные о распределении зерен в породе выражаются только в неясном описании, вся работа теряет смысл.

Таблица 5.2

Шкала размеров частиц [1]

Меш [2]	мм		ф		Тип частицы	Тип породы
	от	до	от	до		
	2,048	4,096	—11	—12	Глыба очень крупная	Галечники или конгломераты
	1,024	2,048	—10	—11	» крупная	
	512	1,024	—9	—10	» средняя	
	256	512	—8	—9	» небольшая	
	128	256	—7	—8	Булыжник крупный	
	64	128	—6	—7	» небольшой	
	32	64	—5	—6	Галька крупная	
	16	32	—4	—5	» средняя	
	8	16	—3	—4	» мелкая	
5	4	8	—2	—3	» очень мелкая	
6	3,36	4,00	—1,75	—2	Гранула	
7	2,83	3,36	—1,5	—1,75		
8	2,38	2,83	—1,25	—1,5		
10	2,00	2,38	—1	—1,25		
12	1,68	2,00	—0,75	—1	Очень грубая песчинка	Пески или песчаники
14	1,41	1,68	—0,5	—0,75		
16	1,19	1,41	—0,25	—0,5		
18	1,00	1,19	0	—0,25		
20	0,84	1,00	0,25	0	Грубая песчинка	
25	0,71	0,84	0,5	0,25		
30	0,59	0,71	0,75	0,5		
35	0,50	0,59	1	0,75		
40	0,42	0,50	1,25	1,25	Средняя песчинка	
45	0,35	0,42	1,5	1,25		
50	0,297	0,35	1,75	1,5		
60	0,250	0,297	2	1,75		
70	0,210	0,250	2,25	2	Тонкая песчинка	
80	0,177	0,210	2,5	2,25		
100	0,149	0,177	2,75	2,5		
120	0,125	0,149	3	2,75		
140	0,105	0,125	3,25	3	Очень тонкая песчинка	
170	0,088	0,105	3,5	3,25		
	Микроны					
200	74	88	3,75	3,5		
230	62,5	74	4	3,75		
270	53	62,5	4,25	4	Илистые частицы крупные	Илы или аргиллиты
325	44	53	4,5	4,25		
	31,2	44	5	4,5		
	15,6	31,2	6	5	» » средние	
	7,8	15,6	7	6	» » тонкие	
	3,9	7,8	8	7	» » очень тонкие	
	1,95	9,3	8	9	Глинистые частицы крупные	
	0,975	1,95	10	9	Глинистые частицы средние	
	0,487	0,975	11	10	Глинистые частицы тонкие	
	0,243	0,487	12	11	Глинистые частицы очень тонкие	

[1] Шкала Уэнтуэрта, несколько измененная Комитетом по осадочным породам Национального совета по научным исследованиям США.

[2] Размер ячейки стандартных сит, принятый в США.

Как уже упоминалось (стр. 60), ни просеиванием, ни осаждением в воде нельзя надежно оценить размер зерен. Гораздо совершеннее и эффективнее методика изучения однокомпонентных систем, например измерение свободных зерен кварца. В результате такого изучения получают относительно простые кривые распределения. Эти результаты можно четко выразить с помощью нескольких представительных статистических показателей. Этот способ значительно превосходит все способы косвенного определения размеров по простоте обработки образцов и ясному физическому смыслу выполняемых измерений.

Нетрудно заметить, что, каким бы способом ни определялись размеры зерен, полученное распределение будет резко асимметричным, если при обработке данных мы будем применять линейную или равноинтервальную шкалу. Одно из достоинств шкалы Уэнтуэрта состоит в том, что ее классы относятся один к другому как некоторое постоянное отношение, в силу чего асимметрия многих распределений уменьшается. Этот способ подобен графику распределений с логарифмической шкалой размеров зерен. Однако статистические расчеты оказываются трудными и трудоемкими, если данные выражаются по шкале Уэнтуэрта [448]. Мы получим некоторые преимущества, если переведем данные измерений из арифметической, например миллиметровой шкалы, в логарифмическую, в которой равным отношением шкалы Уэнтуэрта соответствуют равные арифметические интервалы. Для рассматриваемой цели пригодны логарифмы с любым основанием. Крамбейн предложил логарифмическую шкалу, специально приспособленную к шкале Уэнтуэрта, и эта ϕ-шкала была принята для изображения частоты встречаемости зерен [247].

Крамбейн использовал отношение $\sqrt{2}$ шкалы Уэнтуэрта таким образом:

$$d = 2^{-\phi}, \tag{5.1}$$

Таблица 5.3

Таблица перевода ϕ-единиц в миллиметры и микроны

ϕ	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875		ϕ
—4	16,000	17,43	19,01	20,73	22,62	26,68	26,9	29,35		
—3	8,000	8,73	9,51	10,73	11,31	12,34	13,46	14,68		
—2	4,000	4,36	4,75	5,18	5,66	6,17	6,73	7,34	Милли-	
—1	2,000	2,181	2,378	2,594	2,828	3,084	3,363	3,668	метры	
—0	1,000	1,090	1,189	1,297	1,414	1,544	1,681	1,883		
Микроны		545	595	648	707	772	841	917	1,000	+0
		273	297	324	354	386	421	458	500	1
		136	149	162	177	193	210	229	250	2
		68,1	74,4	81,2	88,4	96,5	105,1	114,6	125	3
		34,1	37,2	40,6	44,2	48,3	52,6	57,3	62,5	4
		17,0	18,6	20,3	22,1	24,1	26,3	28,6	31,25	5
		8,53	9,23	10,1	11,0	12,0	13,1	14,3	15,67	6
		4,26	4,64	5,97	5,53	6,03	6,57	7,16	7,84	7
		2,13	2,32	2,53	2,76	3,01	3,28	3,58	3,92	8
		1,07	1,16	1,27	1,38	1,51	1,64	1,79	1,960	9
		0,522	0,580	0,634	0,691	0,754	0,821	0,895	0,980	10
		0,266	0,290	0,317	0,345	0,377	0,410	0,447	0,490	11
		0,133	0,145	0,158	0,173	0,188	0,205	0,224	0,245	12
		0,066	0,073	0,079	0,086	0,094	0,103	0,112	0,122	13
		0,033	0,036	0,039	0,043	0,047	0,051	0,056	0,061	14
ϕ		0,875	0,750	0,625	0,500	0,375	0,250	0,125	0,000	ϕ

где d — диаметр частицы в миллиметрах. Тогда

$$\log d = -\phi \log 2,$$
$$d = -0{,}30103\phi. \qquad (5.2)$$

В большинстве случаев диаметр частиц пород обычно менее 1 *мм*, поэтому, пользуясь знаком минуса, доли миллиметра можно выразить как положительные целые числа ϕ-шкалы:

$$\log 0{,}25 = \bar{1}{,}39794 = -0{,}30103\phi,$$
$$\phi = \frac{-(\bar{1}{,}39794)}{0{,}30103} = \frac{-(-0{,}60206)}{0{,}30103} = 2.$$

Соотношения между делениями ϕ-шкалы, миллиметрами и диаметрами ячеек стандартных сит можно видеть в табл. 5.2 и 5.3, а более подробные таблицы можно найти в книге Гриффитса и Мак-Интайра [168].

Ниже мы будем широко пользоваться ϕ-шкалой, поэтому необходимо, чтобы читатель привык к ней. В общем сравнение распределений, выраженных графически и статистически, будет выполняться по ϕ-шкале. Более тщательное знакомство с этой шкалой даст возможность анализировать материал и обдумывать его, пользуясь этой шкалой, что в свою очередь облегчит математические манипуляции и геологическую интерпретацию результатов.

5.2. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

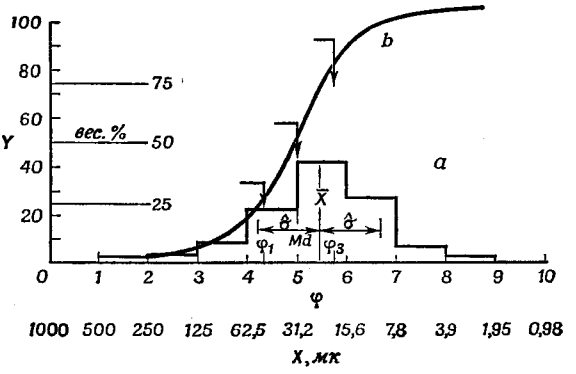
Табличная форма представления распределений неудобна для визуального обозрения и сравнений. Следовательно, следующий шаг состоит в переходе к графической форме. Такие графики, построенные в обычной двухмерной системе координат, основаны на таблице частот (табл. 5.1). Значения независимой переменной X (в данном случае — это размер зерен) наносят на ось абсцисс, а зависимой переменной Y (частота) — на ось ординат. В большинстве случаев за нуль принимают пересечение осей, откуда значения будут возрастать. Если размеры измеряют в миллиметрах, порядок меняется на обратный: значения в миллиметрах увеличиваются налево от начала координат. Значения ϕ-шкалы увеличиваются с удалением от начала координат; следует помнить, что благодаря знаку «минус» в уравнении преобразования (5.2) увеличение абсолютных значений отвечает здесь уменьшению размеров зерен.

Для графического изображения распределения размеров предлагались и предлагаются [99] различные способы. Наиболее простой и наглядной формой, отвечающей большинству требований, является гистограмма. Интервалы классов откладывают по оси абсцисс, а частоту для каждого класса представляют в виде колонки, высоту которой откладывают по оси ординат. Принято, что площади колонок пропорциональны частоте встречаемости каждого класса. При составлении этих графиков необходимо придерживаться определенных стандартов, так как из-за различного масштаба шкал изменяется и вид графиков, что затрудняет сравнение их друг с другом. Автор рекомендует стандартные альбомы (Codex № 318A), в которых оси абсцисс и ординат разделены из расчета 20 делений на 1 дюйм. Данные, полученные путем осаждения в пипетке или просеивания и выраженные в весовых процентах (которые грубее данных подсчета отдельных зерен), изображаются на оси ординат как 1 дюйм = 20%. По оси абсцисс единица ϕ-шкалы приравнивается к 1 дюйму, так что всего на оси будет умещаться 10 ϕ-единиц. В качестве примера распределение, показанное на табл. 5.1, изображено в виде гистограммы на фиг. 5.1, *а*.

При изучении осадочных пород изредка применяют частотные полигоны, которые получают путем соединения середины колонок гистограммы.

Частота изображается здесь ординатами, соответствующими срединным точкам классов. Ничего нового сравнительно с гистограммой этот способ не дает.

Если меняется величина класса, изменяется и вид гистограммы, а так как величина классов не стандартна, разные авторы, занимаясь изучением распределения размеров зерен, используют и разные по величине классы. В силу этого визуально сравнивать гистограммы трудно; однако это затруднение можно преодолеть, если мы построим кумулятивные гистограммы, в которых частоты предшествующих классов включим в состав последующих (последняя колонка табл. 5.1). Такой метод графического изображения не зависит от величины класса. На практике теперь наиболее часто применяют кумулятивные полигоны частоты, которые получаются в виде плавных кривых, построенных на основании кумулятивных гистограмм. Для примера данные табл. 5.1 изображены в виде гистограммы и кумулятивной кривой на фиг. 5.1 *a* и *b* соответственно.

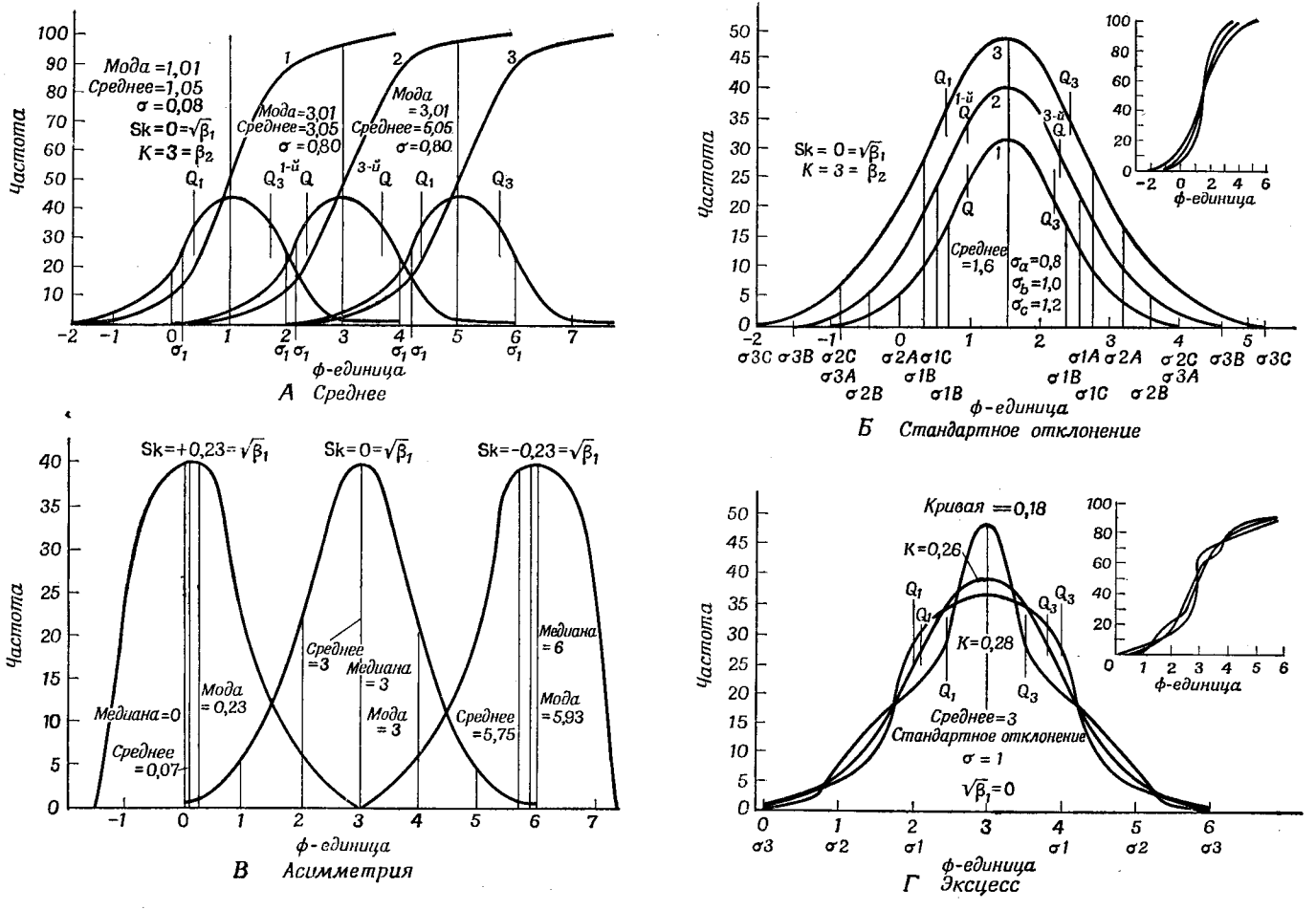


Ф и г. 5.1. Частотная гистограмма (*a*) и кумулятивная кривая (*b*) для данных табл 5.1.

Интерпретация и сравнение данных, графически выраженные кумулятивным способом, относительно просты. Так, если одна кривая, повторившая форму другой, смещена относительно нее вдоль оси абсцисс, смещение означает изменение в средних размерах зерен (на фиг. 5.2, *A*) (кривая 3 представляет более тонкозернистую породу, чем на фиг. 5.3, *A* — кривая 2). Аналогично изменение крутизны кумулятивной кривой выражает изменение отсортированности зерен, или степени их однородности по величине (фиг. 5.2, *Б* и 5.3, *B*; кривая 3 на фиг. 5.2, *Б* представляет более слабо сортированную или менее однородную породу, чем кривые 1 и 2 на этой же фигуре).

Несмотря на эту видимую простоту интерпретации, пытаются вернуться к обычным кривым частоты, оперируя при этом такими частотами, которые не зависят от величины класса на оси абсцисс. Такие попытки основаны на взаимоотношениях между кривыми частоты и кумулятивными кривыми: вторую можно считать интегралом первой. Отсюда, чтобы получить кривую частоты из кумулятивной кривой, нужно найти дифференцированием ее производную. Крамбейн описывает графический способ тангенсов, с помощью которого можно получить эту производную кривую. Она называется *обращенной частотной кривой* [240]. Бразерхуд и Гриффитс [42] предложили математический способ расчета этой же кривой.

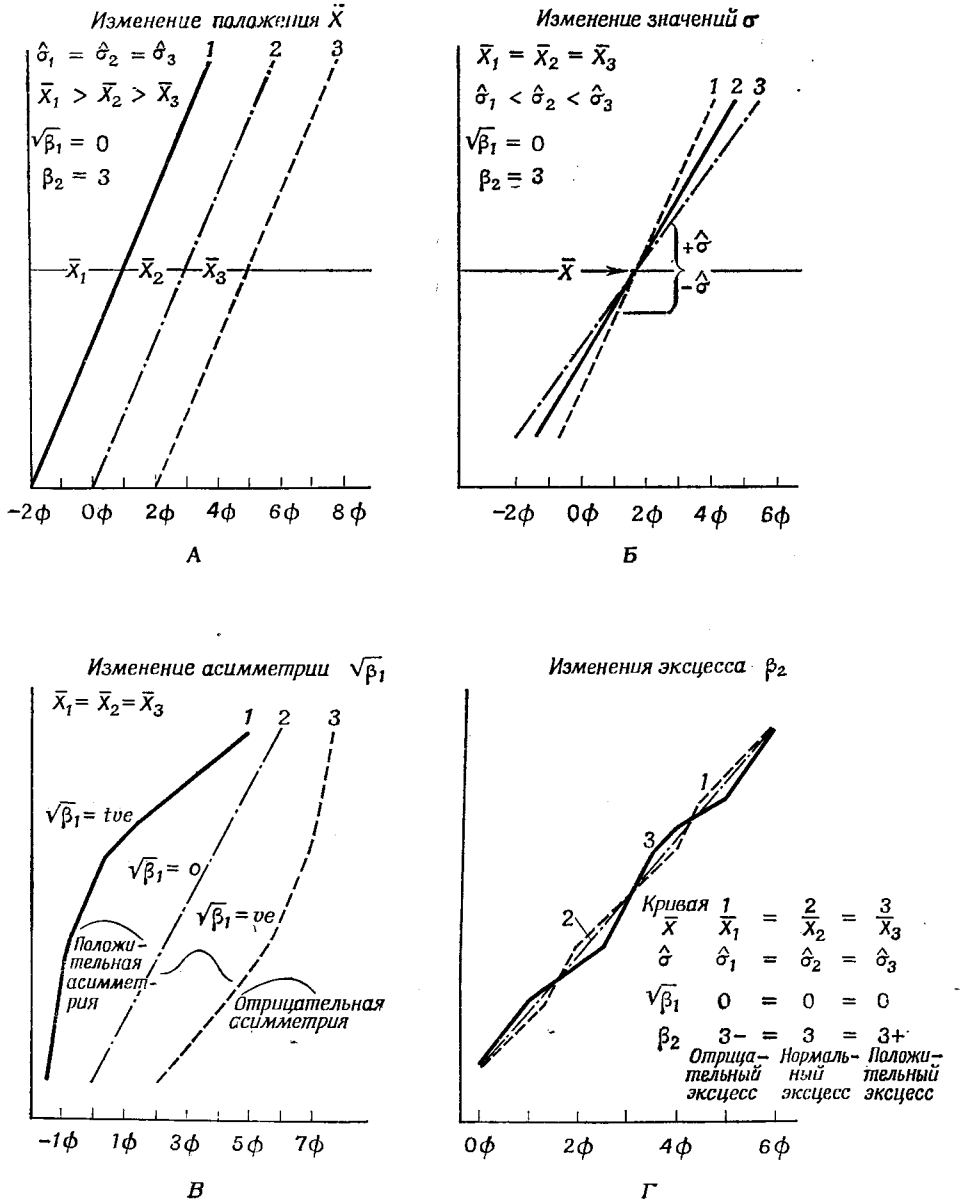
Обращенная кривая распределения принципиально отличается от других графиков. На оси абсцисс по-прежнему откладываются размеры, а значения, откладываемые по оси ординат, являются мерой изменения наклона кумулятивной кривой, а не частотой [42]. Для очень крутых кумулятивных кривых, т. е. для очень хорошо сортированных осадков, на оси ординат значения часто превышают 100%. Главное достоинство обращенной кривой в том, что здесь четко выделяется наиболее распространенный диаметр частиц. Он соответствует самой высокой точке кривой. Этот обычный диаметр соответствует часто наблюдаемой скорости течения. Но более четко определить смысл этого диаметра трудно, так как для этого необходимо иметь кривую, расположенную симметрично относительно этого диаметра.



Ф и г. 5.2. Частотные и кумулятивные кривые.

Но при изучении распределения зерен этой симметрии можно достигнуть, лишь пользуясь логарифмической шкалой. Ввиду сложности вычислительных процедур, которые необходимы для построения обращенной кривой, мы не рекомендуем этот метод для широкого использования. Так как эти кривые трудно интерпретировать относительно условий образования осадков, применение их весьма ограничено.

Используя графические способы изображения распределений, мы всегда стремимся получить некоторую довольно простую и столь хорошо известную нормальную кривую, предпочтительно унимодальную. В большинстве случаев отмечается, что в осадочных образованиях распределение размеров частиц приближается к идеальному распределению, которое можно выразить графически, если эти размеры мы представим в логарифмическом



Ф и г. 5.3. Кумулятивные кривые распределений на нормальной вероятностной бумаге.

масштабе. Был предложен графический способ для проверки предположения о нормальности распределения размеров частиц осадка. При этом шкала абсцисс может быть логарифмической или, что удобнее, арифметической с пересчетом на ϕ-единицы. Частота наносится на ось ординат. Для этих двух шкал существуют особые бланки, называемые вероятностной бумагой [1] (фирма Кодекс, соответственно кодекс № 3127 и 3128). На бланках в обоих случаях в условиях нормального распределения график будет иметь вид прямой линии. Практически выборочные точки обычно не дают идеальной прямой; вопрос о том, насколько обосновано то или иное сглаживание графика, относится уже к интуиции аналитика. В качестве примера кривые фиг. 5.2 изображены на фиг. 5.3 с нанесением на арифметическую шкалу вероятностной бумаги.

Несколько более строгий подход к вопросу был описан Отто [318], который пытался получить оценки статистических параметров с помощью графика на нормальной вероятностной бумаге исключительно графическими приемами. Дуглас [99] также использовал нормальную вероятностную бумагу с целью показать еще один подход к интерпретации данных о распределении размеров.

Из приведенного обзора можно заключить, что есть очень много способов изображения распределения размеров зерен и трудно рекомендовать тот или иной как наиболее приемлемый. Действительно, каждый метод приносит какую-то новую информацию, указывая тем самым на то, что следует использовать все способы интерпретации распределений размеров частиц осадка, несущих итоговую информацию. Возникающие трудности иногда связаны с тем, что кривые распределения размеров осадка не всегда можно рассматривать как простые унимодальные распределения. Например, при пользовании методами пипетки или просеивания кумулятивная кривая остается открытой с обоих концов. Для большинства пород кумулятивная кривая достигает значения ординаты 90%, в точке абсциссы 10 ϕ или менее; это означает, что анализируемый образец содержит заметное количество частиц с диаметром, эквивалентным менее 1 *мк*. Пытались «закрыть» конец кривой, отвечающий тонким частицам, например, путем использования арифметической миллиметровой шкалы на этом участке оси абсцисс. Таким способом Дуглас [99] свел незаконченный конец кривой к очень малому значению. Гриффитс [153] предложил придавать конечное значение абсциссе этого конца, ориентируясь на характер глинистых частиц анализируемой породы. К сожалению, ни одно из предложений не было одобрено и проблема незаконченности кривой остается пока нерешенной. Таким образом, интерпретация характера распределения, выраженного или кумулятивной кривой, или однозначной кривой распределения, или кривой вероятностей, пока еще остается в категории качества и довольно субъективной. Такая ситуация сохранится до тех пор, пока не будут приняты определенные изменения в аналитической технике, что и позволит перейти к простым кривым [176].

5.3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Не раз пытались наметить строгий и объективный подход к сравнению и интерпретации распределений результатов измерений размеров частиц осадка с помощью статистических методов. Основная функция статистики на данном этапе экспериментальных работ состоит в возможности получить обобщенные характеристики распределений размеров частиц. Статистиче-

[1] Если на оси абсцисс таких бланков используется обычный масштаб, они называются нормальной вероятностной бумагой, если логарифмический — логнормальной.— *Прим. ред.*

ские характеристики должны нести столько же информации, сколько графики и таблицы, обобщенными параметрами которых они являются. Развитие статистических способов в общем следовало за графическими, от которых оно зависело.

Ван Орстранд [434] был одним из первых исследователей, предложивших свести наблюдаемые распределения размеров к соответствующим теоретическим кривым распределения; он рекомендовал пользоваться для определения статистических характеристик методом моментов. Позже Уэнтуэрт [448] предложил принять моменты функции распределения в качестве статистических характеристик для распределения размеров. Но оба эти подхода очень громоздки, так как они основаны на использовании логарифмической шкалы классов. Хатч и Чоут [188] применили статистический подход к описанию распределения размеров зерен искусственных материалов и разработали относительно простой способ перехода от весовых процентов к числу случаев встречаемости. Форма кривых в их исследованиях приближалась к нормальной. Траск [431] применил квартили к анализу распределения размеров и предложил использовать медианные значения как средний диаметр частиц, и он же ввел ставший широко известным коэффициент сортированности Траска S_0 как меру однородности размеров зерен. Он обосновал также необходимость пользоваться мерой асимметрии распределений (табл. 5.7). В этом случае в равной мере преодолеваются трудности применения логарифмической шкалы размеров и пользования усеченными (открытыми) на концах распределениями. Наконец, статистический подход был расширен и унифицирован благодаря детальным работам Крамбейна [242], а также Крамбейна и Петтиджона [248]. Применяя преобразование в ϕ-единицы по Крамбейну [244], удалось упростить расчеты квартилей и разработать способы измерения медиан, квартильных отклонений, коэффициентов асимметрии и эксцесса. В дальнейшем, вновь используя ϕ-шкалу, Крамбейн [242] смог применить метод моментов для случаев неусеченных распределений. В течение этого первого периода применения статистических методов и позднее многие исследователи пытались ввести специальные статистические показатели, с помощью которых можно было бы избежать некоторых препятствий, возникающих при подходе общепринятыми путями. Вряд ли нужно говорить, что эти попытки не стали популярными [19, 150, 312].

Существует серия статистических показателей, которыми можно пользоваться при анализе распределения размеров. Наиболее часто встречаемые в литературе показатели сведены в табл. 5.7.

Незаконченность данных, приводящая к усеченному распределению, вынуждает нас пользоваться квартильными статистиками, которыми характеризуется только центральная часть распределений. Если требуется расширить участок применения статистик, чтобы можно было покрыть большую часть кривой, возникает необходимость использовать квантили [133, 150, 214]. Если же на графике вырисовывается очень неправильное распределение размеров, любое статистическое обобщение не будет удовлетворительным. В таких случаях наилучшим способом остается графический. Инман [214] изучал математическую основу квартильных и квантильных статистик и отношение их к соответствующим оценкам моментов. Он предложил пользоваться пятью диаметрами зерен для характеристики распределений размеров, получаемой по методу пипетки и просеивания.

Очевидно, что новые манипуляции с используемыми сейчас статистическими характеристиками для получения более удовлетворительных обобщений о распределении размеров будут страдать недостатками в соответствии с законом уменьшающегося выхода. Ориентируясь на чрезвычайно детальные и тщательные исследования Крамбейна и более новые работы Инмана [214], Фолка и Уорда [133], Мак-Каммона [291, 292], Фридмана [137] и Мидл-

тона [296], можно заключить, что трудности в разработке адекватных статистических характеристик возникают вследствие сложной природы распределений. Последняя в свою очередь является в основном функцией способа анализа. Усеченность и асимметрия многих распределений возникают, например, главным образом из-за присутствия глинистых частиц, а «размер» этих частиц определяется дисперсным способом и методом дезинтеграции породы на отдельные ее компоненты. Мера «размера», получаемая по методу пипетки или просеивания [$P = f(m, s, sh)$; гл. 3], в значительной мере обусловливает те трудности, которые возникают при графическом изображении и статистическом обобщении. При таком подходе недостаточно учитываются две важные особенности экспериментального анализа: 1) полученные опытным путем размеры нельзя считать истинными, это лишь эмпирическое приближение, полученное при решении некоторых геологических задач; 2) сложное распределение размеров обусловлено сложным составом анализируемого материала; недостатки различных способов анализа связаны с тем, что ни один из них не удовлетворителен при работе с поликомпонентными системами.

Если же необходимо получить гомогенное распределение размеров, первым условием должна быть гомогенность анализируемого материала и применение соответствующего способа исследований. Просеивание однокомпонентных систем, например известняков, обеспечивает довольно близкое приближение к нормальному распределению [188]. Та же цель достигается при просеивании дезинтегрированных кварцитов [241, 365], но просеиванием поликомпонентных материалов нельзя добиться нормального распределения. Таким образом, становятся понятными все преимущества метода анализа свободных зерен (стр. 62).

Применяя соответствующие технические приемы анализа гомогенных систем, мы достигаем гомогенного распределения. Например, в шлифах, в которых мы изучаем размеры зерен кварца, имеем в общем нормальное распределение. Однако невозможность измерить зерна диаметром меньше 31,2 *мк* (6 ϕ-единиц) приводит к неполному вскрытию характера распределения, а следовательно, и к асимметрии. Очевидно, что причина лежит здесь не в анализируемом материале, а в технике исследований. Пытаясь устранить такого рода недостатки, мы приходим к методу изучения свободных зерен кварца. Получаемые по этому методу распределения являются гомогенными. Их можно полно отразить на гистограммах и адекватно охарактеризовать такими удобными статистическими характеристиками, как моменты. Эти статистики обладают качествами, наиболее необходимыми при аналитических исследованиях [127, 162], будучи состоятельными и несмещенными в том смысле, что по мере увеличения числа измерений они приближаются к соответствующим оцениваемым параметрам генеральной совокупности. Рассматриваемые статистики также наиболее эффективны в том смысле, что они более точны для любого данного количества измерений, чем всякие другие статистики. Далее, если полученное распределение приближается к нормальному распределению, то эти статистики являются также достаточными, т. е. для характеристики распределения никакие другие статистики не нужны. Если бы требования достаточности, эффективности и состоятельности предъявлялись к большинству статистик, предложенных для характеристики распределения размеров, эти статистики были бы отвергнуты с самого начала.

Принимая какой-либо способ анализа, обеспечивающий получение гомогенного распределения, и характеризуя затем это распределение оценками моментов, которые достаточны, эффективны и состоятельны, мы можем использовать предоставляющуюся таким образом возможность для проверки этих статистик относительно ошибок опробования. Так, по данным случайной выборки из некоторой генеральной совокупности с нормальным распределением размеров зерен можно получить ненормальное распределение за счет

ошибок опробования. Поэтому перед физической интерпретацией статистик необходимо убедиться, что амплитуда колебаний значений изучаемой величины значительно превышает ту, которая может быть обусловлена ошибками опробования [162, 170, 300].

5.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЦЕНОК МОМЕНТОВ

Расчеты статистик по методу моментов математически строго обоснованы [127, стр. 70 и ниже]. При вычислении этих статистических характеристик имеются в виду три цели.

1. Результаты должны выражаться в небольшом наборе характерных статистик, которые адекватно определяют данное распределение. Эту цель можно считать достигнутой, если выполняются требования состоятельности, эффективности и достаточности.

2. Амплитуда колебания значений статистик должна быть такой, чтобы можно было выявить ошибки опробования, для чего необходимо разработать специальные критерии. С целью выполнения данного требования Фишер [127, стр. 73 и ниже] модифицировал приемы для расчетов статистик по методу моментов. Более детально необходимые приемы описаны ниже, после описания характеристики нормального распределения и критериев значимости (гл. 13).

3. Несмотря на то что предметом нашего изучения является распределение размеров зерен, целесообразно выработать некоторую общую процедуру, которую можно было бы применить к любым распределениям и которая была бы независимой от измеряемого свойства. Нижеследующей процедурой достигаются все три цели.

Среднее в симметричном распределении, или средние значения распределения, — это положение центра тяжести площади под фигурой распределения. Среднее — это первый момент. Каждому последующему моменту можно приписать аналогичный физический смысл.

Выборочный момент порядка k можно выразить формулой [350]

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k. \tag{5.3}$$

Отсюда первый[1] момент m_1 равен

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) = 0.$$

Практически удобно вычислять моменты относительно некоторого произвольного числа, обычно точки середины класса, предположительно содержащего среднее значение [176]. Обозначим эти моменты через n. Затем необходимо преобразовать моменты n в моменты m относительно среднего[2]:

$$m_1 = 0; \tag{5.4}$$

$$m_2 = n_2 - n_1^2; \tag{5.5}$$

$$m_3 = n_3 - 3n_2n_1 + 2n_1^3; \tag{5.6}$$

$$m_4 = n_4 - 4n_3n_1 + 6n_2n_1^2 - 3n_1^4. \tag{5.7}$$

---

[1] Нулевой момент $m_0 = (1/N) \sum (X_i - \bar{X})^0$ — площадь, охватываемая кривой.

[2] Вывод этих формул можно найти в большинстве руководств по статистике [198, 221, 350]. [Моменты m называются центральными, а моменты n, если произвольно выбранное число равно нулю,— начальными.— *Прим. ред.*]

Необходимо ввести еще одну поправку, так как основой для расчета моментов обычно служат данные, сгруппированные по интервалам в таблице распределения. Такой поправкой служит поправка c на интервал класса; формулы приобретают вид [1]

$$m_1 = \overline{X} = \overline{X}' + cn_1; \tag{5.8}$$

$$m_2 = s^2 = c^2(n_2 - n_1^2); \tag{5.9}$$

$$m_3 = c^3(n_3 - 3n_2n_1 + 2n_1^3); \tag{5.10}$$

$$m_4 = c^4(n_4 - 4n_3n_1 + 6n_1^2n_2 - 3n_1^4). \tag{5.11}$$

Оценка среднего значения совпадает с первым начальным моментом, и оценка дисперсии соответственно равна второму центральному моменту, а третий и четвертый центральные моменты общепринято использовать как меры асимметрии и эксцесса. Один из наиболее общепринятых приемов преобразования моментов в безразмерные величины состоит в делении на соответствующую степень второго момента, или дисперсии [2]:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{m_3}{\sigma^3}; \tag{5.12}$$

$$\sqrt{\beta_2} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{m_4}{\sigma^4}. \tag{5.13}$$

При нормальном распределении $\sqrt{\beta_1} = 0$ и $\sqrt{\beta_2} = 3$ и, согласно вычислениям Крамбейна и Петтиджона [248, стр. 251], асимметрию Sk и эксцесс K можно выразить в виде

$$Sk = \frac{\sqrt{\beta_1}}{2} = \frac{m_3}{2\sigma^3}; \tag{5.14}$$

$$K = \beta_2 - 3 = \frac{m_4}{\sigma^4}. \tag{5.15}$$

Статистики $\sqrt{b_1}$ и b_2 можно использовать для проверки гипотезы нормального распределения [122, стр. 151] или же для получения вывода статистик g Фишера, применяемых для проверки этой же гипотезы [162, 300]. Статистики g можно также использовать как меру асимметрии g_1 и эксцесса g_2. Единственно, в чем ощущается явный недостаток, это в справочной литературе, в которой значения выражались бы в статистиках g (табл. 5.5).

В табл. 5.4 на типичном примере демонстрируется полная процедура вычисления выборочных моментов.

Прежде всего следует рассчитать значения, использовав некоторый условный центр (см. суммы табл. 5.4). Последний столбец, обозначенный $f(d-1)^4$, включен для проверки вычислений (п. 2, табл. 5.4) [3]. Затем находят выборочные моменты относительно произвольного среднего n_{1-4} (п. 3), вносят поправки и вычисляют оценки центральных моментов m_{1-4} (п. 4). Последующие действия не требуют пояснений. Они заключаются в вычислении оценки среднего значения $\overline{X}$, дисперсии $\hat{\sigma}^2$, стандартного отклонения $\hat{\sigma}$, коэффициентов асимметрии Sk и эксцесса K.

---

[1] Крамбейн обходится без этой коррекции, он использует в качестве интервала класса одну ϕ-единицу [248, табл. 29, стр. 251], но для других интервалов эта поправка необходима.

[2] Выборочные оценки обозначаются как b_i; ими оцениваются параметры, соответствующие совокупности β_i.

[3] Эта проверка известна как «проверка Чарлиера» [464, стр. 156].

Таблица 5.4

Расчет статистик по моменту распределения

Интервал, ф-единицы	X_ϕ	f	d	fd	fd^2	fd^3	fd^4	$f(d-1)^4$
1—2	1,5	1	—4	—4	16	—64	256	625
2—3	2,5	2	—3	—6	18	—54	162	512
3—4	3,5	6	—2	—12	24	—48	96	486
4—5	4,5	21	—1	—21	21	—21	21	336
5—6	5,5	40	0					40
6—7	6,5	25	1	25	25	25	25	0
7—8	7,5	4	2	8	16	32	64	4
8—9	8,5	1	3	3	9	27	81	16
1. Всего		100		—7	129	—103	705	2,019

2. Проверка Чарлиера на суммы

$$\sum (d-1)^4 = \sum fd^4 - 4\sum fd^3 + 6\sum fd^2 - 4\sum fd + \sum f;$$

$$2{,}019 = 705 + 412 + 774 + 28 + 100.$$

3. Моменты относительно произвольного начала координат

$$n_1 = \frac{\sum fd}{\sum f} = -0{,}07, \qquad n_2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = 1{,}29,$$

$$n_3 = \frac{\sum fd^3}{\sum f} = -1{,}03, \qquad n_4 = \frac{\sum fd^4}{\sum f} = 7{,}05.$$

4. Моменты относительно среднего значения, исправленные за группировку данных

$$m_1 = \overline{X} = \overline{X}' + cn_1 = 5{,}5 - 0{,}07 = 5{,}43;$$

$$m_2 = \hat{\sigma}^2 = c^2(n_2 - n_1^2) = 1{,}29 - 0{,}0049 = 1{,}2851;$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{1{,}2851} = 1{,}133;$$

$$m_3 = c^3(n_3 - 3n_2n_1 + 2n_1^3) = -1{,}03 + 3 \times 1{,}29 \times 0{,}07 - 2 \times 0{,}000343 = -0{,}7598;$$

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{\hat{\sigma}^{3/2}} = -\frac{0{,}7598}{1{,}4544} = -0{,}5224;$$

$$S_k = \frac{\sqrt{b_1}}{2} = -0{,}262;$$

$$m_4 = c^4(n_4 - 4n_3n_1 + 6n_1^2n_2 - 3n_1^4) =$$
$$= 7{,}05 - 4 \times 1{,}03 \times 0{,}07 + 6 \times 0{,}0049 \times 1{,}29 - 3 \times 0{,}00002401 = 6{,}7994;$$

$$b_2 = \frac{m_4}{\hat{\sigma}^4} = \frac{6{,}7994}{1{,}6512} = 4{,}117;$$

$$K = b_2 - 3 = 4{,}117 - 3 = 1{,}117.$$

5. Основные статистики

$$\overline{X}_\phi = 5{,}43, \qquad \hat{\sigma}_\phi = 1{,}133,$$

$$\sqrt{b_1} = -0{,}522, \qquad b_2 = 4{,}117.$$

X — середина каждого класса, f — частота (по данным табл. 5.1),
$\overline{X}$ — среднее арифметическое, $\overline{X}$ — принятое среднее = 5,5,
c — интервал класса = 1 ϕ $\quad d = \dfrac{X - \overline{X}'}{c}$.

5.5. ПРИМЕРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ ЗЕРЕН

Размер частиц агрегата, например осадочных пород, выражается числом на какой-то шкале, но, как уже упоминалось, различные способы определения размеров приводят к различным значениям, причем в разных способах применяются разные шкалы. Поэтому необходимо с самого начала иметь в виду, что разными способами получают разную информацию — одну более, другую менее точно и ясно интерпретируемую. При так называемых «косвенных» способах измерения зерен поликомпонентного агрегата в лучшем случае достигается порядковый уровень информации. В этом случае целесообразно применять порядковые статистики. При измерениях в шлифах получают значения интервальной шкалы [1], а при прямых измерениях можно получить значения шкалы отношений.

Для характеристики распределения размеров зерен обычно используют модель логнормального распределения [247]. Несмотря на существующие противоречия относительно возможности применения этой модели, она представляется наилучшим приближением к выяснению распределения как с теоретических, так и с экспериментальных позиций (см., например, гл. 13.12). Чтобы добиться картины нормального распределения, нужно изучаемую переменную (размер зерна) выразить в значениях ϕ-шкалы, провести правильный отбор образцов и выполнить измерения в строго установленном порядке [176]. Любое отклонение от этих рекомендаций приведет к отклонению от модели. Например, логарифмы радиусов апельсинов данного сорта могли бы быть нормальными, но если апельсины разных сортов перемешаны, общее распределение почти наверняка будет полимодальным. Если, кроме того, добавить к апельсинам несколько бананов, распределение будет меняться почти бессистемно: здесь будет меняться форма, размер и состав, и эти изменения выразятся в так называемых «измерениях» размеров. Полную аналогию с этим примером являют собой осадочные породы или любые другие поликомпонентные агрегаты. При последующем рассмотрении за основу будет принята логнормальная модель; отклонения от нее объясняются различными способами определений и нарушениями условий случайного опробования. Чтобы статистики имели смысл, нужно проверить их значимость, но если такая проверка невозможна, нельзя будет добиться и физической интерпретации их изменчивости. По непроверенным статистикам можно сделать лишь смутные неопределенные заключения. При применении таких статистик, как порядковые статистики, медианы, квартили и квантили, с помощью которых сравниваются разные системы, исходят из нормальной модели распределения [133, 214, 291, 292]. В общем нельзя характеризовать статистики, если мы не отнесли их к какой-либо известной модели распределения.

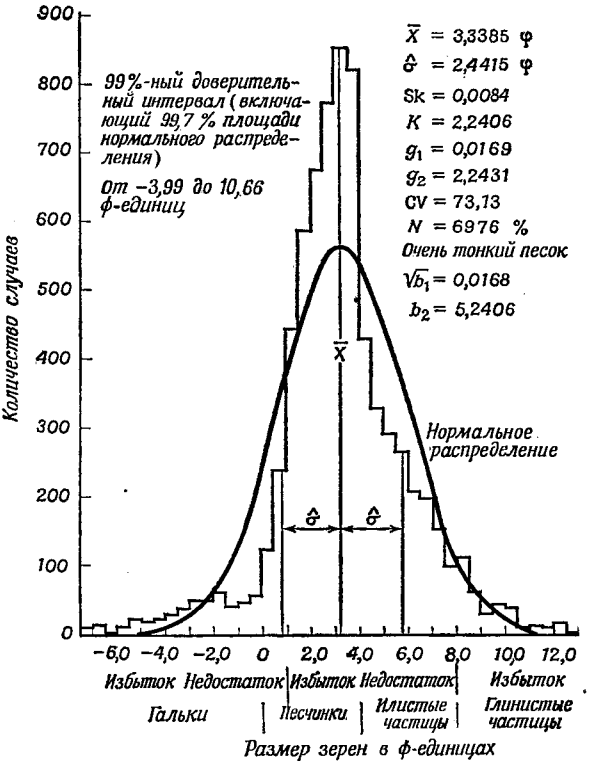
Нормальная модель распределения размеров в ϕ-единицах дает возможность использовать оценки моментов как подходящих обобщающих статистик. На нижеследующих страницах оценки четырех моментов будут соответствовать параметрам: неизвестному среднему μ, дисперсии σ^2 или стандартному отклонению σ и пирсоновским бета-величинам: $\sqrt{\beta_1}$ как мере асимметрии и β_2 как мере эксцесса кривой. Соответствующими статистическими оценками этих параметров являются $\overline{X}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}$, $\sqrt{b_1}$ и b_2. Прежде всего следует начать с проверки значимости оценок β-величин. Известно, что при нормальном распределении $\sqrt{\beta_1} = 0$, а $\sqrt{\beta_2} = 3$. Отклонения от этих параметрических значений, возникающие из-за ошибок опробования, приведены в таблицах (например, в работе [323], табл. 34, *b* и 34, *c*,

[1] О терминах см. гл. 12.5.

стр. 183—184), по которым легко найти значимость оценок b_i параметров β_i для любых размеров зерен. Гриффитс [162] и Мильнер [300] использовали статистики g_i для оценки параметров γ_i по Фишеру.

5.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПО КОСВЕННЫМ СПОСОБАМ ИЗМЕРЕНИЙ

Определяя размеры зерен методом пипетки или просеивания, мы получаем независимую переменную X (логарифм или ϕ-эквивалент измеренных значений) и зависимую переменную, или частоту встречаемости Y (обычно в весовых процентах). Размер выражается как $P = f(m, s, sh)$, и среднее значение представляет средний размер зерен одного грамма осадочной породы. Искусственная мера (весовые проценты), в которой выражаются результаты опытов, не дает возможности использовать их как собственно размеры зерен. Из-за неопределенности объема выборки n трудно использовать понятие числа степеней свободы и нельзя проверить значимость статистических характеристик. Поэтому получаемые здесь «статистические оценки» не отчетливы. Пытались эмпирически интерпретировать изменчивость оценок асимметрии и эксцесса. Результаты экспериментов настолько неясны, что вряд ли оправдывается стоимость последних. Такого рода недостатки относятся к любому косвенному способу определения размера частиц поликомпонентных систем, с помощью которого хотели осуществлять геологическую и генетическую интерпретацию.



Фиг. 5.4. Распределение размеров, определенных методами пипетки и просеивания; медианы различных обломочных пород.

Тем не менее указанные способы широко применяются при изучении размеров и сортировке зерен. Недостатки их пытались восполнить применением «больших выборок». На гистограмме фиг. 5.4 сведены медианы 6976 анализов размеров зерен, взятых из литературы и архивов автора. Кривая распределения представляется здесь унимодальной и (приблизительно) симметричной. Исходя из интервала класса в 0,5 ϕ-единиц, выборочные моменты мы выразим в виде $X = 3{,}339$ ϕ, $\hat{\sigma} = 2{,}422$ ϕ, $\sqrt{b_1} = 0{,}0168$ и $b_2 = 5{,}241$.

Сначала можно проверить по значению b_1 гипотезу $\sqrt{\beta_1} = 0$ путем сравнения с таблицами Пирсона и Хартлея [323]; число степеней свободы можно считать равным числу анализов, $n = 6976$. Величина $\sqrt{b_1}$ отличается от нуля лишь незначительно; следовательно, гипотезу $\sqrt{\beta_1} = 0$ можно

принять и кривую распределения считать симметричной. Коэффициент эксцесса, оценивающийся как $b_2 = 5{,}241$, является вполне значимым и кривая резко пикообразной, т. е. гипотеза $\sqrt{\beta}_2 = 3$ отклоняется и принимается $\sqrt{\beta}_2 \neq 3$, что не отвечает нормальной модели. Теперь необходимо рассмотреть природу отклонений от этой модели. Для этой цели рассчитана нормальная кривая с параметрами $\mu = 3{,}339$ и $\sigma = 2{,}442$ (гл. 13.5). Эта нормальная кривая накладывается на гистограмму фиг. 5.4. Затем отклонения по классам между наблюдаемой гистограммой и теоретической нормальной кривой проверяются по методу хи-квадрат (гл. 17.4) и они, конечно, оказываются вполне значимыми. Для классов ниже 10, ниже —2 и между 1 и 4 ϕ-единицами наблюдается избыток наблюдаемых значений по сравнению с ожидаемыми, а для классов от 1 до —2 от 4 до 10 ϕ-единиц — недостаток.

Имеется много возможных объяснений для этих расхождений. Предполагается, например, что есть недостаток мелких галек среди частиц осадочных пород [329, стр. 47], чем и можно объяснить дефицит в интервале от 1 до —2 ϕ-единиц. Наиболее примечательно то, что дефицит приходится также на частички пылеватых размеров (от 4 до 8 ϕ, или от 62,5 до 3,9 *мк*), которые изобилуют в осадочных породах. Избыток глинистых, песчаных и грубых гравийных частиц скорее всего объясняется применением специальных методик (рентгеноскопического анализа, изучения с помощью микроскопа и отдельных мегаскопических наблюдений). В то же время частицы промежуточного размера, т. е. находящиеся между теми, которые определяются рентгеноскопически и оптически, а также между теми, которые выявляются оптически и мегаскопически, могут выпасть из поля зрения исследователей. Если это объяснение справедливо, смещение, выраженное в форме кривой, должно обусловливаться селективностью работы оператора, а не ненормальным характером распределения. В настоящее время такое объяснение представляется наиболее приемлемым. Очевидно также, что, имея в виду подобное объяснение, нет смысла увеличивать число анализов, так как это приведет к еще большему искажению формы (степени пикообразности) кривой и увеличению смещения.

Таким образом, основываясь на умеренно больших выборках, можно заключить, что распределение медианных размеров зерен в пробах осадочных пород, в которых размеры зерен определены косвенными методами, будет близко к логнормальному. Поэтому среднее арифметическое $\bar{X}$ представляет собой несмещенную оценку среднего арифметического генеральной совокупности μ всех обломочных пород. Следовательно, значение μ близко к 3,339 ϕ-единицы, чему соответствует $\sim$100 *мк* [1]. Отсутствие асимметрии указывает на то, что увеличение размера проб существенно не изменит указанных значений. С другой стороны, оценка стандартного отклонения является, по всей вероятности, заниженной, так как на ошибки оценки дисперсии сильно влияют отклонения четвертого момента. Тем не менее, если мы примем за основу указанное значение, сможем считать, что $\mu \pm 3\sigma$ дает интервал размеров от —3,99 до 10,66 ϕ-единиц (приблизительно от 8 *мм* до 0,5 *мк*) и что примерно 3 медианы из каждой тысячи будут выпадать из этого интервала (99,7% площади нормальной кривой включается в интервал, равный $\pm 3\sigma$ относительно среднего; гл. 13.7). Таким образом, намечается возможное приближение к выяснению распределения размеров также и в тех случаях, когда размер определен по способу осаждения в пипетке или просеивания.

---

[1] Заметим, что среднее геометрическое не совпадает с оценкой среднего значения величины x, а является медианой.— *Прим. ред.*

5.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИХ В ШЛИФАХ

Определение размеров в шлифах значительно отличается от определений косвенными способами как по природе изучаемой независимой переменной — видимой длины (или сечения), так и по природе зависимой переменной, которая обычно выражается частотой. Независимая переменная, видимая длина, может быть определена как $P = f(s, sh, o, p)$. Эта мера содержит очень сложную информацию об изменении размера, формы, ориентировки и упаковки (степени плотности заполнения пространства зернами) и различных взаимодействий этих факторов. Эту меру трудно истолковать относительно собственно размера зерен. Несмотря на то что она, по-видимому, и имеет более прямое отношение к размеру, чем переменные, полученные при косвенных способах, все же уровень информации, заключенной в этой мере, вряд ли окажется выше интервального. С другой стороны, объем выборки n здесь строго определен и при проверке гипотез легко использовать понятие числа степеней свободы.

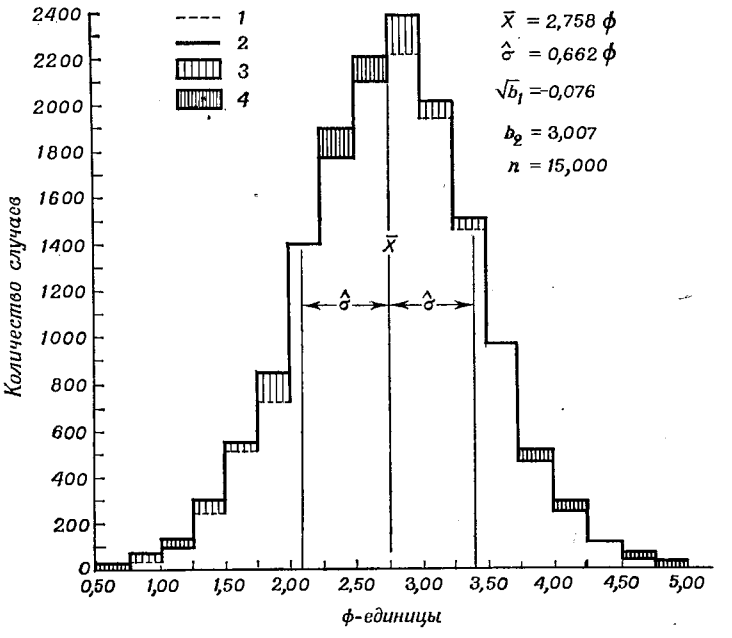
Можно использовать эмпирический подход для оценки результатов этого метода, так как имеется богатый справочный материал о таких анализах. Результаты анализов оказываются вполне согласующимися с теми, которые получены другими методами, хотя эти результаты несколько отличаются одни от других вследствие различной процедуры анализов. Очень важно знать пределы размеров зерен для данного метода. С одной стороны, измерять зерна диаметром меньше 5 ϕ-единиц (31,2 *мк*) чрезвычайно трудно, так как при наличии матрицы мелкие зерна почти не выделяются. С другой стороны, размер зерен может значительно превышать поле зрения микроскопа, что влечет за собой другие затруднения при измерениях. Для зерен кварца размером со среднюю песчинку этот способ прост и эффективен. Некоторые его ограничения описаны в литературе [57, 58, 63, 64, 112, 136, 241].

В данном случае также можно подойти к вопросу с точки зрения больших выборок. Примером такого рода служит изучение осадочной породы пачки Солт-Уош формации Моррисон (плато Колорадо) [164]. Тремя операторами (вернее, тремя группами операторов по 5 человек в каждой) здесь было выполнено около 16 000 измерений осей зерен кварца в 50 шлифах по 300 зерен в каждом шлифе. В каждом шлифе оператор выбрал 10 участков, каждый участок является полем зрения, в каждом поле зрения он выбрал 10 зерен. Результирующая гистограмма изображена на фиг. 5.5, а соответствующие статистики равны:

$$\overline{X} = 2{,}758; \quad \hat{\sigma} = 0{,}662; \quad \sqrt{b_1} = -0{,}076; \quad b_2 = 3{,}007.$$

В результате проверки гипотез $\sqrt{\beta_1} = 0$ и $\sqrt{\beta_2} = 3$ оказалось, что гипотеза $\sqrt{\beta_1} = 0$ отвергается, а $\sqrt{\beta_2} = 3$ принимается как не противоречащая выборочным данным. Далее, допустив, что изучаемая генеральная совокупность является ϕ-нормальной, можно рассчитать теоретическое нормальное распределение с параметрами $\mu = 2{,}758$ и $\sigma = 0{,}662$, затем рассчитанную гистограмму наложить на наблюдаемую, как это сделано на фиг. 5.5, где показана разница между наблюдаемым и ожидаемым распределениями. Больших расхождений здесь нет. Следовательно, нет и систематического смещения, а имеющиеся смещения, по-видимому, отражают ошибки опробования и особенно часто — трудности, возникающие при опробовании стратифицированной совокупности без адекватного определения границ слоя. Если мы примем, что изучаемая совокупность ϕ-нормальна, то к соблюдению условий случайного опробования не будут предъявлены какие-либо специфические требования, кроме рекомендации об увеличении числа проб. Можно ожидать, что при увеличении числа проб по достижении

удовлетворительного взвешивания (определения параметров) пласта величина асимметрии $\sqrt{b_1}$ будет стремиться к $\sqrt{\beta_1} = 0$. Число 0,076 невелико в абсолютном смысле, так что, возможно, понадобится взять лишь немного дополнительных проб. Однако вряд ли найдутся исследователи, готовые работать с выборками, объем которых превышает 15 000. Очевидно поэтому, что если распределение нормально, то при тщательно разработанном плане



Ф и г. 5.5. Распределение размеров осей зерен кварца при измерениях в шлифах [164].
Песчаники Солт-Уош, формация Моррисон, плато Колорадо.
1 — ожидаемое распределение; *2* — наблюденное распределение; *3* — наблюденное распределение больше ожидаемого; *4* — ожидаемое распределение больше наблюденного.

выборки несмещенные оценки можно получить при небольших выборочных объемах $n = 100 - 300$.

В табл. 5.5 представлен набор измерений в шлифах длинной оси *a* зерен кварца различных песчаников, а также даны характеристики особенностей отбора образцов, их количество, количество зерен и т. п. Почти на всех примерах продемонстрировано смещение в опробовании, выраженное значительной величиной асимметрии $\sqrt{b_1}$ или эксцесса b_2. Эти смещения можно объяснить главным образом трудностями при отборе случайных выборок из стратифицированной совокупности, когда границы пласта не определены. Идеальной схемой опробования была бы такая, при которой можно было бы измерить небольшие группы смежных зерен кварца (от 4 до 6 зерен), взятых из нескольких участков каждого шлифа, например из десяти участков, а при большом числе шлифов эти группы смежных зерен можно довести в среднем до 30—50. При выполнении этих условий смещение, обусловленное неправильным взвешиванием пласта, уменьшится (см. также гл. 17.3).

Средний размер зерен меняется от 0 до 4 ϕ-единиц, как это и можно было ожидать на основании «песчаного» размера зерен кварца. Стандартное отклонение меняется от 0,3 до 1,5 ϕ: для длинных осей хорошо отсортированных кварцевых зерен оно составляет около 0,3 ϕ, а для длинных осей наиболее плохо отсортированных оно достигает 1,0 ϕ (и больше). Следует также заметить, что для некоторых кварцитов, например кварцитов Орис-

Таблица 5.5

Данные изменений длинных осей зерен кварца в песчаниках (в шлифах)

Горизонт (формация)	Обнажение	$\overline{X}_\phi$	$\hat{\sigma}_\phi$	$\sqrt{b_1}$	b_2	Кварц, %	Количество шлифов	Количество зерен	Всего верен	Местоположение	Название пород
Тускарора [457]	T_1	1,948	0,532	0,148	3,457**	77,9	20	25	500	Пенсильвания	Кварцит
	T_2	1,836	0,454	0,008	3,764**	77,9	20	25	500	»	»
Тускарора [273]		1,823	0,966	—0,279**	2,546×		46	25	1,175	»	»
Хомвуд [457]	H_1	1,080	0,673	—0,244*	3,203	70,1	20	25	500	»	»
	H_2	1,535	0,558	0,109	3,117	70,1	20	25	500	»	»
Орискани [457]	O_1	1,586	0,377	0,068	3,886**	94,1	20	25	500	»	»
	O_2	1,381	0,500	0,433	3,487*	94,1	20	25	500	»	»
Орискани [363]		1,659	1,040	—0,075**	3,650**	87,0	87		9,746	Нью-Йорк — Кентукки	»
Сен-Питер [146]		1,833	0,906	0,291**	2,717		13	40	520	Оттава, Иллинойс	»
Барабу [146]		1,798	0,824	—0,527	3,804		13	40	520	Висконсин	»
Шерон [146]		0,565	0,861	—0,406**	4,119××		17	20	340	Огайо	»
Песчаники Кау-Ран [167]		1,240	0,703	1,196**	3,494**	39,7	38	40	1,520	Западная Виргиния	
Песчаники Мэкстон [146]		1,461	0,631	—0,076×	3,612**	51,1	33	40	1,320	» »	Субграувакки
Песчаники Уэйр [146]		3,650	0,37	0,301**	2,920**	51,1	19	40	760	Кентукки	»
Песчаники Чипманк [410]		2,760	0,660	—0,076**	3,007	53,5	71	35	2,485	Нью-Йорк — Пенсильвания	»
										То же	»
Песчаники Чипманк [319]		2,990	0,557	0,099	3,382	55,3	48	20	960		
Средний Киттанинг [399]		1,975	0,837	1,228**	2,333**	43,7	75	20	1,520	Пенсильвания	»
Поконо [113]		2,870	1,070	0,068	2,555**	62,2	16	50	800	»	»
Берна [113]		3,370	0,720	0,402**	3,700**	63,2	16	50	800	Огайо	»
Поттсвиль [273]		0,892	0,836	—0,225**	3,231×		54	26	1,348	Восточная Пенсильвания	»
Солт-Уош [164]		2,758	0,662	—0,075**	3,007	61,0	50	300	15,000	Плато Колорадо	Аркозовые кварциты
Лайонс [202]		2,359	0,811			48±	32	36	1,152	Колорадо	Аркозы
Фаунтин [202]		2,307	0,914			45±	49	36	1,764	»	»
Уэйнсберг [399]		1,452	1,024	1,228	2,333	49,8	75	20	1,500	Пенсильвания	»
Палеозойские «гравелиты» [146]		1,888	1,111	0,223	3,201	27,6	7	40	280	Великобритания	Граувакки

Примечание. Повсюду в книге приняты следующие условные знаки: одна звездочка при цифре — существенно при 5%-ном уровне значимости; две звездочки — при 1%-ном уровне значимости: три звездочки — при 0,1%-ном уровне значимости; косой крестик — несущественно.

кани, стандартное отклонение колеблется от 0,3 до 0,8 ϕ-единиц, т. е. эти кварциты довольно хорошо отсортированы, в то время как вся формация в целом отличается плохой сортировкой ($\hat{\sigma} = 1{,}0$ ϕ-единиц). Последнее качество свойственно кварцевым зернам большинства формаций. Таким образом, диапазон изменений размеров кварцевых зерен можно оценить как три стандартных отклонения вправо и влево от среднего значения либо от 0 до 6 ϕ-единиц относительно среднего, равного 3 ϕ. Схема опробования, необходимая для оценки стандартного отклонения в установленных доверительных пределах, рассчитана в гл. 17.3 с использованием диапазона от 0,3 до 1,5 ϕ-единиц.

Характерно, что в большинстве случаев при косвенных способах измеренное среднее значение связано некоторым отношением с дисперсией ([151, 212] и гл. 15), а при измерениях длинных осей зерен кварца в шлифах эти величины независимы [167]. В случайных выборках из нормальной совокупности среднее значение независимо от дисперсии и стандартного отклонения. Это условие необходимо выполнять при отборе проб, если для характеристики размеров зерен породы нужно получить обе основные оценки.

5.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПРИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Прямой способ измерения зерен чрезвычайно заманчив. Определяя размеры осей отдельных свободных зерен кварца, мы получаем меру, непосредственно относящуюся к понятию размера $P = f(s, sh)$. Как упоминалось выше, информация, получаемая в результате этих измерений, достигает так называемого уровня шкалы отношений. Кроме того, вполне вероятно, что переменная находится здесь в прямом отношении к скорости потока, как 1 : 1 (гл. 13), так что этот способ обеспечивает интерпретацию относительно энергии происходивших процессов, являясь тем самым мощным средством петрологических исследований. Одна из положительных сторон этого способа состоит в том, что он дает возможность измерять частицы любых размеров — от пылеватых до крупных глыб. Занимаясь изучением частиц кварцевого состава, имеющих самый разный размер, мы знакомимся с максимальным диапазоном изменений размеров и других частиц.

Пай [338] был одним из первых исследователей, рекомендовавших этот способ. Многие исследователи анализировали этим способом галечниковые отложения (для справок см. работу [329, стр. 51—54]). Хале [203] разработал альтернативный способ, позволяющий одновременно измерять характеристики формы и размера, обеспечив тем самым оценку $P = f(s, sh)$ путем «чистого измерения». Таким образом, этот способ дает возможность отделить изменчивость размера от изменчивости формы с помощью математического анализа [181]. Измерение совместной изменчивости в размере и форме обеспечивает получение очень ценных данных, отражающих малейшие изменения и пригодных для детальных реконструкций условий осадконакопления [28, 204, 295].

При этом способе объем выборки n определяется непосредственно, и здесь можно применить понятие числа степеней свободы; статистические оценки, получаемые на основе метода моментов, можно использовать для проверки гипотез. Для выяснения распределения генеральной совокупности здесь используется логнормальная, или ϕ-нормальная, модель. При условии детального изучения размеров осей зерен кварца и тщательно обдуманного и проведенного опробования эта модель дает возможность получить распределение, лишь незначительно отличающееся от нормального, получаемого в результате случайного опробования [163, 167, 169, 170, 176].

Было обнаружено, что если генеральная совокупность полностью доступна, как, например, хорошо обнаженная стенка шурфа [170] или расчистка

делювия [169], и бороздовые пробы отбираются по всей доступной (в данном случае существующей) совокупности, то получаемые статистические оценки существенно не отличаются от ожидаемых для случайной выборки из нормальной совокупности. Если берутся стратифицированные случайные выборки, число наблюдений в выборке и число опробуемых слоев являются определяющими для получения несмещенных оценок. Как и следовало ожидать, при умело сбалансированном опробовании оценки приближаются к оценкам из нормальной совокупности. При точечном опробовании стратифицированных пород некоторые слои попадают в выборку дважды, другие, наоборот, совершенно выпадают из сферы опробования. Получаемые здесь оценки довольно далеки от несмещенных (см., например, работы [169, 170, 411, 412]). При изучении шлифов процедура выбора зерен близка к точечному опробованию, чем и объясняется значительная асимметрия и эксцессивность распределения. Было обнаружено, что если выборка относится к одной и той же гомогенной генеральной совокупности, например к слою или единице седиментации, она должна состоять из 30—50 элементов, всего же нужно опробовать 16—20 слоев. Такая схема отбора представляется наиболее оптимальной [169, 170, 176, 411, 412]. Многочисленные испытания модели опробования, показанные на фиг. 2.3, свидетельствуют о том, что для достижения несмещенных оценок по случайным выборкам нужны очень тщательно сбалансированные схемы опробования и что даже небольшие отклонения вносят значительное смещение. Поэтому, чтобы добиться случайного опробования логнормальной, или ϕ-нормальной, совокупности, необходим точный контроль всей программы опробования. Наиболее просто контроль можно осуществить с помощью непосредственного измерения отдельных элементов (зерен или галек). Ни путем измерений в шлифах, ни косвенными способами (метод пипетки или просеивания) такого контроля осуществить нельзя без помощи очень сложных специальных исследований. При измерении в шлифах хорошо сбалансированную программу опробования очень трудно составить без предварительных специальных исследований. В случае косвенных способов пробы точечного опробования составляют 20 *г* или от 100 до 150 *г*, в то время как для получения оценок, близких к несмещенным, требуется значительно больший объем выборок.

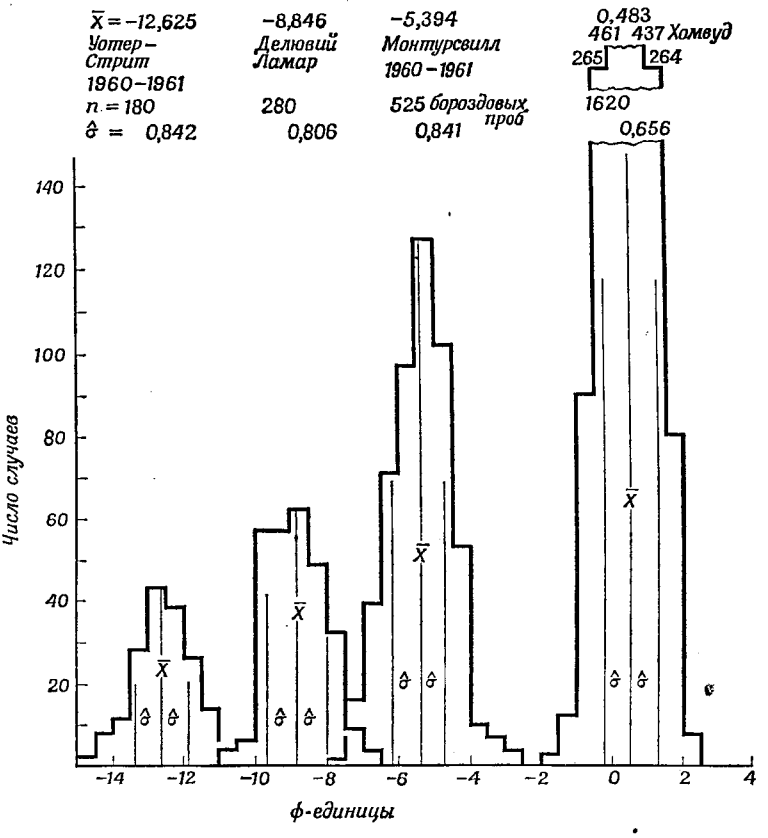
Несколько отдельных примеров прямых измерений иллюстрируется на фиг. 5.6 и в табл. 5.6. Они характеризуют одни и те же совокупности;

Таблица 5.6

Сводные статистические характеристики длинных осей a частиц осадочных пород по данным прямых измерений

Статистики	Педро, Калифорния [205]			Пенсильвания [170, 171 и неопубликованная работа]			
	пляж, 1 схема опробования	Дюны	пляж, 2 схема опробования	Хомвуд, 1955—1956	галечники Монтурсвилла, бороздовое опробование	щебенка Тускарора	
						Уотер-Стрит, 1962	Ламар
$\overline{X}$	1,218	1,206	1,665	0,483	—5,394	2,678	—8,846
$\hat{\sigma}$	0,399	0,340	0,328	0,656	0,841	0,833	0,806
$\sqrt{b_1}$	—0,704**	—0,076	—0,186	—0,017	0,035	0,016	—0,151
b_2	5,475**	3,224	3,397×	2,929	2,860	2,765	2,673
N	250	250	600	1,620	525	436	280
χ^2	17,637	5,532	23,639	6,612	13,39	5,74	16,10
Число степеней	7	5	6	6	8	7	6
P	$0{,}02 > P > 0{,}01$	$50 > P > 30$	$< 0{,}001$	$50 > P > 30$	$10 > P > 5$	$50 > P > 10$	$0{,}02 > P > 0{,}0$

эти измерения проводили с целью решения некоторых задач опробования [1] [169, 176, 179]. Изученные совокупности относятся к крайним стадиям модели опробования (фиг. 2.3): делювий формации Тускарора представляет примерно стадию *1* модели, а галечники Монтурсвилла и кварциты Хомвуда (Потсвилл) аппроксимируются к стадии *3* модели. Рекомендуется при любой первоначальной попытке использовать схему опробования, разработанную для стадии *3* стратифицированной совокупности. Если при этом



Ф и г. 5.6. Распределение размеров длинных осей *a* частиц некоторых обломочных пород.

окажется, что совокупность относится к стадии *1*, следует помнить, что это не повлечет за собой каких-либо потерь, если не считать того, что объем выборок мог бы быть несколько меньшим [411, 412]. Если совокупность принадлежит стадиям *2* или *3*, оценки будут скорее всего несмещенными, либо, во всяком случае, на основании их можно будет дать точные и строгие рекомендации для получения случайных выборок. Если программа опробования, пригодная для стадии *1*, применяется к стадии *3* совокупности, оценки окажутся либо смещенными, либо несмещенными. В цоследнем случае пробы по характеру приблизятся к бороздовым и мы получим лишь среднее арифметическое совокупности и ее дисперсию. В этом случае будет потеряна важная информация об изменчивости размеров зерен внутри пласта и между пластами, что подчас оказывается принципиально необходимой информацией для интерпретации условий осадконакопления. Напри-

[1] Эксперименты выполнены студентами Пенсильванского университета под руководством автора.

мер, диапазон изменений размеров кварцевых зерен ледниковых наносов и морских пляжей вполне может быть одинаковым и даже средние значения могут быть близкими, тем не менее морена плохо стратифицирована, т. е. приближается к стадии *1*, в то время как пески морских пляжей будут почти наверняка относиться к стадии *3* [411, 412]. Следовательно, особенности изменчивости внутри выборки и между выборками имеют решающее значение в определении степени селективной сортировки и как следствие — в установлении условий осадконакопления.

В табл. 5.6 приведено слишком мало выборок, чтобы можно было говорить о диапазоне средних значений, который находится в широких пределах — от 1 ϕ-единицы (500 *мк*) до 13 ϕ-единиц. В то же время породы, сведенные в таблице, представляют разную степень сортировки со стандартным отклонением от 0,3 до 0,84 ϕ-единиц. Как и следовало ожидать, наиболее хорошо отсортированными породами являются пляжные и дюнные пески со стандартным отклонением около 0,3 ϕ (сравните с данными сортировки, полученными путем измерения длинных осей зерен кварца в шлифах). Для делювия можно было ожидать широкого диапазона изменений размеров, и действительно, стандартное отклонение достигает здесь около 0,8 ϕ. Размах величины изменений длинных осей галек кварцитов из галечников Монтурсвилла приближается к величине булыжников из делювия. Различия между этими отложениями лежат в степени сортировки внутри проб и между пробами, причем делювий напоминает стадию *1*, а галечники приближаются к стадии *3*.

На примере двух серий исследований длинных осей зерен кварца пляжа в Педро, графство Сан-Матео (Калифорния) [204], иллюстрируется эффект различных схем опробования. Согласно схеме 1, было отобрано 5 точечных проб по 50 зерен в каждой, а по схеме 2, представляющей попытку стратифицированного случайного опробования,— по 6 зерен, взятых из проб, состоящих из 20—50 зерен, отобранных по сетке в 100 точках. Сетка была построена пятью вертикальными линиями, расположенными на расстоянии двух дюймов одна от другой, и 20 горизонтальными, проведенными через полдюйма. Среднее значение и стандартное отклонение по 600 зернам (схема 2) сходны с соответствующими статистиками, полученными по 250 зернам (схема 1). Однако показатели асимметрии и эксцесса по схеме 2 значительно меньше, чем по схеме 1, что служит указанием на то, что, если стратифицированное опробование достигает условий случайной выборки, оно приносит несмещенные статистики. Если проверить гипотезу о нормальности с помощью χ^2-критерия, никакой из рассматриваемых анализов не приведет к нормальному распределению; отклонения по схеме 1 встречаются как в центре, так и по краям распределения. Основные отклонения по схеме 2 заключены в двух центральных классах. Единственная рекомендация, которую можно дать с целью улучшения схемы 1,— это увеличить как число проб, так и их размер. С другой стороны, ожидаемая ϕ-нормальная модель схемы 2 требует большего количества измерений в центральной части распределения.

5.9. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЗЕРЕН

Судя по опубликованным данным, имеется широкая область применения результатов определений размеров (для справок см. [329, стр. 54]). Работы по определению размеров начаты довольно давно и на них затрачиваются значительные средства. В результате этих работ получено много различных данных, но все они остаются в основном чисто эмпирическими качественными данными, не обеспечивающими однозначной петрологической интерпретации. Некоторые причины такого неудовлетворительного положения уже рассматривались. Обычно уровень получаемой информации оказывается недо-

Таблица 5.7

Сводная таблица статистических характеристик, используемых при изучении распределений размеров зерен

Название статистики	Символ	Способ получения	Примечание и литературная ссылка
Характеристики центра распределения			
Медиана, *мм*	Md	Графический — диаметр, отвечающий 50% кумулятивной кривой	Характеризуется лишь среднее местоположение. Для математических манипуляций не используется
Медиана, ϕ	Md_ϕ	$Md_\phi = -\log_2 Md$	
Мода, *мм*	*Mo*	Графический — самая высокая точка кривой распределения	Для математических манипуляций не используется. Характеризует господствующий размер в данном распределении
Мода, ϕ	Mo_ϕ		
Среднее арифметическое, *мм*	$\overline{X}$	Для несгруппированных значений: $\frac{\sum X_i}{N}$	Используется для математических манипуляций. Представляет центр тяжести площади фигуры распределения, т. е. «вес × расстояние» середины класса
	M_σ	Для сгруппированных значений $\frac{\sum (f \text{ — середины класса})}{f}$	
Среднее геометрическое, *мм*	M_g	$\sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \ldots X_N}$ $\sum (f \text{ — } \log_{10} \text{ середины класса}) = \text{антилогарифм}$ Путем прямого $\sum f$ пересчета среднего арифметического ϕ-распределения	Используется для математических манипуляций. Среднее арифметическое логарифмов соответствует среднему геометрическому антилогарифмов
Среднее арифметическое или среднее логарифмов (Крамбейн)	$\overline{X}_\phi$	$\frac{\sum (f \text{ — } \phi\text{-середины класса})}{\sum f}$ Получается как первый момент (см. таблицу расчета моментов)	Употребляется наиболее часто, наиболее важное выражение центра тяжести площади фигуры распределения. Используется при математических манипуляциях
Среднее ϕ Инмана	M_ϕ	$\frac{P_{16} + P_{84}}{2}$	Inman, 1952
Среднее Фолка	M_z	$\frac{P_{16} + P_{50} + P_{84}}{3}$	Folk, 1957
Меры дисперсии			
Квартильное отклонение, *мм*	QD_σ	$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$	Мера половины 50% распределения; только линейная мера, для математических манипуляций не используется
Квартильное отклонение, ϕ	QD_ϕ	$\frac{Q_{3\phi} - Q_{1\phi}}{2} = \log_2 S_0$ (S_0 — коэффициент сортированности Траска)	

Продолжение табл. 5.7

Название статистики	Символ	Способ получения	Примечание и литературная ссылка
		Меры дисперсии	
Квантильное отклонение, ϕ	PD_ϕ	$\frac{P_{90\phi}-P_{10\phi}}{2}$	Мера половины основной (средней) части распределения, составляющей 80%; только линейная мера, для математических манипуляций не используется
Коэффициент сортированности Траска	S_0	$\sqrt{\frac{Q_3}{Q_1}}$ = антилогарифм с основанием 2 от QD_ϕ	Трудно определимое относительно его размаха значение, так как измеряется по геометрической шкале
Арифметическое стандартное отклонение, *мм*	σ_ϕ	$\frac{\sqrt{\sum[f(\text{середина класса}-\bar{X})^2]}}{\sum f}$	Мера среднего размаха кривой относительно M_σ; в случае открытых усеченных кривых не используется
Арифметическое стандартное отклонение или логарифмическое стандартное отклонение, ϕ	σ_ϕ	Вычисляется по второму моменту (см. таблицу расчетов моментов) На логарифмической вероятностной бумаге определяется по формуле $\frac{P_{84,2}-P_{15,8}}{2}$	Мера среднего размаха кривой относительно M_ϕ; наиболее широко используемая и наиболее важная мера дисперсии (в ϕ-единицах)
Геометрическое стандартное отклонение, *мм*	σ_g	Превращение в миллиметры из σ_ϕ	
ϕ-отклонение Инмена	σ_ϕ	$\frac{P_{84}-P_{16}}{2}$	Inman, 1952
Графическое стандартное отклонение	σ_1	$\frac{P_{84}-P_{16}}{4}+\frac{P_{95}-P_5}{6,6}$	Folk, Ward, 1957
		Меры асимметрии	
Квартильная асимметрия, *мм* (арифметическая)	Sk_σ	$\frac{Q_1+Q_3-2\text{Md}}{2}$	Арифметическое линейное измерение расстояния между арифметическими средними двух квартилей и медианой
Геометрическая квартильная асимметрия, *мм*	Sk_σ	$\sqrt{\frac{Q_1/Q_3}{\text{Md}^2}}$ $\log Sk_q = \frac{\log Q_1+\log Q_3-2\log \text{Md}}{2}$	Геометрическая форма Sk_σ. Соотношения с Sk_σ аналогичны соотношению коэффициента Траска к квартильному отклонению

Продолжение табл. 5.7

Название статистики	Символ	Способ получения	Примечание и литературная ссылка
Меры асимметрии			
Логарифм асимметрии Траска, *мм*	$\log Sk$	$\log \frac{Q_1 Q_3}{\mathrm{Md}^2}$	Это логарифм квадрата Sk_σ, Q_1, Q_3 и Md в миллиметрах
ϕ-квартильная асимметрия	$Sk_{q\phi}$	$\frac{Q_{1\phi}+Q_{3\phi}-\mathrm{MD}_\phi}{2}$ $\frac{-\log Sk\ (\text{Траска})}{0{,}602}$	Арифметическая мера лограсстояния
ϕ-асимметрия	Sk_ϕ	Рассчитывается по третьему моменту	В случае открытых усеченных кривых не используется
ϕ-асимметрия	α_ϕ	$\frac{M_\phi-\mathrm{Md}}{\phi}$, σ_ϕ, или $\frac{P_{16}+P_{84}-2P_{50}}{P_{84}-P_{16}}$ $\frac{(P_5+P_{95})/2-\mathrm{Md}_\phi}{\sigma_\phi}$,	Inman, 1952
Вторая ϕ-асимметрия	$\alpha_{2\phi}$	или $\frac{P_5+P_{95}-2P_{50}}{P_{84}-P_{16}}$	
Статистики, отражающие графическую асимметрию	Sk_I	$\frac{P_{16}+P_{84}-2P_{50}}{2(P_{84}-P_{16})}$; $+\frac{P_5+P_{95}-2P_{50}}{2(P_{95}-P_5)}$	Folk, Ward, 1957
Меры эксцесса			
Квартильная мера эксцесса, *мм*	K_{qa}	$\frac{P_{90}-P_{10}}{Q_3-Q_1}$	(P_{90}, P_{10}, Q_3, Q_1 в миллиметрах). По Крамбейну
ϕ-квартильная мера эксцесса	$K_{q\phi}$	$\frac{P_{90}-P_{10}}{Q_3-Q_1}$	То же в ϕ-единицах
ϕ-эксцесс	K_ϕ	Вычисляется по четвертому моменту	Крайне чувствителен на концах кривой распределения
ϕ-мера эксцесса	β_ϕ	$\frac{(P_{95}-P_5)/2-\sigma_\phi}{\sigma_\phi}$ или $\frac{(P_{95}-P_5-P_{84}-P_{16})}{P_{84}-P_{16}}$ или $\frac{P_{95}-P_5}{P_{84}-P_{16}-1{,}0}$	Inman, 1952
Графический эксцесс		$\frac{P_{95}-P_5}{2{,}44(P_{75}-P_{25})}$	Folk, Ward, 1957

Q_3 — 25-процентный квантиль в миллиметрах, соответствующий 75-процентному квантилю в ϕ-единицах.
Q_1 — 75-процентный квантиль в миллиметрах, соответствующий 25-процентному квантилю ϕ-единицах.
P_5 — диаметр в ϕ-единицах, соответствующий 5-процентному квантилю.
P_{25} — диаметр в ϕ-единицах, соответствующий 25-процентному квантилю.
P_{50} — диаметр в ϕ-единицах, соответствующий 50-процентному квантилю.
P_{75} — диаметр в ϕ-единицах, соответствующий 75-процентному квантилю.
Литературный источник. M. A. Rosenfeld, Handbook of Laboratory Instructions.

статочным для интерпретации, что можно объяснить неадекватной процедурой самих определений, ошибками опробования (и, следовательно, смещенными оценками), а также отсутствием строгого подхода к решению поставленных задач. Для выхода из создавшегося положения рекомендуются различные альтернативы, правомочность которых необходимо проверять эмпирически до их применения. На сегодняшний же день получаемые данные по распределению размеров используются как описательные. Это скорее атрибут петрографии, чем петрологии.

Попытки выяснить условия осадконакопления посредством данных о распределении размеров зерен являются довольно обычными. Петтиджон наряду с обзором этих попыток предъявил некоторые требования, которым должны отвечать результаты определений. В то же время для некоторых специфических конкретных исследований результаты определения размеров оказывают весьма ценную услугу. Например, они вполне пригодны для качественной характеристики условий осадконакопления [15, 99, 133, 137, 152, 246]. Взаимоотношения между размерами зерен и сортировкой рассматриваются в гл. 15. Данные определений размеров зерен также весьма существенны при решении специфических инженерных вопросов [152].

Можно показать, что размеры зерен нефтеносных пластов во многих случаях обусловливают их коллекторские свойства [73, 211, 254] и что изменение размеров зерен является критическим фактором при определении сферы влияния нефтеносных пластов [152, 167, 172, 180, 309, 404, 410].

Очевидно также, что размер зерен является одним из основных свойств, характеризующих какой-либо агрегат. Но если нужно определить качество или уровень информации, почти совершенно необходимо проанализировать полученные данные с помощью некоторых приемов многомерного анализа [181, 186, 190, 309].

ГЛАВА 6

Измерение формы зерен

Тем не менее существуют многообразия, в которых фиксированной точке ставится в соответствие не конечное множество, а бесконечная последовательность или непрерывное многообразие определения данной переменной. Такие многообразия порождаются, например, множеством возможных определений функции данного аргумента, множеством возможных форм фигуры в пространстве и т. п.

C. F. B. Riemann, *in* D. E. Smith (ed.), A Source Book in Mathematics, Harvard Univ. Press., p. 415, 1929

6.1. ВВЕДЕНИЕ

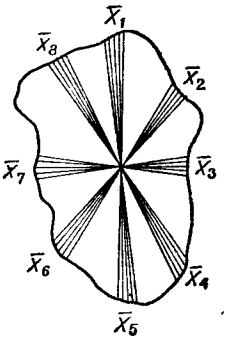
Общий план рассмотрения каждого основного свойства обычно сводится к следующему. Сначала дают формулировку понятию, которое затем будет преобразовано в операционное определение; после этого переходят к разработке и испытанию различных методов получения информации, и, наконец, предпринимается попытка собрать необходимые данные. Далее следует изучение распределения полученных значений и плана выборок, а также возможная интерпретация этих значений вновь приведет нас к осмысливанию данного понятия. Следует, однако, помнить, что измерение свойств представляет собой лишь метод для достижения некоторой цели, так что успех измерений в конечном счете оценивается на основании объема полученной информации, приближающей нас к этой цели.

Форма является, вероятно, главнейшим свойством любой частицы, и, безусловно, это свойство из всех наиболее трудноопределимое в любых случаях, кроме простейших; тем не менее, поскольку в силу привычки форма признается важнейшим диагностическим критерием многих минеральных компонентов и вполне сознательно считается, что форма зерен отражает происхождение и процесс формирования осадочных пород, постольку она остается одним из важнейших свойств обломочных частиц.

Понятие «форма» тавтологически можно определить как внешний облик или как выражение внешней морфологии. Теоретически форма, безусловно, может рассматриваться как свойство, не зависящее от величины тела, и понятие формы в топологии иллюстрирует эту независимость; фактически же отделить свойство формы от размера почти невозможно или, во всяком случае, это не реально, и сомнительно, чтобы их можно было определять раздельно при изучении свойств частиц осадочных пород. Один из способов измерения формы состоит в определении кривизны поверхности путем измерения радиуса (см., например, работы [277]); это наиболее общий метод, в котором предусмотрена возможность измерения как положительной, так и отрицательной кривизны. Он напоминает методику измерения округлости, предложенную Уоделлом [437—439]. Такая методика требует выполнения комплекса измерений и при усложнении этого комплекса увеличиваются

трудности ее применения; неясным оказывается также и смысл выраженной этим методом «средней формы». Тем не менее в отличие от многих других методик преобразования понятия «формы» в операционное определение способы Уоделла и их последующие модификации являются, вероятно, наиболее приемлемыми.

В общем методика измерения формы частиц должна следовать путем рассмотрения формы правильных твердых тел; так, форма сферы может быть выражена через длину одного диаметра, куба — через длину любой заданной оси, прямоугольного блока — через длину трех осей (трех любых перпендикулярных ребер); итак, по мере усложнения формы тела или (если форма не была определена заранее) для ее полного определения необходимо проводить все большее и большее число измерений. Фактически, если мы выберем произвольный центр внутри частицы, скажем центр наибольшего описанного круга, согласно рекомендации Уоделла [437], и измерим длину нескольких радиусов, соединяющих центр с краями, как показано на фиг. 6.1, процесс определения формы можно свести к простейшей задаче. Для гладкой выпуклой поверхности количество осей, необходимых для полного определения формы, было бы небольшим (наименьшее, например, — две оси для сферы), но количество необходимых осей увеличивается по мере того, как частица становится менее сферичной. Если поверхность частицы становится волнистой, отдельные неровности поверхности могут быть определены с любой требуемой степенью точности путем рациональной группировки радиусов в пучки. Анализ вариантов систем радиусов привел бы к определению количества необходимых измерений и тех направлений, по которым надо произвести эти измерения для определения формы с любой требуемой степенью точности. Чем неправильнее форма, тем больше требуется измерений в целях повышения точности измерения этой формы. Так, Уоделл рекомендовал измерение сферичности и степени округлости для определения формы сферичных или несколько менее правильных частиц, и лишь позднее он ввел в измерения показатель структуры поверхности [248, стр. 303 и далее]. Если, однако, следовать этому принципу, окажется, что увеличение степени детальности не имеет предела, т. е. для измерения сферы требуется небольшое количество измерений, для эллипсоида — больше, может быть три, неправильного эллипсоида — больше трех. Всегда можно выбрать две частицы равной сферичности и округлости (окатанности) с одинаковой структурой поверхности и все же различной формы. Представляется, что, следуя такими путями, невозможно приблизиться к окончательному решению проблемы.



Фиг. 6.1. Измерение формы неправильных частиц.

Сравните дисперсии X_i (окатанность) и X (сферичность).

Концепции формы частиц осадочных пород ведут свое начало от представлений о генезисе обломочных зерен; авторы этих концепций, сознательно или нет, считали, что общая форма частиц зависит от их первоначального габитуса, окатанность — от условий переноса, а структура поверхности — от определенных особенностей окружающей среды и т. д. На основании такого рода предположений редко удается получить равноприемлемые решения проблем измерения, поскольку обычно эти предположения нечетко сформулированы и чрезвычайно упрощены. Более обещающей представляется попытка, которая заключается в более точном определении цели с последующим развитием методики измерений, направленной на достижение этой цели. Так, путем определения объема кварцевых галек может быть показано, что три любые ортогональные оси будут определять объем с точностью около 98% [194]. Дополнительные измерения по любым другим

осям прибавят очень мало информации. В самом общем виде мы вынуждены признать, что для определения формы неправильных частиц требуется n измерений. Поэтому представляется необходимым каким-то образом выбрать из этих измерений некий минимум, и решение о том, какой именно, становится в этом случае функцией точности, требуемой для достижения намеченной цели. В конечном счете, так же как и в методике определения размеров частиц, измерения формы выразятся в виде каких-то чисел на некоей шкале, и объем шкалы, зависящий от характера требуемой информации, будет определять, имеют ли смысл данные числа. Если этот смысл ясен, сбор информации таким методом автоматически станет широко распространенным; если же он не ясен и собранные данные не увеличивают наших знаний об исследуемом агрегате частиц, будь то осадочная порода или галактические туманности, методика измерений в целом не будет применяться.

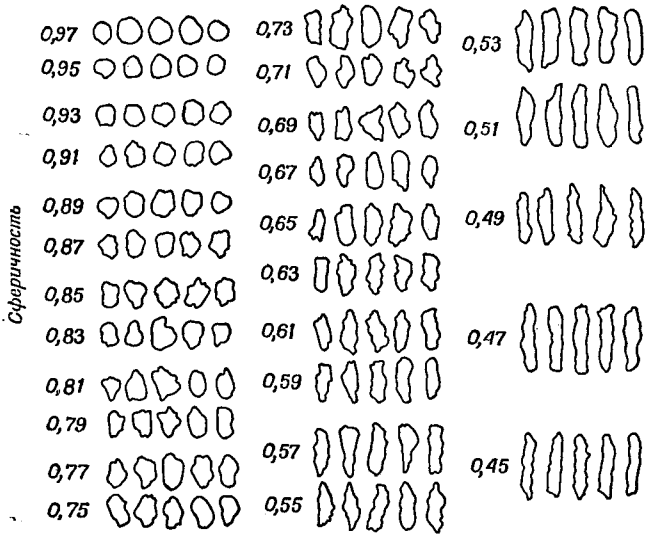
6.1.1. Последовательность операций

Многочисленные методы измерения тех или иных характеристик формы можно разделить на прямые и косвенные. Косвенные методы измерения размера частиц обычно требуют допущения о существовании фактора формы; аналогично, любые попытки косвенного определения формы — сортировка в воде или в воздухе, скатывание по наклонной поверхности и т. п.— будут требовать определенных ограничений размера или допущений относительно размеров частиц. Может показаться странным, что в противоположность методу измерения размера зерен, так мало методов косвенного измерения формы частиц и что несомненное большинство методов было разработано для рассмотрения формы отдельно взятых частиц. Однако благодаря этому обстоятельству мы можем упростить основное уравнение для разбора методики измерения формы и рассмотреть два обычно используемых способа. Первый из них употребляется при использовании шлифов, когда выбирают один какой-нибудь минерал, например кварц, и измеряют его форму. При втором способе требуется дезинтеграция минерального агрегата и выделение отдельных зерен. Для производства самих измерений может быть использовано несколько различных способов, однако почти все они требуют одной из двух подготовительных операций. Для рассмотрения этих способов мы прежде всего обратимся к простейшим и наиболее широко применяемым методам, например к методу визуальной оценки различных характеристик формы путем сравнения с наборами стандартов.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПУТЕМ ВИЗУАЛЬНОГО СРАВНЕНИЯ С НАБОРОМ СТАНДАРТОВ

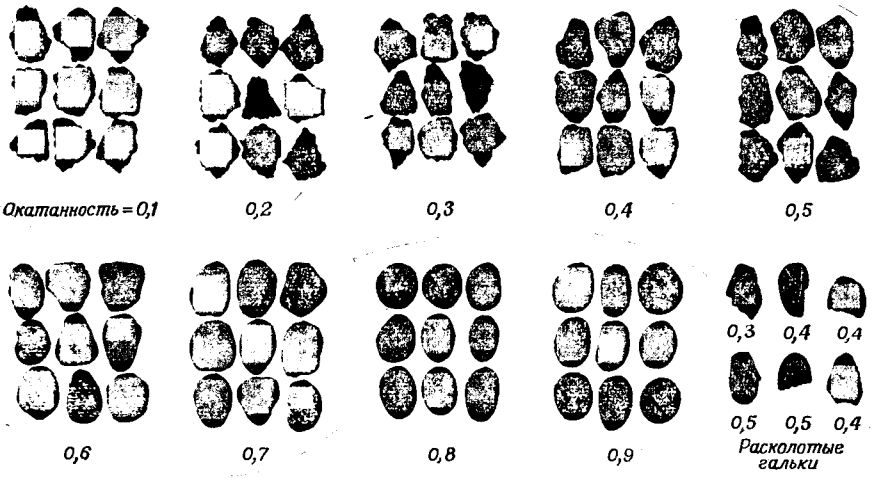
Метод визуального сравнения со стандартами привлекает своей простотой. Он весьма широко распространен в обычной практике как полевых, так и лабораторных исследований, но его простота обманчива. У него есть весьма коварные недостатки. Прежде всего этот метод является психофизическим способом субъективной оценки, так что здесь почти всегда имеет большое значение субъективное восприятие исследователя, в силу чего разные наблюдатели приходят к различным результатам. Более того, даже результаты измерений, произведенных одним и тем же наблюдателем, изменяются от случая к случаю. Таким образом, при этом методе необходимо соблюдать крайнюю осторожность для обеспечения рациональной воспроизводимости результатов. Определение минералов, остатков фауны и типов пород в образцах непосредственно в поле или под микроскопом в очень большой степени субъективно и самым непосредственным образом является функцией опытности наблюдателя. Методы оценки цвета и других качеств горных пород были предметом продолжительных исследований, в результате чего по этим

вопросам накопилась обширная литература. Примерами такого рода исследований могут служить ранние работы Юля [463] об интенсивности темных окрасок, работы Пирсона о различных признаках животных [324, 325, 327]



Ф и г. 6.2. Контуры зерен для визуальной оценки сферичности [357].

и совсем недавние исследования признаков, зависящих от чувствительности восприятия [79, 80, 414, 415, 422]. Следующий ниже обзор попыток усовершенствования методов визуального сравнения для оценки формы может



Ф и г. 6.3. Контуры зерен для визуальной оценки округленности [252].

служить примером, показывающим некоторые скрытые опасности этих методов.

Задача состоит в определении сферичности и окатанности 21 зерна кварца, выбранного из пляжного песка, путем сравнения с набором стандартных изображений, показанных на фиг. 6.2 и 6.3. Начнем со следующего

уравнения:

$$P = f(m, s, sh, o, p),$$

где m — постоянно; коль скоро зерна свободно лежат на предметном стекле, влияние o и p устранено. Различия в размерах зерен невелики и ими можно пренебречь для настоящей цели [1]. Таким образом, предполагается, что величина P есть некая мера формы.

Величина сферичности этих 21 зерен изменяется в пределах от 0,71 до 0,93, а величина окатанности — от 0,10 до 0,80. Семь наблюдателей производили измерения каждого из этих 21 зерен в течение трех дней, что позволило получить $3 \times 7 \times 21 = 441$ оценку сферичности и столько же — окатанности. Сводка соответствующих статистик этого распределения приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Сводка статистик сферичности и округлости по 21 зерну из пляжных песков

Статистики	Сферичность	Округлость
$\overline{X}$	0,817	0,424
$\hat{\sigma}$	0,045	0,131
$\sqrt{b_1}$	0,203*	−0,329***
b_2	2,656*	2,766
n	441	441
χ^2	87,07	41,84
Число степеней свободы	6	4
P	$<0{,}001$	$<0{,}001$

Распределение явно отклоняется от нормального и заметно асимметрично; среднее значение сферичности не зависит от дисперсии, а средняя окатанность оказывается зависимой ($r = -9{,}4272$, а при $n = 21$ получаем $0{,}10 > P > 0{,}05$, что не превышает 5% уровня значимости). Такая зависимость позволяет предполагать большую дисперсию при низких значениях окатанности, что и было использовано для преобразования исходных данных по способам Бартлетта [22] для получения шкалы, на которой средние величины не зависят от дисперсии [364, стр. 565].

6.2.1. Анализ эксперимента

Результаты эксперимента содержат три источника изменчивости: различия между зернами, различия между наблюдателями и различия между днями наблюдений; схема их распределения по этим трем источникам приведена в табл. 6.2.

Зерна в количестве 21 представляют собой небольшую выборку из бесконечной совокупности, отвечающей пляжному песку, 7 наблюдателей — столь же малую выборку из бесконечной совокупности наблюдателей и 3 дня — выборку из бесконечной совокупности дней, так что мы можем использовать модель бесконечной совокупности ([27, стр. 348; 109, стр. 15]; гл. 20).

Для такого рода экспериментов эта схема выборки неблагоприятна, так как смешанные эффекты первого порядка не равны нулю и мы теряем возможность проверить главный эффект (гл. 20); более того, непроверяе-

[1] Влияние размера зерен на измерение их формы может быть очень существенным, когда разница в размерах большая.

Таблица 6.2

Схема эксперимента для трех источников изменчивости [1]

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Ожидаемые средние квадраты
Между средними по зернам	$g-1=20$	$\sigma_\varepsilon^2+d\sigma_{pg^2}+p\sigma_{dg^2}+pd\sigma_{g^2}$
Между средними по наблюдателям	$p-1=6$	$\sigma_\varepsilon^2+d\sigma_{pg^2}+g\sigma_{pd^2}+dg\sigma_{p^2}$
Между средними по дням	$d-1=2$	$\sigma_\varepsilon^2+p\sigma_{dg^2}+g\sigma_{dp^2}+pg\sigma_{d^2}$
Зерна × наблюдатели	$(g-1)(p-1)=120$	$\sigma_\varepsilon^2+d\sigma_{pg^2}$
Зерна × дни	$(g-1)(d-1)=40$	$\sigma_\varepsilon^2+p\sigma_{gd^2}$
Наблюдатели × дни	$(p-1)(d-1)=12$	$\sigma_\varepsilon^2+g\sigma_{pd^2}$
Зерна × наблюдатели × дни плюс $(g-1)$ все неучтенные источники	$(g-1)(p-1)(d-1)=240$	σ_ε^2
Сумма	$gpd-1=440$	

[1] См. раздел 20.2.

мыми будут и смешанные эффекты второго порядка, которые почти наверняка имеют большое значение (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Результаты дисперсионного анализа сферичности кварцевых зерен из пляжных песков [1] **[364]**

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Средний квадрат	Отношение дисперсий
Зерна	20	160,2198	27,137***
Наблюдатели	6	88,795	6,575**
Дни	2	12,992	3,88*
Зерна × наблюдатели	120	5,904	1,7735***
Наблюдатели × дни	12	13,504	4,056***
Зерна × дни	40	3,4532	41,04
Ошибка	240	3,308	
Сумма	440	12,6492	

[1] Данные преобразованы в арксинусы.

Около 25% изменчивости обусловлено «ошибками», или неучитываемой изменчивостью, что представляет весьма серьезный неучтенный фактор. Повторение эксперимента могло бы помочь выяснить, обусловлено ли это влиянием смешанных эффектов второго порядка или просто недостаточным контролем условий эксперимента. Прежде чем приступить к анализу метода, необходимо указать, что источник изменчивости, в данном случае «дни», фактически представляет собой отражение последовательности измерения формы зерен. В первый день наблюдатели измеряли зерна, начиная с 1 и кончая 21, во второй — с 21 по 1 и в третий — с 1 по 21. Трудно представить физический смысл такого источника, как изменение формы зерна от одного дня до другого, однако оценка формы может очень сильно измениться при изменении порядка измерения. Было установлено, что у наблюдателей намечается тенденция к определению формы первого зерна путем сравнения

со стандартами, а второго — по памяти о первом зерне и стандартах. В этом эксперименте память начинает играть все бóльшую роль по мере продолжения эксперимента. Таким образом, желательно, чтобы в будущем просмотр зерен в случайной последовательности при проведении аналогичных экспериментов отвечал бы как схеме, так и процессу экспериментов. С другой стороны, представляется очевидным, что такая последовательность, вероятно, больше способствует несовершенству эксперимента, чем любые другие факторы; опыт, однако, является лучшим учителем (особенно ошибочный опыт).

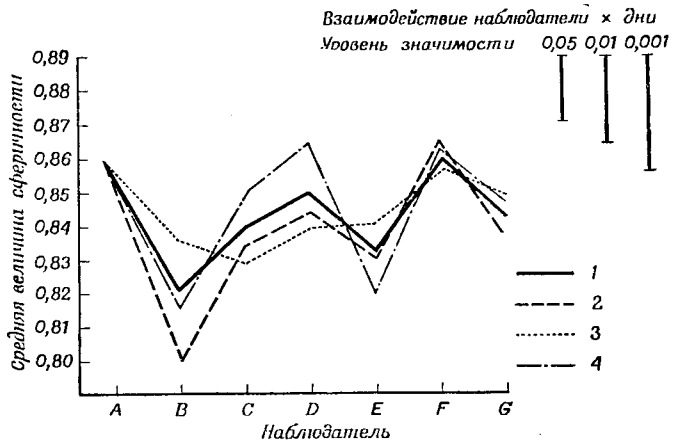
Смешанный эффект первого порядка «дни (последовательность) — зерна» оказывается незначимым, смешанный эффект «наблюдатели — дни» и «наблюдатели — зерна»— весьма значимым. Несомненно, что результаты измерений наблюдателями были непостоянны как от одного дня к другому, так и от одного зерна к другому. Следовательно, по таким результатам измерений давать какие-либо общие рекомендации фактически невозможно, за исключением того, что если этот метод вообще используется, то контроль эксперимента должен быть как-то существенно улучшен.

Тем не менее, несмотря на эти отклонения, различия, вызванные изменением порядка просмотра зерен и последовательности действий наблюдателей, являются значительно бóльшими, чем различия, зависящие от соответствующего смешанного эффекта. Интересно отметить, что поскольку проверка подтверждает, что значение дисперсии «зерна — дни» близко нулю ($\sigma_{gd^2} = 0$), основной эффект, означающий различия между зернами, может быть проверен на взаимодействие «зерна — наблюдатели»; этот эффект оказывается весьма значащим, т. е. он превосходит изменчивость, вызываемую взаимодействием. Такая проверка, конечно, необходима только в случае, если от методики требуется получение информации об изменчивости формы зерен. Условия для проверки различий между наблюдателями не столь очевидны, и хотя разница между наблюдателями заметно больше любого взаимодействия или комбинации взаимодействий, способ проверки остается неясным. Если исследуются различия между зернами, необходимо выделять и учитывать эффект, обусловленный различиями между наблюдателями. Эти различия между наблюдателями показаны на фиг. 6.4 сплошной кривой. Смешанный эффект «наблюдатели — дни» также показан, и можно видеть, что, хотя одинаковый порядок изучения зерен обусловливает одинаковые изменения оценок исследуемых свойств, при обратном порядке возникают значительные отклонения. Этого можно избежать при случайном порядке изучения зерен в каждом конкретном случае.

Таблица 6.4

Результаты дисперсионного анализа округлости кварцевых зерен из пляжных песков [364]

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Средний квадрат × 10^4	Отношение дисперсии
Зерна	20	14,914	28,96***
Наблюдатели	6	7,686	14,96***
Дни	2	0,245	$< 1,0$
Зерна × наблюдатели	120	0,515	1,936***
Наблюдатели × дни	12	0,334	1,255
Дни × зерна	40	0,2274	0,855
Ошибка	240	0,2655	
Сумма	440	1,0989	



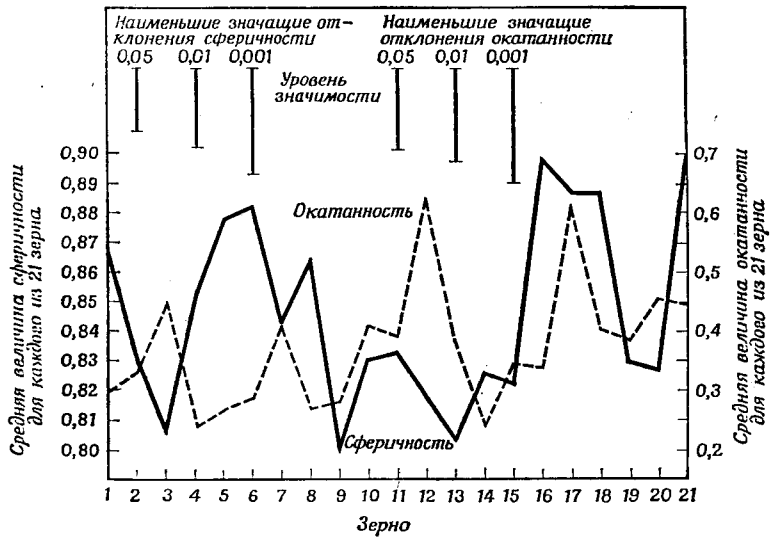
Ф и г. 6.4. Дисперсия величин сферичности для каждого оператора по дням наблюдений [364].

1 — среднее для наблюдателя за все дни; *2* — первый день; *3* — второй день; *4* — четвертый день.

Средние значения для зерен показаны сплошной линией на фиг. 6.5; с помощью наименее значимых различий (*LSD* — least significant differences) можно видеть, что при уровне значимости 5% разница в две единицы шкалы во втором случае не может считаться доказанной, т. е. шкала является эффективной в пределах от 0,80 до 0,82, от 0,82 до 0,84 и т. д. Степень неопределенности увеличивается до 0,04 при уровне значимости 0,001. Это позволяет заключить, что в интервале от 0,8 до 0,9 единиц сферичности могут быть эффективными всего от двух до пяти классов.

Данные по окатанности проверяются таким же образом, и результаты сведены в табл. 6.4. Ошибки опять велики; два смешанных эффекта первого порядка равны нулю и только для случая «зерна — наблюдатели» этот эффект является значимым. Различия между средними значениями для зерен и для наблюдателей также велики и значимы.

LSD составляет 0,2 при уровне значимости 5%; другими словами, интервал шкалы от 0,2 до 0,7 вмещает всего три эффективных класса (фиг. 6.5).



Ф и г. 6.5. Средние величины сферичности и окатанности для каждого из 21 зерна [364].

риантной к такого рода преобразованиям, и поэтому уровень полученной информации вряд ли может достигнуть интервального (см. раздел 12.5).

Тот же эксперимент приводит нас к убеждению, что для получения информации о форме частиц необходимо изыскивать другие, кроме указанных, методы. При использовании же метода визуального сравнения программа эксперимента должна быть тщательно разработана и должен быть намечен контроль над процессом измерений. Без соответствующих предосторожностей дисперсия, обусловленная собственно неточностями сравнения, увеличится за счет субъективного восприятия наблюдателя и в конечном счете влияние неопределимых источников изменчивости, т. е. ошибок, станет весьма значительным. Большинство методов, которые основаны на использовании способа субъективной оценки сходства со стандартами, обладают аналогичными недостатками.

6.3. ИЗМЕРЕНИЯ ОТНОШЕНИЯ ОСЕЙ В ШЛИФАХ КАК ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОРМЫ

Другим возможным способом определения формы являются измерения, выполняемые по двухмерным изображениям зерен в шлифах. Этот способ особенно необходим в тех случаях, когда дезинтеграция образцов горных пород оказывается невозможной без нарушения формы зерен. Метод может быть аналитически выражен как

$$P_{sh_2} = (m, s, sh, o, p),$$

и в случае выбора одного единственного минерального компонента, скажем кварца, состав m становится константой. Однако дальнейшее упрощение оказывается невозможным. Когда все остальные свойства изменяются одновременно, изменчивость величины P_{sh_2} определяется влиянием четырех главных факторов: размера s, формы sh, ориентировки зерен o и упаковки p; одновременно влияние оказывают шесть смешанных эффектов первого порядка вида s, sh; s, o и т. п.; четырех — второго порядка вида s, sh, o; s, sh, p и т. п. и одного — третьего порядка вида s, sh, o, p. Другими словами, полученное выражение может быть записано в виде

$$P_{sh_2} = f(s, sh, o, p).$$

Ниже будут показаны трудности, связанные с вычислением величины P_{sh}; получаемые величины отражают разнородную информацию, которая в силу своей сложности лишь отдаленно связана с понятием формы.

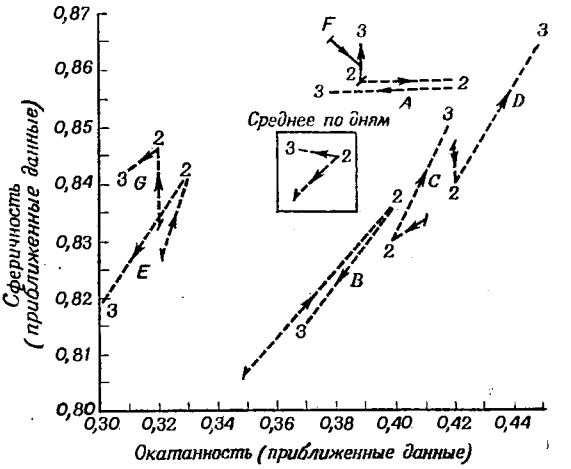
6.3.1. Детали методики

Помимо выбора минерального компонента, необходимо четко определить метод выбора осей. При измерении окатанности, т. е. двухмерной сферичности, две оси могут быть выбраны способом, описанным Гриффитсом и Розенфельдом [419, стр. 237]. При этом способе предусмотрено получение изображения зерна либо путем вычерчивания его контуров с использованием микропроектора, либо путем фотографирования с последующим нахождением опытным подбором наименьшего размера (ось b) с помощью параллельных линеек. После определения наименьшего размера проводят касательные к контуру изображения зерна под прямым углом друг к другу и измеряют длинную ось a перпендикулярно оси b, как показано на фиг. 6.7. Если параллельные линейки снабжены еще и измерительной линейкой с делениями в миллиметрах, размеры могут быть прочитаны сразу же после того, как определены оси. Аналогичные наблюдения можно проводить непосредственно под микроскопом с использованием окуляра с квадратной

Величины дисперсий, выраженные в виде стандартных отклонений, приведены в табл. 6.5; и хотя изменчивость окатанности примерно втрое больше сферичности, судя по разнице стандартных отклонений для зерен, следующим наибольшим источником изменчивости оказываются ошибки, которые также в три раза больше для оценок окатанности, чем сферичности. Таким образом, по всей таблице результаты вполне сравнимы для обеих переменных, т. е. изменчивость от различных причин является близкой по своей относительной величине при обоих методах измерения.

6.2.2. Взаимоотношения между сферичностью и окатанностью

Обычно полагают, что сферичность и окатанность взаимосвязаны, однако на основании показанного выше примера измерений 21 зерна видно, что они не связаны [364, стр. 581]. Если определенные наблюдателем средние



Ф и г. 6.6. Зависимость между сферичностью и окатанностью для каждого наблюдателя по дням: *1* — первый день, *2* — второй день, *3* — третий день. *A*—*G* — наблюдатели [364].

значения сферичности и окатанности нанести на двухмерный график, эти взаимоотношения станут вполне очевидными (фиг. 6.6).

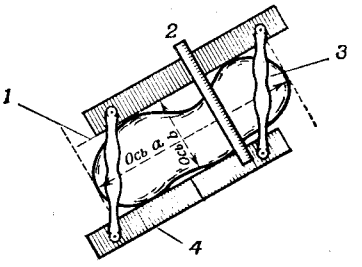
Этот график весьма нагляден; с повышением наблюдателем оценки сферичности неизбежно повышается и оценка окатанности, порядок же изучения зерен явно влияет на оценку (см. врезку в центре). Почти в каждом случае взаимоотношения между сферичностью и окатанностью, определенными этим методом, постоянно отражают различия между наблюдателями, а не истинные характеристики зерен.

6.2.3. Замечания по методике

Очевидно, что независимое определение сферичности и окатанности путем визуального сравнения невозможно и что при использовании этого метода два измерения дадут две оценки одного и того же свойства формы P. Следовательно, если требуется независимая оценка сферичности и окатанности, то для определения хоты бы одного из этих свойств должен быть принят какой-то другой метод.

На основании проведенного эксперимента можно заключить, что качество употреблявшейся шкалы измерений, вероятно, не выше порядкового уровня и что возможность использования дисперсионного анализа полученных данных представляется сомнительной. Если анализы дают одинаковые результаты независимо от использованных преобразований, это свидетельствует о том, что точность измерений в первом приближении является инва-

сеткой. Измерения начинают с короткой оси b; при пробных экспериментах было установлено, что в случаях, когда наблюдателям разрешалось выби-

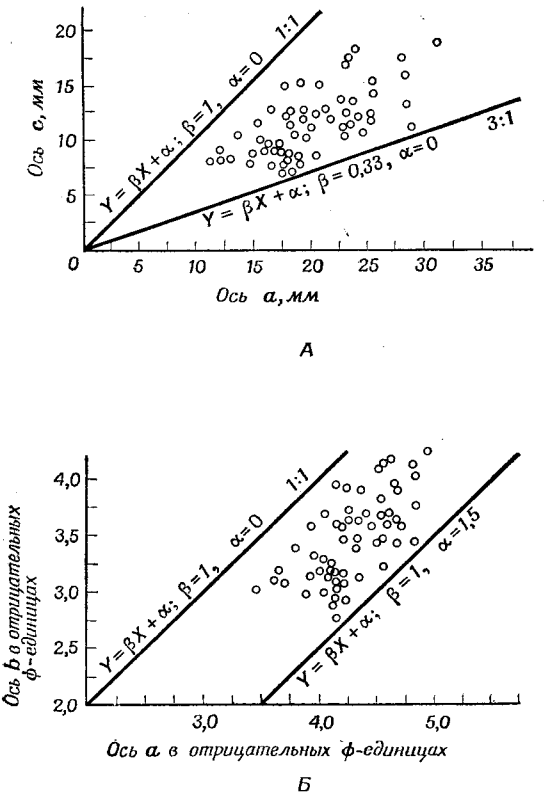


Ф и г. 6.7. Измерение осевых отношений формы в шлифах.

1 — полный описанный прямоугольник; *2* — шкала измерений, *мм*; *3* — спроектированное изображение зерна; *4* — параллельные линейки.

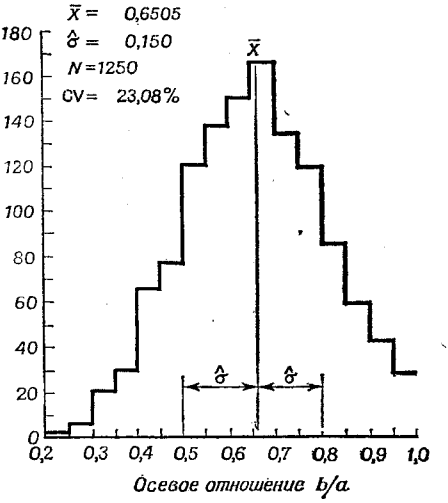
рать длинные оси, весьма значительная изменчивость объяснялась исключительно индивидуальностью вкусов. Причина изменчивости гораздо лучше контролировалась, если измерения начинали с короткой оси.

Полученные данные можно выразить несколькими различными путями. Если величины (в миллиметрах) нанесены на точечную диаграмму, по их распределению можно судить о тенденции к увеличению неравномерности разброса, т. е. изменчивость увеличивается с ростом осей a и b (фиг. 6.8, *А*). При использовании логарифмической (ϕ) шкалы распределение величин имеет тенденцию к рассеянию с равномерным разбросом (фиг. 6.8, *Б*). В таких случаях лучше пользоваться отношениями двух измеряемых величин, если они выражены в миллиметровой шкале; действительно, с тех пор, как были предложены оба эти отношения — b/a и a/b,— их стали широко применять [30; 248, стр. 288]. Поскольку



Ф и г. 6.8. Зависимость между длинной осью a и короткой осью b изображений галек.

(а) Увеличение размаха в миллиметрах. Дисперсия увеличивается с увеличением размера. (в) Равномерный размах в единицах (логарифмических) ф. Дисперсия не зависит от величины вариации.



Ф и г. 6.9. Распределение осевых отношений b/a кварцевых зерен из песчаника Брадфорд [364].

Таблица 6.5

Стандартные отклонения по источникам изменчивости

Источник изменчивости	Сферичность	Округлость
Зерна	0,033	0,103
Наблюдатели	0,014	0,042
Дни	0,002	0,001
Наблюдатели × зерна	0,0101	0,038
Наблюдатели × дни	0,007	0,006
Дни × зерна	0,0	0,005
Ошибка	0,024	0,062

Таблица 6.6

Статистические характеристики распределения осевых отношений кварцевых зерен
(пересчитано по данным Бокмана [32])

Формация	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\sqrt{b_1}$	b_2	n
Атока	0,696	0,140	—0,078	2,555**	795
Хардинсберг	0,703	0,143	0,036	2,647*	750
О-Ваз	0,679	0,148	0,0003	2,658*	754
Сайпресс	0,707	0,138	—0,115	2,755	744
Майзенер	0,702	0,142	0,171*	2,489**	746
Уилкокс	0,670	0,159	0,012	2,534**	755
Гранерос	0,713	0,141	0,098	2,540**	721
Берна	0,686	0,173	—0,028	2,516**	752
Дакота	0,729	0,140	—0,318**	2,879	694
Моррисон	0,688	0,157	—0,102	2,574**	784
Современные отложения Мустанг I, Техас	0,649	0,152	—0,094	2,896	451
Современные отложения Ченир, Луизиана	0,670	0,141	—0,134	2,740*	854
Белл-Каньон	0,663	0,150	—0,037	2,624**	791
Современные отложения Холли-Бич, Луизиана	0,700	0,159	—0,345**	3,014	801
Третичные отложения, Южная Америка	0,638	0,169	0,034	2,522**	413
Современные отложения Тапсейл-Бпч, Северная Каролина	0,608	0,160	—0,107	2,007**	277
Современные отложения Грейд-Айл, Луизиана	0,651	0,170	+0,120	2,475**	400
Современные отложения, река Миссисипи	0,678	0,161	—0,152*	2,562**	802
Современные отложения Падре I, Техас	0,661	0,143	—0,125	2,569*	453
Сумма	0,685	0,150	0,0990**	2,684**	12,734

характер получаемой информации и подход к интерпретации в обоих случаях остаются одинаковыми, в настоящей работе мы используем отношение осей b/a. Гистограмма, являющаяся примером распределения отношений осей зерен кварца из песчаников Брадфорд, приведена на фиг. 6.9.

(см. также [156, фиг. 6, стр. 206; 167, фиг. 6; 363, фиг. V,27]). Для характеристики кривой может быть использован закон нормального распределения, если число измерений достаточно большое, несмотря на ее усеченный вид, обусловленный тем, что шкала отношения b/a ограничена пределами от 0 до 1.

В тех случаях, когда встречается много округлых зерен, наблюдается заметная асимметрия, вызванная накоплением частот в области, близкой к единице.

Большую группу результатов анализов приводит Бокман [32], соответствующая сводка статистик представлена в табл. 6.6. Следует отметить, что только в четырех случаях наблюдается значительная асимметрия, но почти всем случаям будут отвечать слабо эксцессивные кривые. Эксцессивность определяется отклонениями от кривых нормального распределения ($\beta_2 = 3$) как в центральной части, так и на окончаниях кривых, а расхождения, выраженные в различиях показателей эксцесса кривых, гораздо более характерны, чем отклонения на окончаниях. Следовательно, малые эксцессы на окончаниях, вероятно, можно считать причиной уплощенности этих распределений.

Значительно более четко выразился ограниченный размах средних величин отношений осей. По данным Бокмана по 19 различным типам осадочных пород, эти средние величины составляют от 0,608 до 0,729; их можно считать достаточно обоснованными, поскольку объемы выборок, по которым вычислены эти статистики, находятся в пределах от $n = 277$ до $n = 854$.

Аналогичный набор вычислений, основанных на анализах семи различных типов песчаников и представляющих совершенно независимые группы анализов, сведен в табл. 6.7, где опять-таки можно видеть, что разница

Таблица 6.7

Осевые отношения кварцевых зерен в различных осадочных породах по измерениям в шлифах

Осадочная формация	Число образцов	Число зерен	Осевое отношение b/a		Тип породы и литературная ссылка
			среднее	стандартное отклонение	
Поконо	16	800	0,6609	0,1739	Граувакки [113]
Бериа	16	800	0,6691	0,1730	» [113]
Брадфорд 5820	1	1 250	0,6506	0,150	Кварцевые граувакки [156]
Р4-1					
Параллельно слоистости	1	400	0,665	0,148	То же [156]
Параллельно максимальной проницаемости	1	1 000	0,681	0,150	» » [156]
Параллельно минимальной проницаемости	1	1 000	0,682	0,144	» » [156]
Наклонно к максимальной проницаемости	1	1 000	0,655	0,142	» » [156]
Орискани	87	9 981	0,677	0,142	Кварциты [363]
Солт-Уош	50	15 000	0,649		Аркозовые кварциты [164]
Пески Кау-Ран	38	1 520	0,671	0,168	Граувакки [167]
Песчаники Освего	13	650	0,656		Граувакки [1]

[1] Гриффитс, неопубликованная работа.

в средних величинах отношений осей весьма небольшая, несмотря на разные образцы — от 0,649 до 0,682 при стандартных отклонениях от 0,142 до 0,173. Это позволяет предполагать, что область значений отношений осей

во всех типах осадочных пород является ограниченной. Из данных, приведенных в табл. 6.7, также очевидно, что область значений отношений осей от 0,655 до 0,682 может быть определена в различно ориентированных шлифах из одного и того же образца породы. Следовательно, ориентировка шлифов обусловливает примерно такую же изменчивость отношений осей, как и различия в горных породах, и, кроме того, зависимость изменчивости P_{sh_2} по крайней мере от влияния такого смешанного эффекта первого порядка, как форма с ориентировкой *sh*, *o*, исключительно большая.

Если теперь провести дисперсионный анализ между шлифами из одного и того же образца (табл. 6.8), можно заметить некоторые специфические

Таблица 6.8

Дисперсионный анализ осевых отношений для образца Р4-1 песчаников формации Брадфорд [149]

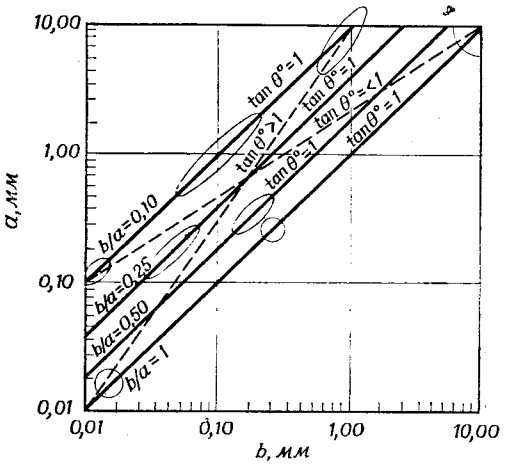
Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий
Шлифы	3	0,901	0,300	13,99***
Наблюдатели	3	0,738	0,246	11,48***
Наблюдатели × шлифы	9	0,234	0,0260	1,216
Поле зрения (в пределах шлифа)	36	1,163	0,0323	1,506*
Наблюдатели × поле зрения	108	2,574	0,0238	1,115
Зерна в пределах поля зрения (ошибка)	3840	82,061	0,0214	
Сумма	3999	87,673	0,0219	

особенности, характерные для любых измерений формы. Прежде всего, большая часть отклонений (в данном случае около 94%) находится в пределах ошибки и это позволяет полагать, что главная (а возможно, и единственная) причина изменчивости состоит в разнице отношений осей, измеренных для малых количеств зерен. Отклонений, обусловленных влиянием на наблюдателей полей зрения или шлифов, не замечалось (см., например, раздел 15.6), но есть разница между самими наблюдателями. С точки зрения выполнения аналогичных исследований в будущем следует рекомендовать проводить эксперименты по возможности одними и теми же наблюдателями, так как в этом случае можно будет избежать нестабильности измерений, возникающей из-за разных наблюдателей. Отмечается значительное расхождение в средних величинах отношений осей, измеренных в разных полях зрения в пределах одного шлифа или в нескольких шлифах. Несомненно, что отношение осей изменяется от одного участка к другому в пределах одного шлифа (возможно, даже в пределах отдельных прослоечков) и от одного шлифа к другому в зависимости от направления плоскости шлифа. В целом можно полагать, что среднее отношение осей, характеризующее форму кварцевых зерен, остается приблизительно постоянным для многих различных типов осадочных пород.

6.3.2. Двухмерные точечные диаграммы осей

Альтернативный способ изображения этих данных, который позволяет учесть одновременное влияние более чем двух размеров и более точное их представление,— это двухмерный анализ измерений осей ([164 стр. 40—45]; гл. 22). В этом случае может быть использован метод сравнения с модельной кривой, если величины осей нанесены в миллиметрах на логарифмиче-

скую бумагу или после перевода этих величин в ϕ-единицы — на миллиметровку. В первом случае, когда зерна или их изображения имеют округлую форму, оси a и b примерно равны и для обеих осей координат использован одинаковый масштаб, точки будут ложиться на прямую линию, которая делит угол между осями координат. Аналогично, если осевое отношение, определяющее форму, постоянно и независимо от размера, точки, отвечающие отдельным зернам, будут ложиться на прямую, параллельную этой линии, делящей угол между осями координат на графике (фиг. 6.9 и 6.10).



Ф и г. 6.10. Графические модели гипотез осевого отношения формы $\tan\theta = 1$ (форма не зависит от размера); $\tan\theta < 1$ (удлинение уменьшается с увеличением размера); $\tan\theta > 1$ (удлинение увеличивается с увеличением размера).

В аналитическом виде эти особенности распределения наилучшим образом могут быть представлены в виде обычного уравнения прямой линии (гл. 22), т. е.

$$Y = mX + k,$$

где Y — величины осей b или логарифмы осей b, если используется миллиметровка, X — величины осей a (или их соответствующие логарифмы), а m и k — коэффициенты, определяющие наклон и положение линии соответственно [1]. Для круглых зерен $m = 1$, $k = 0$, а линия — биссектриса угла между осями координат Y и X ($\operatorname{tg}\theta = 1$ при $\theta = 45°$). Для любой постоянной формы m равно 1, а k — некоему положительному значению [2]. Если сечения зерен становятся более округлыми с увеличением размера, линия будет приближаться к биссектрисе при возрастании величин a и b, а m будет равняться положительной дроби, поскольку k равняется положительному числу. С другой стороны, если вытянутость зерен увеличивается с увеличением размера, линия будет приближаться к биссектрисе при более низких значениях a и b. Теоретически возможно, что точки не лягут на прямую линию или, во всяком случае, не будет достаточно близкого распределения, но практически измеренные величины зерен группируются довольно близко от прямой линии, а многие ложатся очень близко от линии или на линию.

Теперь методом наименьших квадратов мы приводим график в соответствие с исходными данными (гл. 22) и измеряем степень концентрации точек вокруг прямой линии коэффициентом корреляции. Поскольку $b < a$, точечная диаграмма, вероятно, не будет походить на двумерную нормальную, а окажется в различной степени усеченной (фиг. 6.8, *Б*) и, следовательно, асимметричной, однако в первом приближении удобнее использовать простую линейную регрессию и корреляцию как основные статистики, характеризующие двухмерную диаграмму рассеяния. Если производится проверка гипотез, полученные вероятностные выводы не будут точными, однако по мере увеличения числа наблюдений двухмерное распределение будет приближаться к нормальному и при большом числе измерений (скажем,

[1] Поскольку оси зерен определены таким образом, что $a > b$, использоваться должна лишь верхняя половина диаграммы; если же данные выражены в φ-единицах, которые представляют собой отрицательные логарифмы величин в миллиметрах, отнесенных к основанию 2,— только нижняя половина.

[2] Величина k всегда будет положительной, поскольку $a_\varphi < b_\varphi$.

более 100) результаты не будут содержать серьезной ошибки. Арифметические и логарифмические выражения мы можем суммировать и сравнить в следующем виде.

Выражение осевых отношений кварцевых зерен, измеренных в шлифах

ОТНОШЕНИЯ ОСЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФОРМУ

a — длинная ось; $\log a = X$.
b — короткая ось; $\log b = Y$.
Форма выражения в

миллиметрах	логарифмах
$b = ka^m$	$Y = k' + mX$

Первый случай. Если $m = 1$ (форма постоянна при любых размерах)

$$b = ka, \qquad Y = k' + 1X.$$

Второй случай: Если $m < 1$, например $m = 2$ (форма изменяется, вытянутость увеличивается с увеличением размера)

$$b = ka^2, \qquad Y = k' + 2X.$$

Третий случай. Если $m < 1$, например $m = 1/2$ (форма изменяется, округлость увеличивается с увеличением размера)

$$b = ka^{1/2} = k\sqrt{a}, \qquad Y = k' + \frac{1}{2}X.$$

Теперь мы можем построить модели, являющиеся гипотезами, предназначенными для проверки.

Гипотеза. H_0; форма в ϕ-единицах $Y = \beta x + \alpha$
Для постоянной округлой формы $\beta = 1$ и $\alpha = 0$
Для постоянной формы $\beta = 1$ и $\alpha =$ положительное значение
Для округлости, увеличивающейся с размером, $\beta < 1$.
Для вытянутости, увеличивающейся с размером, $\beta > 1$.
Критерием для проверки H_0 является величина $(\beta - m)/\hat{\sigma}_m$, которая t-распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

В качестве примера рассмотрим точечную диаграмму на фиг. 6.11, где показан график средних значений осей b и a, выраженных в ϕ-единицах, определенных для кварцевых зерен из 50 образцов песчаников Солт-Уош [164, фиг. на стр. 40, и фиг. 11.8]. Совершенно очевидно, что расположение точек близко к прямолинейному и рассеяние является весьма малым, как видно и по коэффициенту корреляции $r = 0{,}99$. Зависимость для 25 рудоносных образцов будет $Y = 1{,}0535\ X + 0{,}4685$ и гипотеза $\beta = 1$ не отвергается; следовательно, эта зависимость приблизительно может быть выражена как $Y = X + 0{,}4685$.

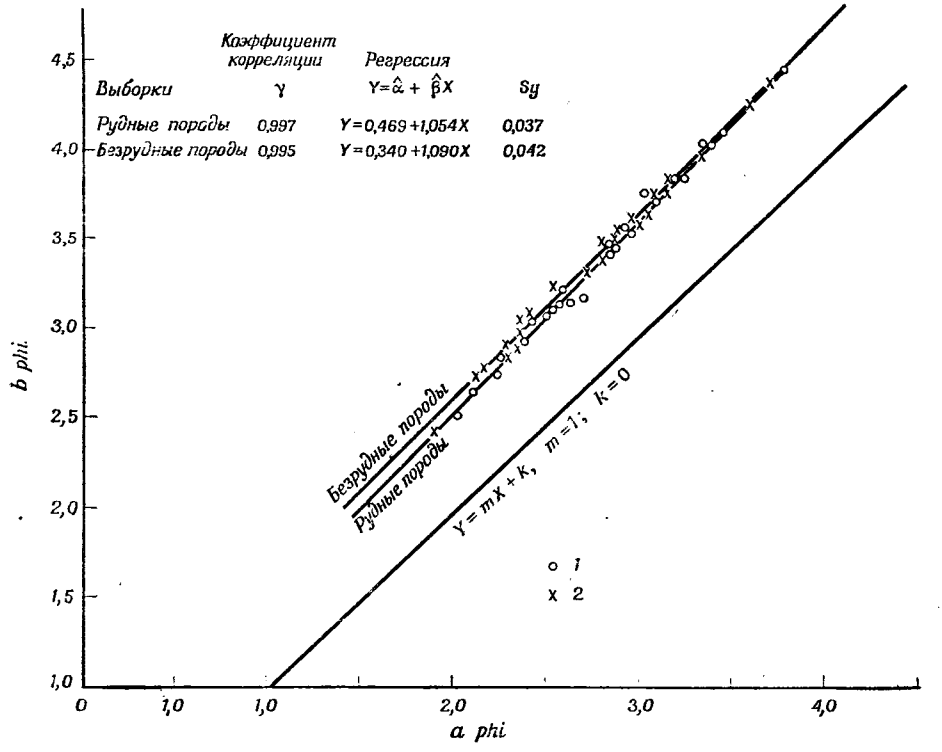
В работе [164] величина отношения b к a в миллиметрах вычислена как 0,649. Не менее интересен вопрос, каким образом связь между осями стабилизируется в зависимости от усреднения? В табл. 6.9 степень зависимости

Таблица 6.9

Зависимость между осями a и b кварцевых зерен, измеренными в шлифах песчаников Солт-Уош

Число образцов	Источник изменчивости	Коэффициент корреляции	
		рудные породы	безрудные
25	Среднее для образцов	0,9931	0,9927
10	Среднее для поля зрения	0,8049	0,8171
30	Среднее для зерен	0,7697	0,5369
7500	Вся совокупность	0,7490	0,7325

между осями зерен выражена через коэффициент корреляции. Для обеих совокупностей, безрудных и рудных пород, зависимость оказывается общей примерно на 54% (r^2) для обеих осей. Однако на уровне измерения отдельных зерен в рудных песчаниках оси характеризуются общей зависимостью примерно на 60%, тогда как в безрудных песчаниках — менее чем на 30%. Но это различие быстро исчезает, если рассматриваются средние величины для полей зрения (общая зависимость около 65%), а средние для образцов



Ф и г. 6.11. Зависимость между длинной осью *a* и короткой осью *b* кварцевых зерен из песчаников Солт-Уош [164].

1 — 24 безрудные пробы; *2* — 24 рудные пробы (то и другое в среднем для шлифа).

оказываются почти идентичными (общими приблизительно на 99%). Очевидно, что если рассматривать зерна в целом, заметить разницу в длине их осей будет делом безнадежным, и в результате увеличатся шансы получить одинаковые результаты для любых осадочных пород.

Аналогичные особенности дисперсии характерны и для измерений формы многими другими способами, как двух-, так и трехмерными, и для других свойств осадочных пород, таких, как размер зерен и их ориентировка, так что главная причина изменений измеряемых качеств осадочных пород, по-видимому, заключается в разнообразии отдельных зерен, а различия между средними величинами групп зерен могут быть совершенно дезориентирующими.

Поскольку измерения осей, производимые на зернах в шлифах и на их спроектированных изображениях, являются по существу измерениями «видимых» осей, то и изменчивость этих величин в основе своей «видимая» и совершенно очевидно, что оценка P_{sh_2} представляет собой сложную, фактически многомерную задачу, требующую решения уравнения

$$P_{sh_2} = f(s, sh, o, p)$$

и его соответствующей интерпретации.

Что касается некоторых специальных задач, например сравнения двух образцов (или, в общем виде, двух совокупностей) без попыток выявить физический смысл результатов сравнения, то эта методика оказывается вполне удовлетворительной. Если же необходимо интерпретировать физическую сущность результатов эксперимента, например вскрыть какие-либо различия, отражающие разницу в областях сноса или способах осадкообразования, в настоящее время эта методика не способна дать желаемых результатов.

6.4. ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ФОРМЫ

Проверив возможности метода измерений в шлифах и не получив обнадеживающих результатов, попытаемся теперь найти какие-то новые пути. После рассмотрения задачи измерения размера зерен в конечном счете дело свелось к проблеме предельного упрощения задачи измерений, т. е., используя указанное выше равенство в качестве путеводного, мы должны изыскать метод, который позволил бы производить более или менее прямое измерение формы. Другими словами, начнем с пяти главнейших свойств и постараемся выявить и обособить то из них, относительно которого требуется получить информацию. Мы устраним влияние большинства из этих факторов путем дезинтеграции образца горной породы, т. е. расчленим совокупность на ее составные элементы. Затем выберем какой-нибудь отдельный элемент, особенно такой, который не подвержен влиянию процесса дезинтеграции и который можно рассматривать как элемент, отражающий интересующую нас геологическую информацию, и измерим интересующие нас свойства этого элемента или серии элементов. Теперь можно предвидеть некоторые трудности, которые, вероятно, встретятся, например дисперсию, обусловленную расхождением оценок разных наблюдателей и особенно необходимость эффективного контроля для предотвращения изменений, зависящих от непостоянства оценок одного наблюдателя. Нельзя упускать из виду возможность потери большей части требуемой информации в случае использования средних величин. Все же и при этих условиях остается несколько проблем, таких, например, как количество и метод выполнения необходимых и достаточных измерений.

В качестве предварительного испытания был проведен эксперимент по сравнению результатов трех методов: метода визуального сравнения с помощью набора стандартов Риттенхауса [357], метода измерений двух осей, рекомендованного Райли [352], и метода измерений трех осей, предложенного Крамбейном [252]. Способ проведения эксперимента, может быть, и не был наиболее эффективным для поставленной цели, однако он является вполне удовлетворительным дополнением к основным рекомендациям, следующим по пути дальнейших исследований. В этом эксперименте 13 наблюдателей отобрали 13 образцов субграувакковых песчаников из ордовикских отложений формации Освего в одном обнажении, расположенном близ Скаутопа на дороге № 322 в Центральном округе Пенсильвании. Образцы были дезинтегрированы, и из 50 кварцевых зерен, отобранных из каждого образца, были изготовлены препараты согласно обычной методике, предложенной Пламли [331]. Длинные и средние оси (a и b) измерялись по наибольшим по площади проекциям зерен; короткие оси (c) измерялись по наименьшим по площади проекциям зерен, повернутым «на бок». Определение сферичности производилось путем визуального сравнения наибольших проекций зерен с набором стандартов (фиг. 6.2).

В этом эксперименте для одного и того же зерна получалось три оценки сферичности: визуальная оценка по Риттенхаусу — ψ_R, приблизительная оценка по Райли — ψ_{Ri}, получаемая из величин длинной и средней осей

по формуле

$$\psi_{Ri} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}, \tag{6.1}$$

и оценка сферичности по Крамбейну, вычисляемая по формуле

$$\psi_K = \left(\frac{bc}{a^2}\right)^{1/3}. \tag{6.2}$$

Поскольку эксперимент предназначался только для иллюстрации способа исследования, каждый наблюдатель анализировал один образец; следовательно, различия между образцами совмещены с различиями между наблюдателями. Распределения могут быть представлены в виде суммарных статистик (табл. 6.10).

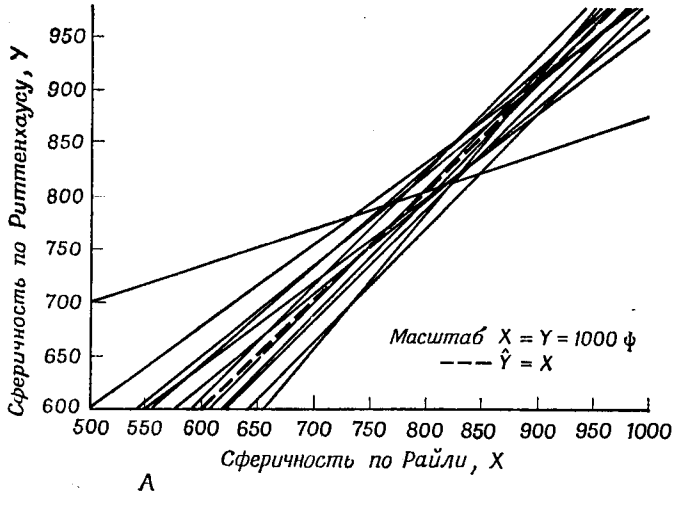
Таблица 6.10

Статистические характеристики распределения значений сферичности кварцевых зерен из граувакк Освего, измеренных несколькими способами

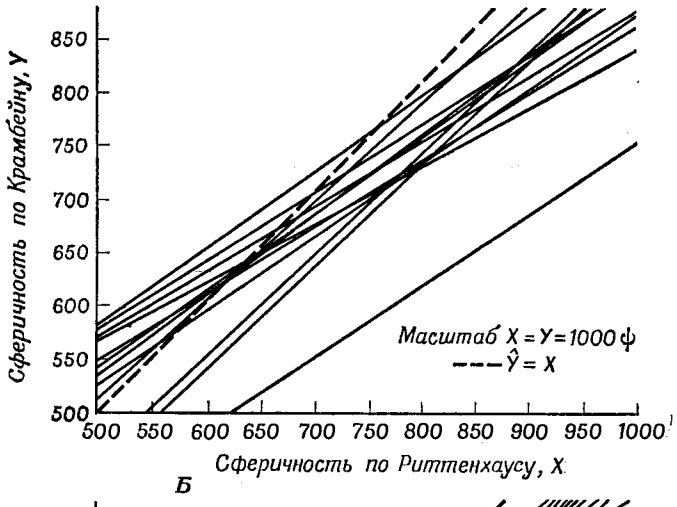
Метод	Среднее, $\overline{X}\Psi$	Стандартные отклонения, $\hat{\sigma}\Psi$	Коэффициент изменчивости	$\sqrt{b_1}$	b_2	Число зерен
Крамбейн	0,754	0,089	11,68	—0,318**	2,873	650
Райли	0,810	0,063	7,78	—0,618**	3,80**	650
Риттенхаус	0,818	0,072	8,80	—0,346**	3,016	650
Керри [81, 82]	0,753	0,077	10,53	+0,030	2,695	300

Совершенно очевидно, что трехмерные измерения, как и следовало ожидать, дают наиболее низкие значения сферичности, и при этой методике получаются наибольшие коэффициенты изменений. Для всех трех методов наблюдается значительная асимметрия, а для величин по Райли — также сильная эксцессивность. Четвертая строка таблицы (по Керри) представляет независимую серию измерений трехсот кварцевых зерен из двух образцов грауваккових песчаников Освего, отобранных из того же обнажения и измеренных таким же способом, с оценкой сферичности по Крамбейну. Средняя сферичность, определенная в этом эксперименте, оказывается довольно близкой к определенным для групп из 13 образцов, а стандартные отклонения — больше, чем для любого из двухмерных методов. Статистики не отличаются сколько-нибудь значительно от нормальных.

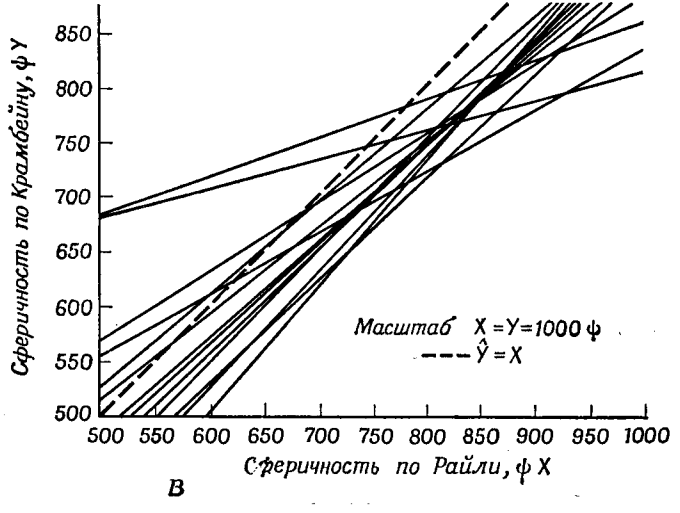
Результаты различных методов измерения могут быть попарно сравнены на диаграммах рассеяния (фиг. 6.12, $A - B$); если два метода дают идентичные результаты, измеренные величины будут ложиться на одну прямую линию, рассекающую угол между осями координат. Если их результаты различаются на постоянную величину, линии будут параллельны; если различия непостоянны, линии будут сближаться и, возможно, пересекаться. Для целей настоящего рассмотрения может быть принято, что методика Крамбейна наиболее информативна и надежна и что методика визуальной оценки сферичности наименее надежна. Прежде всего мы сравним двухмерные методы измерения — визуальную оценку сферичности и сферичность по Райли (фиг. 6.12, A). Двенадцать из тринадцати линий образуют пучок, тесно сгруппированный вокруг линии, отражающей соотношение 1 : 1, а тринадцатая линия заметно отклоняется. Поскольку различия между наблюдателями и между образцами смешаны, резко отличные результаты могут быть обязаны и тем и другим, однако более вероятно, что они связаны с различными индивидуальными качествами наблюдателей. Эта линия не только отличается от других по наклону, она сечет остальные линии под



А



Б



В

Ф и г. 6.12. Взаимоотношения между тремя способами измерения сферичности.

А — регрессия сферичности *Y* по Риттенхаусу в сравнении со сферичностью *X* по Райли; *Б* — регрессия сферичности *Y* по Крамбейну в сравнении со сферичностью *X* по Риттенхаузу; *В* — регрессия сферичности *Y* по Крамбейну в сравнении со сферичностью *X* по Райли.

очень пологим углом, указывающим, что наблюдатель переоценил визуальную оценку сферичности при низких значениях (и недооценил при высоких ее значениях) по сравнению с измерениями по Райли. Многие из других линий сближаются с линией 1 : 1 и лишь некоторые линии параллельны ей. Это указывает не только на влияние личностей наблюдателей, но и на влияние непостоянства «вкусов» каждого из них. В качестве основы для оценки сферичности требуется, таким образом, способ объективных измерений, который позволял бы устранить влияние разницы между наблюдателями и непостоянство их оценок.

При сравнении визуальных оценок сферичности с измерениями по методу Крамбейна (фиг. 6.12, *В*) оказалось, что расхождение между наблюдателями еще больше; по меньшей мере три линии отличаются от остальных десяти. Более того, все линии пересекают линию 1 : 1, поэтому мы можем судить, что сферичность при визуальной оценке для зерен со сравнительно низкой сферичностью недооценивалась, а для зерен с высокой сферичностью переоценивалась.

Наконец, при сравнении двух невизуальных методов измерения сферичности также выявляются значительные расхождения, которые по меньшей мере для четырех наблюдателей наиболее значительны (фиг. 6.12, *В*). Остальные девять линий не строго параллельны линии 1 : 1, но более близки к параллельным по сравнению с двумя предыдущими случаями. Методы измерения определенно являются обнадеживающими, однако контроль эксперимента нельзя считать доказанным.

На основании результатов этих нескольких экспериментов представляется очевидным, что если вообще форму нужно оценивать, то необходимы определенные затраты времени и труда на производство экспериментов и точных измерений, которые следует выполнять в трех измерениях [1].

6.5. СФЕРИЧНОСТЬ И ОКАТАННОСТЬ КВАРЦЕВЫХ ЗЕРЕН В ОСАДОЧНЫХ ПОРОДАХ

Керри [81] исследовал природу изменчивости сферичности и округлости кварцевых зерен в осадочных породах по образцам, представляющим три петрографических типа осадочных пород — аркозовые песчаники, субграувакки и кварциты (типы пород по определению Крынина [270]). При этом не устанавливалось каких-либо ограничений относительно необходимого количества образцов, обнажений и т. п., потому что амплитуда изменчивости на различных уровнях была неизвестна. В качестве первого приближения из каждой осадочной формации произвольно было отобрано по два образца. Известно, что форма меняется при изменении размера. В силу этого измерялось по 50 зерен в каждой из фракций, полученных просеиванием через набор из трех сит. Схема отбора материала для измерений показана в табл. 6.11.

При измерении округлости было замечено, что получаемые оценки оказывались различными при разном увеличении микроскопов, что характерно для всех попыток измерения формы. Этот факт снова подчеркивает важность взаимодействий петрографических свойств почти для всех методов исследования. Для измерения округлости использовали только одну фракцию — 120 меш (125 *мк*), причем было произведено 2700 измерений сферичности и 900 определений округлости.

---

[1] Визуальную оценку округлости можно принять в качестве выражения определенного мнения, однако при относительно малых различиях сферичности необходимо проводить измерения.

Таблица 6.11

Результаты измерений сферичности кварцевых зерен в осадочных породах

Тип породы	Формация	Номер образца	Меш [1]			
			35 (500)	60 (250)	80 (177)	120 (125)
Аркозовые песчаники	Рослин, эоцен, Вашингтон	R_1		×	×	×
		R_2	×	×		×
	Сеспе, олигоцен, Калифорния	S_1	×	×		×
		S_2	×	×		×
	Фаунтин, пенсильваний, Колорадо	F_1	×	×		×
		F_2	×	×		×
	Миоцен, Тринидад	M_1		×	×	×
		M_2		×	×	×
Субграувакки	Брадфорд, девон Пенсильвания	B_1		×	×	×
		B_2		×	×	×
	Освего, ордовик, Пенсильвания	T_1	×	×		×
		T_2	×	×		×
Ортокварциты	Орискани, девон, Пенсильвания	O_1	×	×		×
		O_2	×	×		×
	Хомвуд, пенсильваний, Пенсильвания	H_1		×	×	×
		H_2		×	×	×
	Гейтсберг, кембрий, Пенсильвания	G_1	×	×		×
		G_2	×	×		×
Всего 3	9	18	11	18	7	18

[1] Эквивалент в микронах дается в скобках [82].

6.5.1. Выборочная процедура

Зерна кварца в количестве 50 штук помещали в препарат, приготовленный по методу Пламли [331, стр. 562], и оси выбирали на изображениях, спроектированных на экране по методике, введенной Гриффитсом и Розенфельдом [149, стр. 168].

6.5.2. Распределение значений сферичности в зависимости от типа пород и размера зерен

Гистограммы значений сферичности для различных типов пород, различных размеров зерен и для полного комплекса измерений приведены в работе Керри и Гриффитса [82, стр. 1078, 1080—1081]. Соответствующая сводка статистик приведена в табл. 6.12. Все гистограммы унимодальны, но они значительно отклоняются от нормального распределения по величине той или иной из β-статистик. Тем не менее, если эти распределения сравнить с нормальным распределением, характеризующимся тем же средним и той же дисперсией, критерий χ^2 (хи-квадрат) (см. раздел 17.4) не будет сильно отклоняться от нормального распределения. Эти противоречия станут понятными из следующего примера. Наблюдаемое распределение значений сферичности для 900 кварцевых зерен из трех типов кварцитов показано в виде гистограммы на фиг. 6.13, а ожидаемое нормальное распределение с тем же средним и той же дисперсией показано плавной кривой. Если мы сравним теоретическое и эмпирическое распределения с помощью критерия хи-квадрат, то не обнаружим отклонений от нормального закона,

тогда как проверка гипотезы о нормальности с помощью асимметрии и эксцесса заставит нас отклонить ее при уровне значимости 5%. Основные характеристики критерия хи-квадрат показаны на диаграмме, на которой видно,

Таблица 6.12

Статистические характеристики распределения значений сферичности кварцевых зерен по размерам зерен и типам пород

Размер, *мк*	$\bar{X}$	$\hat{\sigma}$	$\sqrt{b_1}$	b_2	n
Размеры по всем типам пород					
500	0,765	0,077	—0,206*	2,981×	550
250	0,747	0,082	—0,081×	2,852×	900
177	0,758	0,085	—0,097×	2,489**	350
125	0,747	0,087	0,068*	2,884×	900
Все размеры	0,752	0,083	—0,151**	2,855×	2700
Типы пород по всем размерам					
Аркозы	0,733	0,086	—0,335**	2,870×	900
Граувакки	0,750	0,081	—0,154*	2,846×	900
Кварциты	0,772	0,078	—0,109×	2,734*	900
Сумма	0,752	0,083	—0,151**	2,855×	2700

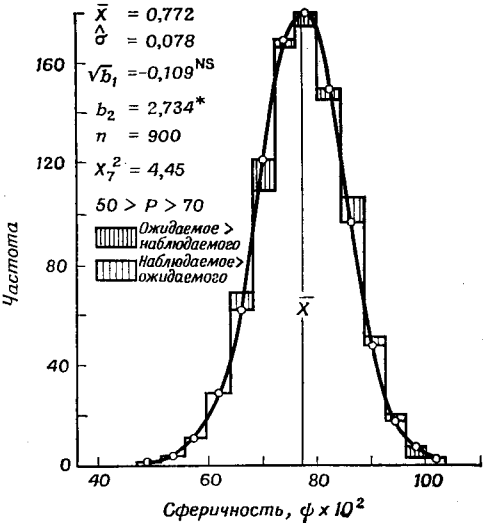
Таблица 6.13

Статистические характеристики распределения значений округлости зерен по трем типам пород

Тип породы	$\bar{X}$	$\hat{\sigma}$	$\sqrt{b_1}$	b_2	n	P_{χ^2}
Аркозы	0,378	0,074	—0,295*	3,010	300	0,01—0,001
Субграувакки	0,418	0,085	0,464**	4,400**	300	0,02—0,01
Кварциты	0,488	0,087	0,690**	3,772*	300	$<0,001$
Сумма	0,378	0,094	0,408**	3,974**	900	$<0,001$

что отклонения в сторону избыточности или недостаточности значений относительно невелики. Они свидетельствуют о том, что на окончаниях кривой и на ее плечах ожидаемые значения превосходят наблюдаемые, что, вероятно, объясняет слабую эксцессивность кривой. Это происходит частично вследствие того, что сферичность не может быть больше единицы, в то время как на кривой теоретического нормального распределения такого усечения нет. По мере того как увеличивается частота появления сферичных зерен, этот разрыв увеличивается и намечается асимметрия в сторону низких значений сферичности. Такого рода недостатки вообще характерны для шкал с амплитудой значений от нуля до единицы. Другим возможным фактором отклонений от нормального распределения является возможная непредставительность выборок. Например, сравнение двух выборок по 50 зерен, измеренных Керри, с 13 выборками по 50 зерен, измеренных в другом эксперименте, показывает увеличение асимметрии (величина $\sqrt{b_1}$ значима). Вполне вероятно, что метод отбора служит очень важным фактором в появлении таких отклонений от нормального распределения. В целях обсуждения

результатов этого исследования, видимо, можно принять нормальную модель в качестве адекватного первого приближения. Для общей совокупности в 2700 зерен проверка гипотезы о нормальности с помощью χ^2-критерия показала, что отклонение от нормального распределения ничтожно, а величина асимметрии, которая существенно отличается от нуля при уровне значимости 0,01, не очень велика. Такие отклонения можно объяснить усеченным характером кривой, возникающим вследствие особенностей выбранной шкалы и, возможно, непредставительности отобранных для измерений зерен.



Фиг. 6.13. Сферичность кварцевых зерен в кварцитах [81].

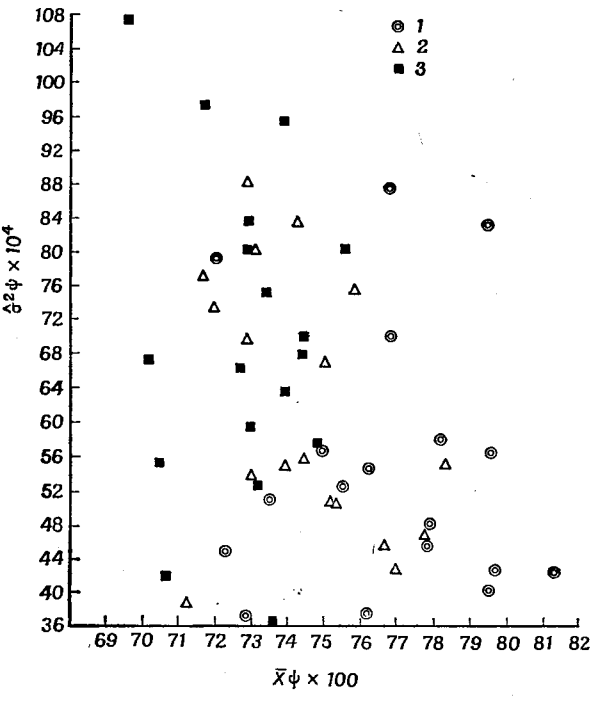
6.5.3. Анализ данных

Прежде всего представляется очевидным, что различия в оценке сферичности для зерен разных размеров оказываются непостоянными и на основании полученных данных можно заключить, что нет заметной связи между сферичностью и размером зерен в интервале от 125 до 500 *мк*. Нужно подчеркнуть, что поскольку результаты просеивания определяются взаимодействием формы и размера, то при изучении зависимости между сферичностью и размером зерен, просеивания как подготовительной операции следует избегать.

Наиболее впечатляющий результат исследований Керри, проявляющийся почти в каждом случае [82, фиг. 4 и 5], вероятно, можно видеть в том, что изменчивость сферичности кварцевых зерен различна для разных типов пород. При этой гетерогенности дисперсии нельзя сравнивать средние величины сферичности при данном способе отбора проб. Изменчивость средних величин сферичности для пробы из кварцитов больше, чем для граувакк, а изменчивость последних больше, чем у аркозов [82, фиг. 5].

Наиболее важные заключения касаются изменчивости. Очевидно, что пока она не стабилизируется, сравнение средних величин, по-видимому, будет скорее вводить в заблуждение, чем помогать. Среднее, конечно, не зависит от дисперсии в случайных выборках из совокупности с нормальным распределением (гл. 13 и 15). Нормальное распределение для данного случая можно допустить без риска потерять при этом закономерности в наших последующих выводах. Остается, таким образом, решить вопрос, являются ли изучаемые пробы случайными. Так как размер и сферичность в данном случае, по-видимому, не зависят друг от друга, можно использовать все три значения размера как три характеристики одного и того же образца. Получим три размера для каждого из двух образцов трех типов пород из трех формаций, т. е. 54 выборки. График зависимости средних значений и дисперсий для этих 54 выборок, состоящих из 50 зерен каждая, дан на фиг. 16.14, на которой видна слабая взаимосвязь между средними значениями сферичности и дисперсией для всей совокупности. Отсюда можно заключить, что эти выборки в самом деле являются случайными для некоторой нормальной совокупности. Таким образом, можно утверждать, что для данной совокупности среднее значение сферичности кварцевых зерен в осадочных породах составляет 0,750, а стандартное отклонение при большом объеме выборки весьма близко к 0,083. Ожидаемые значения сферичности должны быть

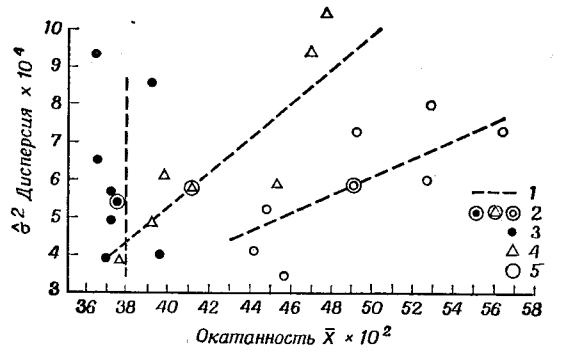
в основном заключены в пределах $\pm 3\sigma$, или $0{,}750 \pm 0{,}249 = 0{,}500 - 1000$. Если принять размер серии выборок в 50 зерен, то 3 из 1000 должны оказаться за пределами $\pm 3\sigma_{\bar{X}}$, т. е. $0{,}750 \pm 0{,}012 = 0{,}738 - 0{,}762$. За этими пределами лежат средние значения только для одной формации (аркозы), а средние для разных классов размеров зерен не выходят из указанных пределов. Следовательно, можно считать, что, исключая аркозы, ни один из этих классов не отличается существенно и все выборки могут быть случайными для некоторой нормальной совокупности.



Фиг. 6.14. Среднее и дисперсия измерений сферичности [81].

1 — кварциты; *2* — граувакки; *3* — аркозы.

С другой стороны, если мы разделим совокупность на три типа пород — аркозы, граувакки и кварциты, то соотношения средних значений и дисперсии не будут беспорядочными. В пробах из аркозов заметны изменения дисперсии в широких пределах и небольшие изменения средних значений. Трэнд для кварцитов противоположен — эта порода дает меньшую изменчивость в дисперсии, но широкий размах средних значений, а субграувакки занимают среднее положение между двумя первыми. Вряд ли эти пробы были случайными для некоторой нормальной совокупности, и возможное отклонение объясняется по существу неслучайным характером опробования. Конечно, если этого нет, вряд ли имеет смысл группировать сферичность по типам пород.



Фиг. 6.15. Среднее и дисперсия измерений округленности [81].

1 — аркозы; *2* — граувакки; *3* — кварциты; *4* — трэнды, намеченные на глаз; *5* — средние вначения по типам пород.

Распределение значений окатанности определенно является ненормальным. Очень большие отклонения от нормального распределения по всем частотам выявляются как с помощью критерия χ^2, так и по методу моментов. Заметная асимметричность и слабая эксцессивность этих кривых видны совершенно отчетливо [82, фиг. 6,7, стр. 1088, 1089], что объясняется далеко не случайным характером опробования или ненормальным распределением значений окатанности кварцевых зерен в породах, либо обеими указанными причинами. Если окатанность зависит от размеров, то намечается дополни-

тельная причина, обусловленная использованием зерен только одного размера.

В упомянутой работе [82] причины изменчивости показателя окатанности кварцевых зерен анализировались раздельно по различным типам пород, причем результаты оказались весьма различными. Их можно проиллюстрировать путем рассмотрения взаимоотношений между средним значением и дисперсией для каждой выборки в 50 зерен. Каждая из трех формаций была представлена двумя образцами, т. е. на каждый тип пород приходилось по шесть проб. И в этом случае, если рассматривать всю совокупность, никаких закономерностей подметить нельзя. Но если анализировать отдельно по типам пород, определенная закономерность намечается достаточно четко (фиг. 6.15): аркозы имеют широкий размах значений дисперсии при очень слабой изменчивости средних, в то время как в граувакках и кварцитах по мере роста средних значений окатанности дисперсия увеличивается. Разброс точек для кварцитов очень велик, что означает отличие кварцитовых формаций по сферичности и окатанности более, чем мы могли ожидать в предположении, что группирование должно было привести к выявлению однородных классов сферичности и окатанности кварцевых зерен. Гетерогенность дисперсии и в данном случае препятствует прямому сравнению средних значений.

Эти идеализированные диаграммы можно рассматривать как основу для разработки схемы опробования осадочных пород. Они в свою очередь согласуются с основной моделью (фиг. 2.3). Прежде всего разница в характере зависимости вызвана не различием в типах пород, а скорее степенью селективной сортировки зерен по форме. Аркозы формируются близ источников сноса, а граувакки — на различных расстояниях от них. Среди кварцитов известны разнообразные в данном отношении типы. В идеале мы можем ожидать, что осадочные породы, образовавшиеся близ источников сноса, когда обломочный материал подвергался относительно небольшой селективной сортировке, будут характеризоваться изменчивостью отдельных проб в широких пределах и малой изменчивостью средних значений между пробами. С другой стороны, для осадочных пород, отлагавшихся вдали от источников сноса, будет заметна тенденция к изменчивости средних значений в большом диапазоне между пробами и в меньшем диапазоне — в самих пробах. Так как кварциты обычно считаются обломочными породами, удаленными от источников сноса, можно было бы ожидать, что для них будет характерен последний случай. Однако кварциты некоторых формаций, включенных в эксперимент, генетически не относятся к истинным кварцитам, хотя и полностью отвечают им по составу (основной породообразующий минерал — кварц). Так, кварциты формации Гейтсберг, содержащие 10% микроклина, по характеру изменчивости измеряемых петрографических свойств, вероятно, ближе к аркозам.

Следовательно, при проведении будущих исследований отбор образцов из различных пород необходимо проводить с учетом различий в степени селективной сортировки. До тех пор, пока отбор проб не будет проводиться с соблюдением определенных требований, установить различия в форме зерен по средним величинам не удастся (вероятно, то же можно сказать о размерах и других измеряемых свойствах).

6.6. ЗАКЛЮЧЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЮ ФОРМ ЗЕРЕН ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Рассмотрев наиболее эффективные методы изучения изменений формы зерен в осадочных породах, можно прийти к некоторым вполне определенным выводам относительно метода экспериментов. Совершенно очевидно, что пока не будут должным образом учитываться различные факторы, получаемая петрографическая и петрологическая информация в лучшем случае окажется путаной, а в худшем — совершенно дезориентирующей.

Во-первых, необходимо использовать методику, которая действительно была бы способна давать информацию относительно самой концепции изучаемого свойства. Во-вторых, отбор проб необходимо производить по точному и совершенно определенному правилу, т. е. схема отбора проб должна соответствовать характеру изменчивости совокупности. Изучая, например, сферичность, необходимо непосредственно определять свойства отдельных зерен и обязательно в трех измерениях. Окатанность, вероятно, с успехом можно оценить путем визуального сравнения, но в обоих случаях следует учитывать разницу восприятия разных наблюдателей. Если мы хотим получить результаты, которые имели бы смысл, данные эксперимента должны эффективно контролироваться. Контроль особенно необходим при субъективной оценке, например при визуальном сравнении со стандартами, хотя этой оценкой нельзя пренебрегать даже при использовании методов точных измерений.

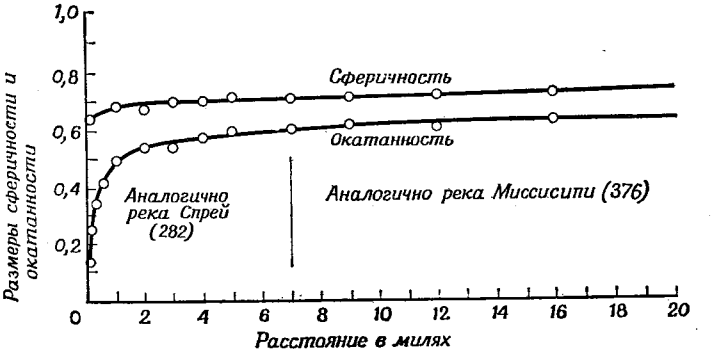
В конечном счете выражение многомерных измерений в отношениях не представляется необходимым, так как оно ведет лишь к потере информации; использование частных измерений в логарифмической шкале и изучение их с помощью многовариантных точечных диаграмм и соответствующих статистических вычислений дает больше преимуществ. В нескольких недавно опубликованных работах по этому вопросу было показано, что величины коротких осей c наиболее информативны, размеры длинных осей a являются следующими по значению, а значениями промежуточных осей b часто можно вообще пренебречь с малой потерей информации [28, 181, 204].

Если принимается этот метод, то измерение каждой оси представляет собой по существу измерение размера зерен, а совместные взаимозависимости размеров осей отображают одновременные изменения размера и формы обломков и, следовательно, наиболее точно отвечают требованиям теоретических условий, следующих из основного уравнения. Это в свою очередь указывает на то, что полученные величины P_{sh} являются функцией размера, формы и их взаимодействия, т. е. $P_{sh} = f(s, sh)$. Только в том случае, когда независимость размера и формы доказана, эти свойства можно рассматривать раздельно и говорить о целесообразности их раздельного измерения.

6.7. ИЗМЕНЧИВОСТЬ ФОРМЫ ЗЕРЕН И ЕЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Исследования изменчивости формы частиц осадочных пород проводятся как в лабораториях, так и в поле. Известны попытки геологической интерпретации изменчивости формы (см., например, [329, стр. 544]). После первых опытов Дюбре [88] с применением вибрационных установок эти эксперименты неоднократно повторялись в лаборатории (см., например, [251 и 425]). Главным свойством, которое подвергли изучению в этих экспериментах, была степень износа частиц. Аналогичное изучение, но в полевых условиях, принадлежит Маки [284], который наблюдал за изменением форм частиц вдоль относительно короткой и быстрой реки Спей, протекающей в Шотландии; износ и здесь был основным фактором изменения формы. Вид функции, выражающей зависимость изменения формы от времени или расстояния переноса этих форм, у обоих авторов исследований оказался одинаковым (фиг. 6.16). Сферичность, оцениваемая сначала в 0,5—0,6 единиц, на протяжении первых нескольких миль изменялась быстро, а затем чрезвычайно медленно. Аналогично окатанность, величина которой вначале составляла 0,2 единицы, быстро изменялась на первых этапах и затем достигла величины, которая, по-видимому, отвечала стадии зрелости равновесия. Следовательно, изменение формы частиц, вызванное абразией или износом, может проходить очень интенсивно на начальных стадиях седиментации близ источников сноса и затем становится примерно постоянным, или, другими словами, быстро приближается к равновесному значению.

Рассел и Тэйлор [378] изучали изменение формы кварцевых зерен песков на протяжении 1100 миль на реке Миссисипи. В этом случае было отмечено лишь очень небольшое изменение формы на всем выбранном отрезке русла [1]. Очевидно, что пробы в этом исследовании представляли ту часть кривой на фиг. 6.16, где форма изменяется очень медленно. Из этих двух экспериментов можно заключить, что для большей части обломочных осадочных пород износ частиц играет незначительную роль. Исключением служат лишь породы, залегающие близ источников сноса. В качестве доминирующего фактора в большинстве случаев служит процесс селективной сортировки. Если эта интерпретация верна, можно предложить следующую модель. Вначале совокупность состоит из частиц, например кварцевых зерен, в которой и сферичность и окатанность изменяются в широких пределах. Для этой стадии небольшая равновероятностная проба, состоящая, скажем, из



Фиг. 6.16. Форма функции, представляющей зависимость изменения формы частиц от расстояния (или от времени) [249].

50 зерен, будет охватывать всю амплитуду изменчивости значений; различия в средних значениях между пробами будут незначительны — это первая стадия модели опробования совокупности (фиг. 2.3). Затем происходит перенос на расстояние от нескольких миль до нескольких сотен миль, сопровождаемый селективной сортировкой,— это вторая стадия модели. Для этой стадии небольшой препарат, состоящий из 50 зерен и взятый из определенного слоя или комплекса слоев, покажет ограниченные изменения значений сферичности и окатанности; в то же время будут отмечены значительные различия в средних значениях между пробами, представляющими различные слои или комплексы,— это третья стадия модели (фиг. 2.3). Таким образом, любая совокупность кварцевых зерен дает одни и те же средние значения и одинаковый размах изменений, но взаимоотношения между средними значениями и дисперсией по небольшим равновероятностным пробам будут отражать степень селективной сортировки и будут фактически показателями зрелости процесса [132]. Эта модель отражает результаты лабораторных работ, полевых исследований и измерений осадочных пород, проведенных Керри [81 и 82]. Способ отбора проб является критическим моментом в оценке взаимоотношений. Представляется рациональным отбирать послойные пробы для всех совокупностей по определенной схеме, так как взаимоотношения средних значений и величин дисперсии для отдельных слоев дают возможность различать отложения с близко- и далекорасположенными источниками сноса. Принимая данную модель, мы допускаем, что с большей части

[1] Эти результаты очень трудно оценить однозначно, так как, судя по ранее описанным экспериментам, дисперсия между наблюдателями в опыте Рассела и Тэйлора могла достигать значений, близких к общей дисперсии [378].

площадей происходит снос кварцевых зерен, значения сферичности и окатанности которых меняются в широких пределах, и что в первом приближении зерна любой формы могут встречаться в равной мере. Если это предложение считать обоснованным, изучение формы зерен должно давать информации не по различиям площадей сноса, а только по процессам эрозии, переноса и отложения.

В составе обломочного материала осадочных пород встречаются также и угловатые частицы или частицы с низким значением сферичности. Обычно они довольно редки и встречаются чаще в хемогенных осадочных породах, чем в терригенных. Например, форма кварцевых зерен песчаников Солт-Уош на плато Колорадо весьма разнообразна, но на вид они совершенно такие же, как зерна типичных обломочных пород ([164] и табл. 6.7). В шлифах некоторых специфических пород наблюдаются чрезвычайно угловатые и неправильные кварцевые зерна, причем обычно эти породы характеризуются сильно нарушенной структурой, вызванной деформацией. В некоторых осадочных породах угловатые и неправильной формы кварцевые зерна и обломки кварцевых пород встречаются узко локально, будучи приуроченными к участкам развития карбонатного цемента [167 и 174]. Кюнен и Пердок [271] исследовали влияние химического растворения на зерна кварца, и результаты исследований, по-видимому, подтверждают отмеченную выше приуроченность.

Следовательно, можно заключить, что при изучении изменчивости формы кварцевых зерен главным показателем служит соотношение средних значений и дисперсий по небольшим равновероятностным пробам из однородных литологических комплексов. Информация, получаемая при этих исследованиях, отражает степень и интенсивность процесса селективной сортировки и может быть использована для дифференцированной реконструкции условий осадконакопления [28, 204, 295]; обычно такой реконструкции оказывается достаточно для освещения проблемы генезиса пород.

При необычно высокой степени угловатости и необычно низкой сферичности форма кварцевых зерен в значительной мере бывает обусловленной химическим растворением, сопровождающим какие-то специфические явления в процессе раннего или позднего диагенеза.

В процессе проводимых сейчас исследований кварцитовых галек формации Тускарора [169], галечников Монтурсвилла [170], некоторых ледниковых, аллювиальных и пляжных гравийных пород [411, 412] и конгломератов Олиан [181] наметилось, что изменчивость формы частиц в этих породах также подчиняется отмеченной выше закономерности. Если эта закономерность подтвердится окончательными выводами, то указанные соотношения средних значений и дисперсий внутри проб и между пробами, отобранными из отдельных литологических комплексов, можно будет распространить на размеры зерен во всем их многообразии. Это будет означать, что форма, измеренная непосредственно по отдельным элементам, меняется независимо от размера в случае, если изменения в составе ограничены, а влияние первичного сложения породы исключено.

ГЛАВА 7

Измерение пространственных взаимоотношений между зернами

Такое расположение кристаллов очень типично для термально метаморфизованных пород, в которых оно выражено в виде перекрещивающейся, или декуссатной, структуры. Кристаллы расположены во всех направлениях, но не беспорядочно, не по математическому закону случайности, а в определенном механическом порядке, обеспечивающем минимальный внутренний стресс.

A. H a r k e r, Metamorphism, Methuen and Co., Ltd., and E. P. Dutton and Co., Inc., p. 35, 1939

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Если состав m, размер s и форма sh частицы определены, ее можно считать полностью идентифицированной. Однако горная порода является агрегатом и многие ее характеристики зависят от способа расположения частиц в пространстве. Измерить же расположение частиц с помощью какой-либо простой процедуры невозможно. Необходимо иметь в виду два основных свойства: 1) расположение отдельных частиц o (ориентировка) и 2) взаимоотношение частиц друг с другом p (упаковка, или плотность заполнения пространства частицами). Прежде чем приступить к изучению этих свойств, определим сначала их концептуально, а затем наметим операционные процедуры для измерения. Концептуальное определение к настоящему времени вывести еще очень трудно. Что же касается процедур, которыми мы располагаем, они не изучены еще с достаточной полнотой [337]. Совершенно очевидно, что получаемые при измерениях значения обоих рассматриваемых свойств взаимосвязаны как друг с другом, так и с тремя указанными основными свойствами (m, s и sh) [329].

7.2. ИЗМЕРЕНИЕ ОРИЕНТИРОВКИ ЗЕРЕН; ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В идеальном случае положение частицы в пространстве должно быть определено однозначно по отношению к каким-либо стандартным осям. Однако это может быть осуществлено лишь в тех редких и необычных случаях, когда частица идентифицирована, извлечена из породы и ее положение в породе определено [200, 249, 386]. Такой способ можно использовать при изучении некоторых галек в галечниках или морене. Но обычно он неприменим к зернам диаметром меньше 10 *мм* [386]. Поэтому мелкогалечные породы, пески, илы, глины следует изучать каким-то другим способом. Прежде всего нужно иметь в виду, что положение частиц в породе не должно быть нарушено. В силу этого обычно пользуются шлифами, полированными поверхностями, поверхностями, образованными трещинами и т. д. Любая такая поверхность является двухмерным сечением некоторого трехмерного тела и представляет собой пробу этого тела. Необходимо, чтобы опробуе-

мая поверхность была представительной для агрегата, к которому она относится. Положение такой характерной поверхности очень трудно определить. Характерные поверхности, например плоскость напластования, могут оказаться непредставительными в отношении расположения частиц в породе. На практике обычно используется поверхность, перпендикулярная слоистости. В тех случаях, когда известны векторные свойства породы, можно использовать поверхность максимальной или минимальной проницаемости [149, 153, 157, 208]. Обычно предполагается, что изучаемая поверхность, расположенная перпендикулярно слоистости, является случайной пробой агрегата.

Ориентировкой частицы можно считать меру наклона некоторого фиксированного направления (линии или плоскости), выбранного в пределах частицы по отношению к какому-то намеченному направлению (линии или плоскости) вне ее. Практически, однако, вряд ли возможно найти какое-то характерное направление для данного зерна, если не считать кристаллографических осей, например ось *c* зерен кварца [120]. Пытались привязать наблюдаемые в шлифах «истинные» длинные оси кварцевых зерен к осям *c*. Но пока это не привело к однозначной спецификации длинных осей [212, 369]. Известны также попытки различать концы кристаллов кварцевого зерна по оси *c* один от другого [87], но, как показали Гриффитс и Розенфельд, этот способ оказался практически неприменим [149; см. также 386]. В силу этого при изучении ориентировки измеряют не идеальную ориентировку в какой-то единой системе координат, а определяют лишь степень предпочтительной ориентировки, или параллелизма видимых длинных осей зерен, например зерен кварца в шлифах, ориентированных относительно плоскости напластования, если положение последней выражено достаточно четко.

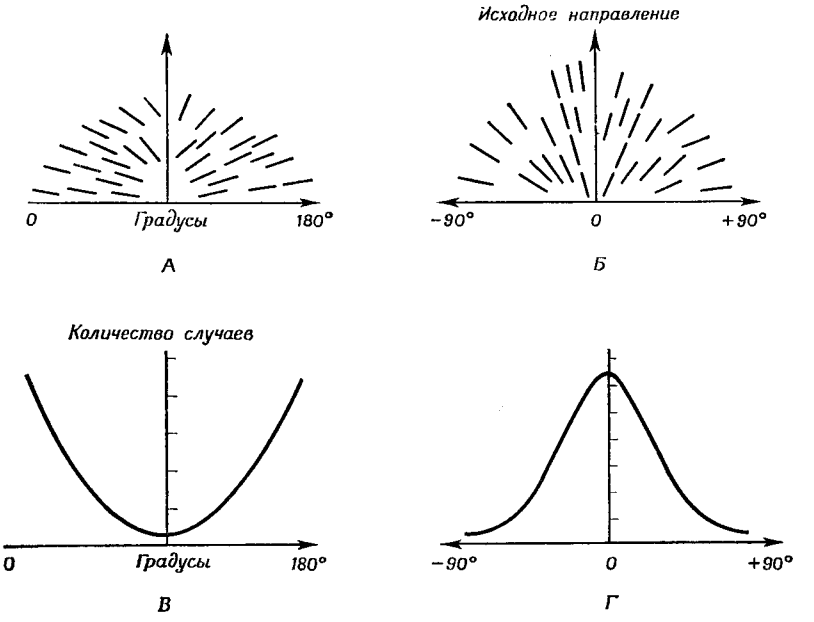
Если такое операционное определение принято, то с помощью измерений устанавливают ориентировку: предпочтительную, непредпочтительную, абсолютно беспорядочную (примерно равное количество осей зерен имеет самые разные направления), совершенную предпочтительную (все оси ориентированы в одном направлении). В действительности беспорядочная и совершенная ориентировки встречаются редко и в породах в большинстве случаев наблюдается та или иная степень предпочтительной ориентировки. Замеры проводят иногда на нескольких тысячах зерен и нужно считать количество зерен, ориентированных в той или иной предпочтительной ориентировке.

7.3. ПРОЦЕДУРА ЭКСПЕРИМЕНТА

Приступая к эксперименту, необходимо выбрать какой-либо из имеющихся в породе минералов, например кварц (значение *m* постоянно), и измерять ориентировку его зерен. Выбор слюды вместо кварца может показаться более удачным (см. раздел 9.3) и, возможно, более целесообразным, так как дисковидная форма чешуек слюды должна обусловливать их постоянную ориентировку (величина *sh* постоянна, изменения размеров чешуек ограничены). Однако этот выбор сопряжен с некоторыми трудностями, так как чешуйки слюды, характерные для многих осадочных пород, изогнуты и искривлены [1]. Если для измерений намечен кварц, следует выбрать однозначно определяемую ось, например длинную ось зерна, и измерить ее согласно описанию на стр. 105 и как показано на фиг. 6.7. Затем нужно выбрать некоторое фиксированное исходное направление и измерить угол между этим направлением и длинной осью. Так как мы не можем отличать один конец

[1] Если ориентировка зерен кварца, измеренная согласно описываемой ниже процедуре, определяется с учетом осевых отношений зерен, то оказывается, что изменения ориентировки резко уменьшаются для зерен с осевым отношением меньше 0,5 (см. [149, фиг. 6] и пример с песчаниками формации Перу, описанный в разделе 7.7).

оси от другого, цифры замеров будут находиться в пределах 180°, а не 360°. При предпочтительной ориентировке и выполнении измерений, начатых от исходного направления как некоторого среднего направления ориентировки, выбранного до опыта, найдем, что длинные оси обычно ориентированы в двух направлениях, составляющих небольшие углы с исходным направлением (фиг. 7.1, *А*), чем и обусловливается *U*-образная форма частотной кривой (фиг. 7.1, *Б*). Но так как исходное направление можно повернуть без риска потерять закономерность в ориентировке зерен, более удобно описывать ориентировку мерой отклонения от выбранного исходного направления (фиг. 7.1, *В*), и тогда замеры будут меняться в пределах от +90° до —90°, что приведет к унимодальной частотной кривой (фиг. 7.1, *Г*). Полученные при опыте данные можно регистрировать на карточках одновременно с замерами формы и размера (фиг. 12.1).



Ф и г. 7.1. Унимодальность, получаемая путем вращения исходного направления.
А — ориентировка длинных осей *а*; исходное направление — слоистость; *Б* — *U*-образная кривая распределения для случая *А*; *В* — ориентировка длинных осей *а*, измеренная как отклонение от направления, перпендикулярного слоистости; *Г* — унимодальная кривая распределения для случая *В* [164].

Измерения по описанной процедуре иногда сопряжены с рядом трудностей, часть из которых обычна для любых подобных процедур. К ним относится, в частности, проблема выбора зерен для измерений (см. раздел 7.4). Взаимозависимость измерений и их сложность можно показать на примере измерений зерен, форма которых в плане близка к округлой. В этом случае определить длинную ось становится делом весьма трудным. Таким образом, изменения в степени предпочтительной ориентировки являются здесь функцией формы зерен. Так же влияет и размер зерен: чем меньше размер зерен, тем труднее их измерить (например, зерна размером меньше 50 *мк*).

Установлено [149, фиг. 6, табл. 7], что дисперсия ориентировки уменьшается по мере увеличения вытянутости зерен. Зерна же, приближающиеся по форме к округлым, в большинстве случаев следует исключать из измерений степени предпочтительной ориентировки.

Таким образом, процедура измерений приводит к рассмотрению дисперсии (стандартных отклонений). При анализе результатов следует оценивать

именно дисперсии, а не средние значения, так как последние в большинстве случаев весьма условны [219]. Итак, предпочтительная ориентировка оценивается дисперсией, или стандартным отклонением. Для проверки значимости полученных данных можно рекомендовать критерий отношения дисперсий (см. также [336]). Чем меньше дисперсия или (стандартное отклонение), тем больше степень предпочтительной ориентировки. Если пространственные взаимоотношения зерен просты, эта процедура приводит к наиболее обычным распределениям.

7.4. ПРОЦЕДУРА ВЫБОРА ЗЕРЕН ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ

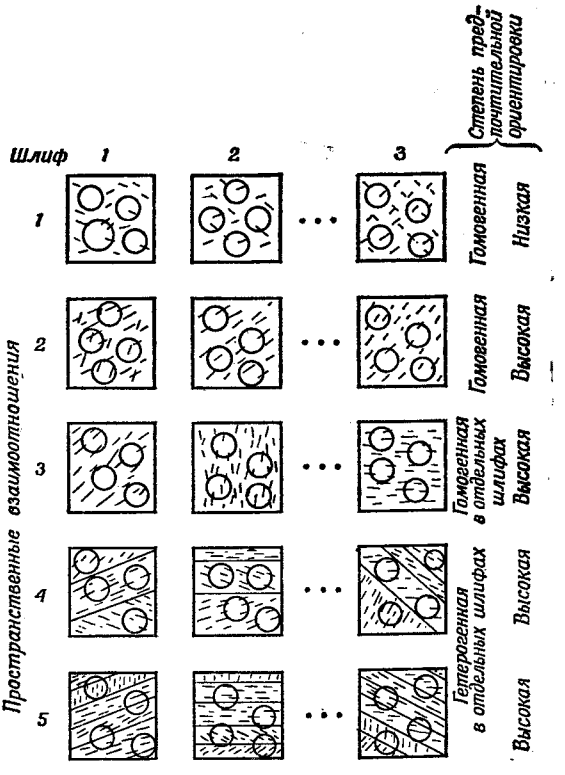
Каждый шлиф можно рассматривать как пробу образца, который представляет пробу породы. Так как в шлифе измеряются не все зерна (кварца), выбор зерен в шлифе — это еще одна стадия опробования. Практически можно изучить несколько полей, например 10, и в каждом из них провести измерения четырех-пяти зерен. Поле зрения в шлифе можно выбирать по произвольной сетке, например расположив их по трем линиям (по 3, 4 и 3 поля на первой, второй и третьей линиях соответственно); зерна в поле зрения выбирают также произвольно.

При простых пространственных взаимоотношениях зерен породы, проведенных замеров обычно бывает достаточно для оценки степени предпочтительной ориентировки. Но далеко не всегда до начала эксперимента бывает ясно, простой или сложной является изучаемая совокупность. Это обстоятельство и создает по существу неразрешимые трудности в разработке программы опробования. Анализ породы относительно степени предпочтительной ориентировки слагаемых ее зерен, измеренной дисперсиями, сводится к сравнению этих дисперсий (анализ дисперсий см. в гл. 18 и далее) на разных ступенях изучения породы (ее опробования). Предположим, все зерна ориентированы примерно в одном и том же направлении, что представляет высокую степень предпочтительной ориентировки. В этом случае каждое поле зрения является случайной выборкой из *одной и той же гомогенной совокупности* и по каждому полю можно оценить дисперсию значений этой совокупности, т. е. степень предпочтительной ориентировки. Расхождения в ориентировке между разными зернами в данном поле будут небольшими. С другой стороны, если нет предпочтительной ориентировки, каждому направлению отвечает примерно одинаковое количество зерен. Здесь каждое поле зрения (серия значений наклона осей зерен) будет также случайной выборкой из *одной и той же гомогенной совокупности*, и по дисперсиям в пределах полей можно оценить дисперсию для всей совокупности. Дисперсии между средними значениями разных полей окажутся небольшими. Таким образом, породы с большой и малой степенями предпочтительной ориентировки будут отличаться друг от друга лишь по малым или большим дисперсиям среди зерен в пределах каждого поля зрения.

Хорошо известно, что осадочные породы слоисты и что направление и степень предпочтительной ориентировки могут меняться от слоя к слою. Предположим, что поле зрения не выходит за пределы одного слоя и степень предпочтительной ориентировки в каждом слое велика, но что направление ориентировки в разных слоях различно. Тогда дисперсии в каждом из полей будут малыми, а между разными полями — большими. В этом случае суммарные дисперсии для шлифа могут привести к совершенно ложным выводам.

В более правдоподобном случае, часто встречающемся на практике, поле зрения микроскопа охватывает смежные части двух слоев. В этом случае, согласно только что рассмотренной модели, дисперсия внутри поля станет большой, а между разными полями она может выровняться и привести к результатам, сходным с теми, которые получаются при беспорядочной ориентировке.

Эти различные случаи графически выражены на фиг. 5.2, где случай 1 представляет беспорядочную ориентировку, а случай 2 — высокую степень предпочтительной ориентировки, свойственную ряду шлифов. Случай 3 иллюстрирует различие между шлифами и высокую степень предпочтительной ориентировки для каждого шлифа. Случаи 4 и 5 представляют серию слоистых осадочных пород, причем каждое поле зрения отвечает одному слою (4) или нескольким слоям (5). Очевидно, что если нужно получить реальную оценку степени предпочтительной ориентировки, необходимо решить проблемы опробования, которые бы удовлетворили всем указанным случаям. Должно быть также ясно, что аналогичные проблемы возникают при изучении любых пространственных взаимоотношений или структур с помощью измерения ориентировки, например при изучении петрологических процессов, выяснении направлений палеотечений, палеомагнетизма и при решении многих задач структурной геологии. Концептуальная простота требования приуроченности измерений к гомогенной совокупности очевидна. Но осуществить это требование чрезвычайно трудно.



Ф и г. 7.2. Источники изменчивости опробования при измерении предпочтительной ориентировки длинных осей зерен кварца в шлифах.

Некоторые исследователи (см., например, [113]) пытались показать, что если при анализе пространственных соотношений зерен (степени предпочтительной ориентировки) исходить из понятий «массивный» и «слоистый», это приведет к выявлению определенных различий. Различия действительно обнаруживаются, но при этом данные измерений значительно перекрывают друг друга (см. также [208 и 164]). Результаты применения рассмотренной методики к 50 образцам осадочных пород формации Солт-Уош описаны Гриффитсом и др. [164, табл. 2, стр. 47 и далее]. В этой работе впервые были разобраны проблемы опробования, возникающие при изучении пространственного расположения зерен.

7.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОРИЕНТИРОВКИ ДЛИННЫХ ОСЕЙ

Применяя какую-либо процедуру измерений для изучения генеральной совокупности, необходимо знать характер ожидаемого распределения. В случае измерения предпочтительной ориентировки с помощью описанной выше процедуры характер распределения можно предугадать довольно легко, задавшись некоторыми ограничениями. Прежде всего следует принять, что пространственные соотношения однородны для всей опробованной совокупности, например для шлифа.

Рассмотрим первый (крайний) случай, при котором предпочтительной ориентировки нет или распределение зерен совершенно беспорядочно, т. е. порода массивна или изотропна. В этом случае равное число значений будет встречаться в каждом классе в пределах всего размаха значений, равного $2a$ (от $+90°$ через 0 до $-90°$), что приводит к некоторому прямоугольному распределению. Было установлено, что при этом среднее значение $\mu = a/2$, а дисперсия $\sigma^2 = 2700$, т. е. стандартное отклонение равно 52° [156]. Для пород с гомогенным сложением такой случай — наихудший из возможных. Естественно, это не распространяется на породы с гетерогенным сложением.

С другой стороны, если все зерна ориентированы в одном и том же направлении, дисперсия будет равна нулю. В более реальном случае будет наблюдаться нормальное распределение с $\sigma = 30°$ и $\sigma^2 = 900$, что отвечает 6σ, или примерно размаху в 180°.

Следует ожидать, что практически частотная кривая будет находиться между прямоугольной и нормальной. В общем именно такой она и оказывается. Розенфельд [363, стр. 116 и далее], проведя измерения предпочтительной ориентировки зерен в 87 образцах ортокварцитов формации Орискани, пытался выразить распределение с помощью параболической функции. Представляется, что эти измерения также можно выразить комбинацией прямоугольного и нормального распределений. Стандартное отклонение для образцов субграувакк формаций Бериа и Поконо, по данным Эмери, составляет от 52 до 21° [113]. Хатта [208, фиг. 98, стр. 86], использовав описанную выше процедуру, исследовал ориентировку зерен в 322 шлифах и обнаружил, что стандартное отклонение меняется в них в пределах от 20 до 58,5°. Ряд примеров, касающихся пород гетерогенного сложения, рассмотрели Гриффитс и др. [164, стр. 47 и далее].

7.6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прежде всего следует убедиться в том, что по полученным данным можно правильно оценить дисперсию. Для этого целесообразно высчитать минимальную дисперсию по способу, предложенному Чейсом ([61]; см. также [164, стр. 78]). С этой целью разработана табличная форма, представленная в виде табл. 7.1. Для выполнения большего количества подобных расчетов данные нужно запрограммировать для ЭВМ [1]. При графическом выражении данных рекомендуем гистограмму распределения. По гистограмме можно судить о том, является ли распределение унимодальным и насколько необходимо вычисление минимальной дисперсии.

Зная минимальную дисперсию, ту или иную степень предпочтительной ориентировки можно выявить путем ряда критериев. Чейс использовал при этом как критерий χ^2, так и поправочный коэффициент [120, гл. 22 и 23]. Подходящие критерии описаны также Эйзенхартом [Eisenhart, ротапринт, 1954] и Тюки (см. в работе [164]; см. также [337, 372, 373]). Уотсон и Ирвинг [443] предлагают критерии применительно к анализу данных по палеомагнетизму, а Гриффитс и Розенфельд [154] и Гриффитс [156] описывают критерий отношений дисперсий. На примере изучения 50 образцов песчаников Солт-Уош было установлено, что критерий изотропности Тюки и отношение дисперсий дают примерно одинаковые результаты [164, фиг. 11—18, табл. 77]. Отношение дисперсии, безусловно, более удобно и легче применимо на практике.

Этот критерий основан на предположении, согласно которому в породе гомогенного сложения максимальная дисперсия находится в каком-либо прямоугольном распределении, представляющем беспорядочную ориентировку. Отношение оценок дисперсий (см. раздел 17.9) обычно выражается

[1] Разработана программа для ЭВМ типа IBM 1620; ее можно получить в Пенсильванском университете, факультет геохимии и минералогии.

Таблица 7.1

Нахождение источника минимальной дисперсии

Образец										
$N=$				$R=180$						
Нижний предел класса X_a	Частота F	Кумулятивная частота $S(F)$	Кумулятивное произведение $S(F)(X_a)$	$\overline{X}_a$	$\overline{X}_a-\overline{X}_1$	$\frac{N_a}{N}K_a$	$1-K_a$	$\frac{1}{2}R(1-K_a)+\frac{\overline{X}_a-\overline{X}_1}{2}R(1-K_a)\times$ значение столбца 10		K_a
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
−80										
−70										
−60										
−50										
−40										
−30										
−20										
−10										
0										
+10										
+20										
+30										
+40										
+50										
+60										
+70										
+80										
+90										

Примечание. Минимальная дисперсия — это максимальное отрицательное значение $I_v=K_a[(\overline{X}_a-\overline{X}_1)+90(1-K_a)]$; максимальная дисперсия — максимальное положительное значение $I_v=K_a\times[(\overline{X}_a-\overline{X}_1)+90(1-K_a)]$.

как $F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}=\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2$, где F — F-распределение Фишера [128, стр. 39 и далее; 15, стр. 117], ν_1 — число степеней свободы для оценки большей дисперсии $\hat{\sigma}_1^2$ и ν_2 — число степеней свободы для оценки меньшей дисперсии $\hat{\sigma}_2^2$. Так как максимальная дисперсия в прямоугольном распределении с размахом $\pm 90°$ равна 2700, то $\hat{\sigma}_1^2=2700$, а число степеней свободы для такого теоретического распределения совершенно неопределенно. Если число измеренных зерен равно n, то $\nu_2=n$, а выбрав какой-то подходящий уровень значимости (P_{05}), можно определить критическое значение F, соответствующее существенному отклонению от условий случайности (табл. 7.2). Для уменьшения чувствительности критерия (при $n>100$) рекомендуется, чтобы ν_1 было равным как ν_2, так и числу измерений [156, стр. 213; 153, стр. 53].

Таблица 7.2

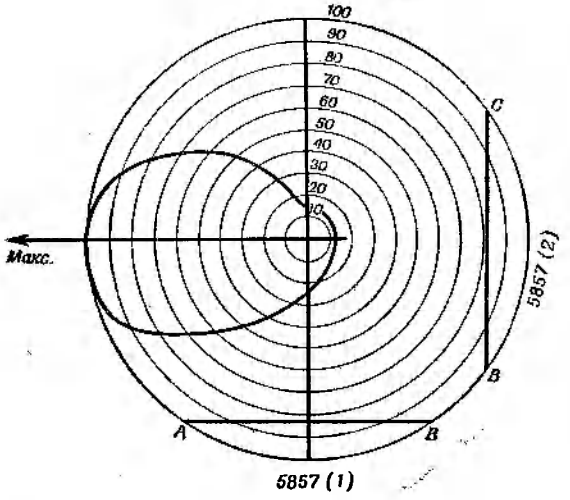
Величина отношения дисперсии F для ряда замеров зерен и соответствующие минимальные стандартные отклонения, необходимые для установления степени предпочтительной ориентировки ([153, табл. 8, стр. 53] с изменениями)

		Уровень значимости		
		$<0,05$	$<0,01$	$<0,001$
$\nu_1=\nu_2=800$	F	1,123	1,180	1,241
	σ_2^2	2404,2	2415,0	2168,6
	$\hat{\sigma}_2$	49,03	49,14	46,57
$\nu_1=\nu_2=200$	F	1,26	1,39	1,551
	$\hat{\sigma}_2^2$	2142,3	1942,4	1740,8
	$\hat{\sigma}_2$	46,29	44,07	41,72
$\nu_1=\nu_2=150$	F	1,315	1,458	1,657
	$\hat{\sigma}_2^2$	2053,2	1836,0	1624,5
	σ_2	45,31	42,25	40,30
$\nu_1=\nu_2=100$	F	1,39	1,59	
	$\hat{\sigma}_2^2$	1942,45	1698,113	
	$\hat{\sigma}_2$	44,07	41,21	

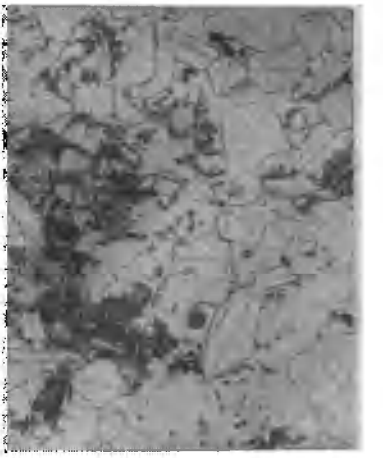
Пример. Если измерена ориентировка 100 осей, стандартное отклонение должно быть меньше 41,2, чтобы можно было установить степень предпочтительной (неслучайной) ориентировки на уровне 1% шкалы вероятности (P_{01}).

7.7. ОРИЕНТИРОВКА ЗЕРЕН В ПОРОДАХ ФОРМАЦИИ ПЕРУ-САНД (ПРИМЕР)

Формация Перу-Санд представлена тонкозернистыми глинистыми субграувакками пенсильванского возраста, развитыми в штате Оклахома.



Ф и г. 7.3. График направленной проницаемости для керна из песчаника формации Перу-Санд. Каталог Пенсильванского университета № 5857.



Ф и г. 7.4. Микрофотография проекции шлифа, на которой видны очертания зерен кварца, длинные оси и график проницаемости песчаника Брадфорд [149, стр. 250 и ниже]; ×200.

Из керна было сделано два шлифа, ориентированных перпендикулярно слоистости. Один из них располагается параллельно, другой — перпендику-

лярно направлению максимальной проницаемости (фиг. 7.3). График проницаемости резко асимметричен; таким образом намечается неоднородная ориентировка зерен. В каждом шлифе было изучено 10 полей, расположенных по трем линиям (по 3, 4 и 3 поля на линии). В каждом поле было произвольно выбрано по 25 зерен. На спроектированном изображении шлифа одним и тем же оператором (Банксом) были замерены длинные a-оси и короткие b-оси зерен, а также ориентировка длинных осей. Проекция одного из типичных полей, на которой видны очертания зерен кварца и отмечены длинные оси, показана на фиг. 7.4. Полученные данные состоят из 250 замеров трех переменных в каждом шлифе.

7.8. АНАЛИЗ ДАННЫХ ПО ФОРМАЦИИ ПЕРУ-САНД

Зерна кварца имеют эллипсоидальную форму. Если установлена резко выраженная предпочтительная ориентировка, нужно ожидать, что форма зерен, выраженная в виде осевого отношения b/a, будет различной для разных направлений. В силу этого дисперсия осевых отношений в какой-то мере обнаружит предпочтительную ориентировку. Распределение осевых отношений зерен кварца по обоим шлифам образца керна № 5857 сведена в табл. 7.3 в виде основных статистик.

Таблица 7.3

Статистические характеристики распределения осевых отношений b/a зерен кварца образцов 5857 (1) и 5857 (2) песчаников формации Перу-Санд

Статистики	5857 (1)	5857 (2)
$\overline{X}$	0,623	0,639
$\hat{\sigma}$	0,158	0,168
$\sqrt{b_1}$	0,0001	0,079
b_2	2,496*	2,293**
n	250	248 [1]
χ^2	10,41	16,09
P	$70 > P > 80$	$30 > P > 20$

[1] Измерения осевого отношения на двух зернах не учтены.

Распределения являются в данном случае унимодальными и симметричными ($\sqrt{b_1}$ не отличается существенно от нуля). Они отличаются от нормального распределения по эксцессу. Для обоих образцов распределения слабо эксцессивны, для центральных классов наблюдается недостаток, а для «хвостовых» частей распределения — избыток. Но эти отклонения невелики, что выявляется из сравнения наблюдаемых частот с ожидаемым нормальным распределением, обладающим тем же средним значением и стандартным отклонением; значения критерия χ^2 не указывают на отличия от нормальности (табл. 7.3). Отсюда следует, что распределения частостей близки к нормальным.

Если теперь сравнить данные, полученные для осевых отношений зерен кварца по двум шлифам с помощью анализа дисперсии [1], окажется, что различие средних значений между шлифами лишь незначительно больше, чем различие в средних значениях между полями зрения в пределах одного шлифа (табл. 7.4). Если эти два шлифа изучать отдельно (табл. 7.5), можно заметить, что осевые отношения зерен кварца весьма близки друг другу

[1] Об анализе дисперсий см. гл. 18 и ниже.

Таблица 7.4

Дисперсионный анализ осевых отношений зерен кварца в образце керна № 5857 песчаников формации Перу-Санд

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий
Между шлифами	1	26 484,64	26 484,64	1
Между полями зрения	18	968 716,20	53 817,57	2,117*
Между зернами	487 [1]	12 152 271,36	25 423,16	
Сумма	497 [1]	13 147 472,20		

[1] Число степеней свободы уменьшено на два в соответствии с двумя неучтенными измерениями.

Таблица 7.5

Дисперсионный анализ осевых отношений b/a зерен кварца в различных шлифах песчаника формации Перу-Санд

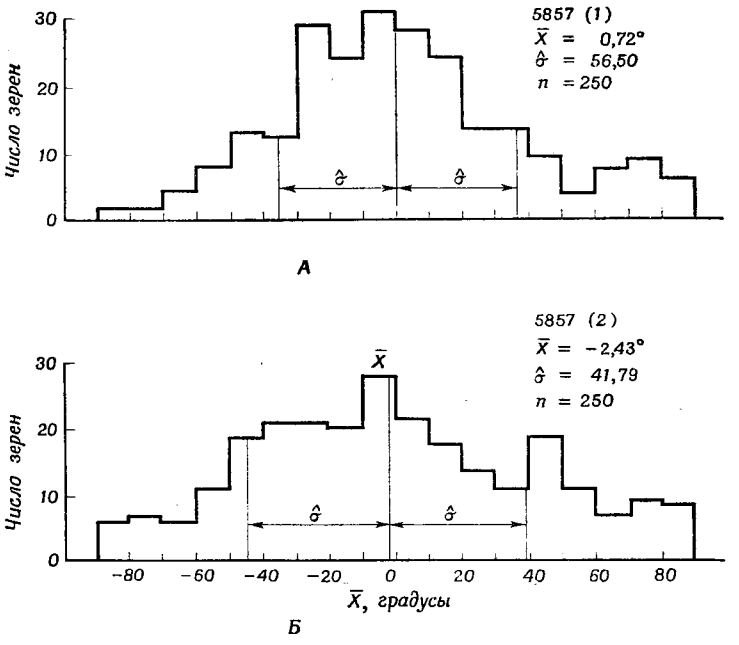
Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий F
Шлиф 5857 (1), ориентированный параллельно максимальной проницаемости				
Между полями зрения	9	249 067,56	27 674,17	1,104
Между зернами (ошибка)	240	6 014 417,12	25 960,07	
Сумма	249	6 263 484,68	25 154,56	
Шлиф 5858 (2), ориентированный параллельно минимальной проницаемости				
Между полями зрения	9	719 648,68	79 960,96	3,101**
Между зернами (ошибка)	238	6 137 854,22	25 789,30	
Сумма	247	6 857 502,90	27 540,17	

в шлифе, параллельном максимальной проницаемости, а в шлифе, параллельном минимальной проницаемости, различие между средними для полей зрения значениями заметно (при уровне значимости 1%) превышают дисперсию между зернами. В табл. 7.5 видно, что в шлифе, ориентированном перпендикулярно максимальной проницаемости, осевые отношения распределены «пятнисто». Отсюда можно предположить, что в плоскости максимальной проницаемости ориентировка зерен гомогенна, а в перпендикулярном направлении она может быть гетерогенной. Следовательно, на начальных этапах анализа целесообразно анализировать каждый шлиф отдельно.

Частотная кривая значений ориентировки длинных осей графически представлена на фиг. 7.5, где в средней части графика, отвечающего шлифу, параллельному максимальной проницаемости, довольно четко выражен выступ [5857 (1), фиг. 7.5,*А*], чего нет на графике для шлифа, перпендикулярного максимальной проницаемости [5857 (2), фиг. 7.5,*Б*]. Соответствующие статистики даны в табл. 7.6.

Анализ дисперсий ориентировки длинных осей a зерен кварца в двух рассматриваемых шлифах сведен в табл. 7.7. Результаты его сходны с теми, которые были получены при анализе осевых отношений этих зерен.

Если средние значения для разных полей зрения не вносят изменений в тот характер дисперсий, который получается из анализа зерен в пределах



Ф и г. 7.5. Гистограммы распределения ориентировки кварцевых зерен в шлифах граувакового песчаника формации Перу-Санд.

А — плоскость шлифа параллельна максимальной проницаемости; *Б* — плоскость шлифа параллельна минимальной проницаемости.

одного поля, то из сравнения разных шлифов выявляется другая картина. В шлифах, параллельных максимальной проницаемости, дисперсии средних значений между полями меньше, чем дисперсии между зернами в каждом из полей, в то время как в шлифах, перпендикулярных максимальной

Таблица 7.6

Статистические характеристики распределения ориентировки длинных осей *a* зерен кварца в песчаниках формации Перу-Санд

Статистики	Шлиф	
	5857 (1)	5857 (2)
$\bar{X}$	0,72	−2,43
$\hat{\sigma}$	36,50	41,80
n	250	249[1]

[1] Замер ориентировки одного из зерен не учтен.

проницаемости, первые больше вторых. Нет большого смысла сравнивать средние значения ориентировки в расчете на один шлиф, так как наша цель состоит в сравнении степени предпочтительной ориентировки, т. е. в анализе дисперсий. Так как оба шлифа гомогенны, для сравнения можно пользоваться общим количеством. Из последнего отношения дисперсий, т. е. $F = 1700{,}29/1307{,}81 \approx 1300$, находим, что при степенях свободы $\nu_1 = 249$ и $\nu_2 = 248$ эта величина F является значимой при уровне значимости 5%.

Таблица 7.7

Дисперсионный анализ ориентировки длинных осей a зерен кварца в различных шлифах песчаника формации Перу-Санд

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий
Шлиф 5857 (1), ориентированный параллельно максимальной проницаемости				
Между полями зрения	9	5 378,76	597,64	1×
Между зернами (ошибка)	240	320 266,08	1 334,442	
Сумма	249	325 644,84	1 307,811	
Шлиф 5857 (2), ориентированный параллельно минимальной проницаемости				
Между полями зрения	9	22 946,18	2 549,58	1,528×
Между зернами (ошибка)	239	398 726,89	1 668,31	
Сумма	248	421 673,07	1 700,29	

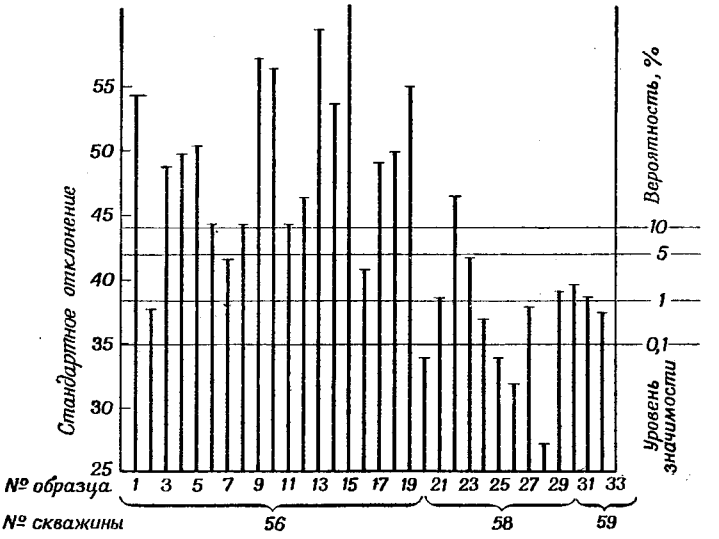
Таким образом, в рассмотренном примере наибольшая степень предпочтительной ориентировки свойственна направлению, параллельному максимальной проницаемости.

7.9. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВЫВОДЫ ИЗ АНАЛИЗА ЗАМЕРОВ ОРИЕНТИРОВКИ

В рассмотренном анализе мы пытались различать отдельные источники изменчивости, например различия между операторами или между средними значениями для полей. Поэтому оказывалось возможным определять степень предпочтительной ориентировки. Наиболее совершенная ориентировка обычно свойственна шлифам, параллельным максимальной проницаемости [149, 154, 156, 208]. Когда проведение эксперимента сопряжено с большим количеством измерений, выполняемых несколькими операторами, один из наиболее важных источников изменчивости обусловливается смешанным эффектом действия оператора и шлифа. Если эти взаимодействия оператора и шлифа значительны, эксперимент обречен на неудачу, так как ошибка, вносимая разными операторами, не поддается оценке. В этом случае сравнения на высоком уровне значимости нельзя интерпретировать. Точно так же, если дисперсия между полями зрения значительно больше, чем между зернами, то отсюда следует вывод о различной ориентировке зерен в разных частях шлифа. Определение среднего значения ориентировки с использованием суммарной дисперсии в таких случаях было бы неоправданно, а физический смысл такого среднего значения оказался бы довольно сомнительным. Рассмотренные в предыдущих разделах проблемы отбора зерен или полей зрения для замеров возникают в тех случаях, когда дисперсии внутри шлифа или другой изучаемой совокупности неоднородны. Во всех случаях, когда проводят измерения ориентировки, прежде чем сравнивать средние значения (усредненную ориентировку) или дисперсию (степень предпочтительной ориентировки), нужно убедиться в однородности полученных данных. Если предпочтительную ориентировку установить нельзя (при беспорядочном распределении), то среднее ее значение вряд ли будет представлять какое-либо специфическое направление, которому можно было бы приписать определенный физический смысл, например направление течений, ориентировку магнитного поля и др. Далее, если высокая сте-

пень предпочтительной ориентировки устанавливается, но средние значения для разных стадий опробования изменчивы, вывод общего среднего без соответствующей оценки изменчивых значений также не имеет большого смысла. Таким образом, прежде чем искать какой-либо физический смысл полученного значения ориентировки, необходимо убедиться в однородности дисперсий.

Если из одной и той же формации изучают ряд шлифов, то обычно получают весьма различные результаты, так что в одних породах обнаруживают высокую степень предпочтительной ориентировки, а в других — лишь незначительно отличающуюся от беспорядочной ориентировки. На фиг. 7.6 приведен пример, иллюстрирующий различную степень предпочтительной



Ф и г. 7.6. Степень параллелизма ориентировки зерен кварца в песчаниках формации Макстон, Западная Виргиния.

ориентировки в 33 образцах нефтеносных субграувакковых песчаников формации Мэкстон миссисипского возраста из Западной Виргинии. В каждом шлифе измерялось только по 40 зерен, что обычно достаточно для определения предпочтительной ориентировки лишь в том случае, если разные зерна ориентированы почти в одном направлении. Тем не менее результаты этих исследований оказались сходными с результатами изучения 50 образцов песчаников формации Моррисон, Солт-Уош, плато Колорадо [164, фиг. II — 11, стр. 55], где в каждом шлифе измерялось по 300 зерен. На фиг. 7.6 обозначены уровни значимости $P = 0{,}1$, 1, 5 и 10%. Так как число замеренных зерен равно 40, то 10-процентный уровень будет наиболее реальным. Стандартные отклонения меняются от 27,4 до 59,1, и на 10-процентном уровне вероятности в 17 из 33 образцов не было обнаружено существенного отклонения от беспорядочной ориентировки. Очевидно, что среднее значение по 33 образцам имело бы сомнительную ценность; также сомнителен был бы какой-либо физический смысл среднего значения, основанный на среднем (по 17 образцам) значении.

Эмери [113] пытался выяснить соотношения между результатами измерений ориентировки и текстурами пород. Он изучил 16 образцов миссисипских нефтеносных песчаников формации Бериа из восточной части Огайо и 16 образцов песчаников того же возраста из формации Поконо, Пенсильвания. Все они принадлежали к субграуваккам. Изучая шлифы под микроскопом, он разделил породы по текстурным признакам на три категории: поро-

ды со слоистой текстурой (с ясно выраженной слоистостью), с массивной текстурой (в этих породах слоистости нет) и породы с неясно выраженной слоистостью. Результаты исследований сведены в табл. 7.8. Связь между

Таблица 7.8

Связь между слоистостью и предпочтительной ориентировкой в некоторых осадочных породах миссисипского возраста

	$N = 32$ Стандартное отклонение ориентировки в градусах							
	Значимые отклонения					Незначимые отклонения		
	25	25—30	30—35	35—40	40—46	46—50	> 50	Сумма
Косослоистые породы	1	1						2
Слоистые породы		9	3					12
Неяснослоистые породы		1	2	1	4		1	9
Массивные породы			2	2	3	1	1	9
Сумма	1	11	7	3	7	1	2	32

высокой степенью ориентировки и хорошо выраженной слоистостью совершенно очевидна, хотя здесь наблюдаются и некоторые несоответствия. Так, Эмери обнаружил, что наиболее высокая степень предпочтительной ориентировки ($\hat{\sigma} < 30°$) свойственна косослоистым песчаникам.

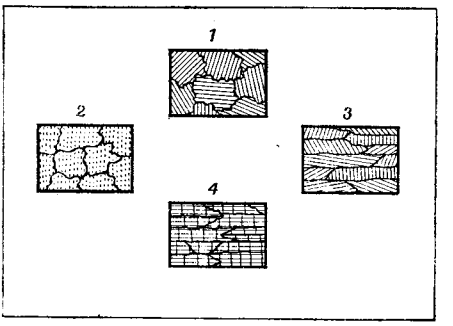
Предпочтительную ориентировку никогда нельзя установить в шлифах, взятых параллельно слоистости. Если обнаружена некоторая ориентировка длинных осей кварца или галек, то этой ориентировки и следовало ожидать [48]. Такое явление довольно обычно, оно свойственно песчаникам формации Перу, некоторым песчаникам формации Брадфорд, а также галечникам, изученным Кайе [83].

7.10. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ОРИЕНТИРОВКИ, ВЫЯВЛЯЕМЫЕ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ

Агрегаты сильно меняются по характеру пространственного распределения элементов. Одни из них обладают высокой степенью пространственной ориентировки, другие совсем не ориентированы, т. е. элементы расположены беспорядочно. Ориентировка может быть гомогенной по всей изучаемой совокупности или гетерогенной. По упорядоченности ориентировки частиц породы можно разделить по меньшей мере на четыре класса, которые тесно связаны постепенными переходами. Первый класс характеризуется высокой степенью предпочтительной ориентировки, отличающейся гомогенностью; второй — столь же высокой степенью предпочтительной ориентировки, причем отдельные слои или прослойки породы отличаются как по направлению, так и по степени совершенства предпочтительной ориентировки; третий — гетерогенным пятнистым распределением участков, различных по степени предпочтительной ориентировки (породы с нарушенной текстурой); четвертый класс — отсутствием предпочтительной ориентировки (массивные породы). Все эти породы реально существуют; каждому из классов соответствует типичное распределение значений ориентировки. Первому классу обычно отвечает унимодальная симметричная гистограмма, а четвертому — прямоугольная. Второму и третьему классам свойственно полимодальное распределение. Концептуально эти классы вырисовываются совершенно ясно. Практически же легко выделить лишь те породы, кото-

рые относятся к первому и четвертому классам. Трудности в классификации усугубляются еще и сложным взаимодействием, существующим между породами с различной степенью ориентировки, и характером выборок для измерения (программой опробования).

Игнорируя эти трудности практического порядка, ориентированное распределение частиц в пространстве можно проанализировать гипотетически. Выделяется два вида ориентировки: один, обусловленный внутренней кристаллографической структурой, и другой — внешней морфологией частиц. Отсюда и появилась возможность выделить четыре класса (фиг. 7.7: 1) предпочтительной ориентировки может не быть, она иногда не выражается ни структурно, ни морфологически; 2) ориентировка выявляется либо по структурным, либо по морфологическим признакам; 3) ориентировка

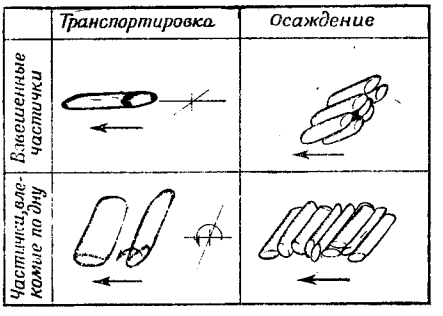


Фиг. 7.7. Характер внутреннего строения агрегатов (зарисовка Л. Якобсена).
1 — ориентировки нет; *2* — ориентировка сетчатая; *3* — ориентировка пространственная; *4* — ориентировки сетчатая и пространственная.

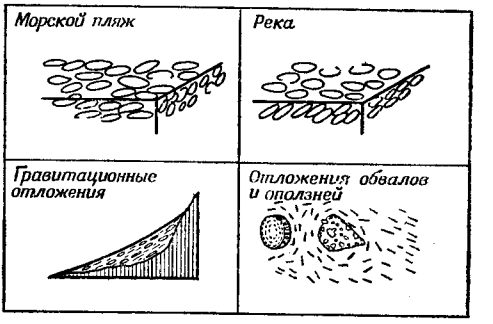
выражается структурно, но не морфологически, и наоборот; 4) ориентировка вырисовывается как по структурным, так и по морфологическим признакам. Довольно легко догадаться, что четвертый класс характерен для некоторых метаморфических пород (сланцы, гнейсы, метакварциты и др. породы). В основном к породам этого же типа, вероятно, относится класс со структурной, но не морфологической ориентировкой (мраморы, роговики, метакварциты). Класс с морфологической, но не со структурной ориентировкой, по-видимому, типичен для осадочных пород, хотя известны случаи, при которых в этих породах фиксируются обе разновидности предпочтительной ориентировки [212, 369]. Первый класс (без ориентировки) практически трудно представить. Наиболее близка к нему «декуссатная текстура» [185, стр. 34—35], хотя Харакер по каким-то непонятным причинам настойчиво указывает, что под этой текстурой нельзя подразумевать беспорядочное расположение (эпиграф к данной главе и работа [185, стр. 35]). Во многих случаях морфология отражает внутреннюю структуру породы, в силу чего морфологически предпочтительная ориентировка часто обусловливает структурную и наоборот. Так, многие изверженные породы обладают текстурными признаками осадочных пород (расслоенные интрузии, сортировка кристаллов и др.). В любой породе, сформированной в результате какого-либо простого процесса, предпочтительная ориентировка в той или иной мере, но будет выражена. Если же она не проявлена, из этого можно заключить, что на первичный простой процесс литогенеза был наложен какой-то вторичный процесс. Применительно к осадочным породам это обычно значит, что первичное сложение породы было впоследствии нарушено, например вследствие искривления слоистости, обвала, жизнедеятельности червей и т. д.

Если в процессе формирования осадочной породы анизотропные по размерам частицы перемещаются потоком флюида, длинные их оси будут либо параллельны, либо перпендикулярны направлению потока (фиг. 7.8). Первый случай характеризует взвешенные частицы, второй — частицы, перекатывающиеся по дну. Эти особенности ориентировки сохраняются и нос-

ле осаждения частиц, хотя одно направление здесь может сочетаться с другим [48]. В породе степень предпочтительной ориентировки может быть различна для разных направлений (фиг. 7.8). Почти все частицы после осаждения их на дно будут передвигаться, касаясь дна. Отсюда, естественно, окончательная ориентировка обломочного материала будет определяться эффектом перемещения частиц по дну. До данного момента анализ представляется довольно простым. Но в природных процессах действуют осложняющие факторы. Кайе описал влияние размера и формы субстрата, на котором осаждаются частицы. Как размер, так и форма субстрата изменчивы. Характерная особенность ориентировки, ее измеренного значения состоит в том, что она фактически является не независимой величиной, а функцией



Ф и г. 7.8. Происхождение ориентировки зерен в осадочных породах (зарисовка Л. Якобсена).



Ф и г. 7.9. Ориентировка частиц и характер процесса (зарисовка Л. Якобсена).

от состава частиц (m), размера (s), формы (sh), ориентировки (o) и упаковки (p). Все эти факторы, кроме того, взаимодействуют между собой (см., например, работу [208]).

На фиг. 7.9 сведены различные варианты пространственных соотношений частиц. В отложениях морских пляжей и рек [48] обнаружена довольно большая степень предпочтительной ориентировки, причем одно направление здесь в значительной степени накладывается на другое. В различных ледниковых отложениях часто также выявляется предпочтительная ориентировка составляющих их компонентов [200, 249, 349]. Ориентировка эта определяется в основном направлениями господствующих течений. Частицам отложений гравитационного типа и делювия обычно также свойствен параллелизм. Ориентировка их определяется положением основной поверхности, вдоль которой происходит перемещение [301]. Наконец, для пород с нарушенным сложением, иногда называемых обвальными, характерно пятнистое распределение ориентировки, причем здесь встречается и кольцевая ориентировка (так называемые «штормовые валы»).

На основании приведенного анализа очевидно, что все случаи, встречающиеся при измерениях предпочтительной ориентировки, легко объясняются тем или иным характером исходного механизма. Обычно следует ожидать, что в результате измерений должна быть установлена та или иная степень предпочтительной ориентировки. Если она не устанавливается, это указывает на дефекты опробования, т. е. на то, что принятой схемой опробования нельзя уловить существующей ориентировки. До тех пор пока не будет найдена удовлетворительная схема опробования, результаты экспериментов будут ограничиваться лишь простейшей гомогенной ориентировкой.

ГЛАВА 8

Измерение плотности упаковки зерен в породах

Термин «упаковка» будет применяться здесь к любому способу расположения твердых частиц, при котором каждая частица находится в гравитационном поле Земли и поддерживается вследствие соприкосновения этой частицы с соседними такими же частицами.

L. C. Graton, H. J. Fraser, Systematic Packing of Spheres with Particular Relation to Porosity and Permeability, J. Geol., 43, 790, 1935

8.1. ВВЕДЕНИЕ; КОНЦЕПЦИЯ

Понятие о расположении элементов (или частиц) агрегата включает также понятие об упаковке, т. е. о плотности заполнения пространства элементами агрегата. Это понятие в равной мере относится как к плотности вещества вселенной, так и к мельчайшим частицам атома, составляющим его ядро, либо вращающимся вокруг него. Во всех случаях при концептуальном рассмотрении этого понятия базируются на постоянном размере и составе, т. е. на постоянных четырех из пяти основных свойств,— составе, размере, форме и ориентировке. Таким образом, при дальнейшем анализе рассматривается лишь одно свойство, не взаимодействующее с остальными. Вполне очевидно, что такое упрощение снизит ценность модели, поэтому ее нужно как-то усовершенствовать. Например, при изучении плотности упаковки ионов [119] следует исходить из сфер ионов кислорода, затем, усложнив модель, учитывать упорядоченное или неупорядоченное их расположение, поляризационную способность, влияние направленного поля и т. д. Форма небесных тел теоретически считалась сферической, но теперь установлено, что эта форма часто отклоняется от сферической.

Понятие «упаковка» песчинок сферической формы в породе длительное время было предметом теоретического анализа и практических исследований [123, 124, 145, 329, 401]. Наблюдений над природными агрегатами все еще недостаточно, хотя начиная с Кайе [48] результаты этих наблюдений публикуются все более и более часто [113, 224, 288, 425]. Такие исследования нуждаются еще в совершенствовании соответствующих технических приемов, которые позволили бы практически оценить концептуальное понятие. Известны многочисленные попытки косвенного определения плотности упаковки посредством измерения пористости или плотности (см., например, работы [17 и 193]). Но так же, как это было и с другими уже рассмотренными свойствами, из-за сложных взаимоотношений между основными свойствами и различий в поведении пород при экспериментах такие попытки обычно обречены на неудачу. Получаемые при этом результаты не поддаются интерпретации, если не считать экспериментов с простейшими агрегатами.

8.2. ОТ КОНЦЕПЦИИ К ОПЕРАЦИОННЫМ ПРОЦЕДУРАМ

Исторический обзор развития понятия об упаковке зерен как концепции и постепенный переход от концепции к операционным процедурам сведены в табл. 8.1. Большинство исследователей, пытаясь перейти от концепции к операционным процедурам, различали и изучали несколько свойств.

Таблица 8.1

Эволюция понятий об упаковке зерен

Автор	Дата	Свойства индивидуальных зерен	Свойства группы зерен	Литературный источник
Сликтер	1899	Теоретический обзор относительно упаковки сферических частиц		[401]
Грейтон и Фрейзер	1935	а) Положение	б) Соприкосновение или общее расположение	[145]
Кайе	1938			[48]
Тэйлор	1950	а) Число контактов на зерно б) Тип контактов		[424]
Массон	1950	*Определение.* Пространственная плотность зерен в агрегате а) Число контактов между зернами б) Конфигурация контактов	в) Плотность расположения сечений зерен на плоскости	[288]
Гриффитс	1950—1951	*Определение.* Положение частиц относительно окружающих частиц		Ротапринт, «Метод анализа осадочных пород»
Крынин	1953—1954	а) Контакты или соприкосновения б) Степень сходства очертаний контактов (характер контактов)	в) Близость расположения зерен в группе или их рассредоточенность	Устное сообщение (см. в работах [224, 225, 365])
Розенфельд	1953	а) Процент контактов между зернами (по Массону)		[365]
Эмери	1953—1954	а) Количество контактов кварцевых зерен на линию (умноженное на размер плюс длина линии)		[113, 114]
Кан	1954	*Определение.* Взаимные пространственные соотношения между зернами а) Контакты зерен (сближенность упаковки) б) Форма контактов (определяется, но не измеряется)	в) Плотность упаковки	[224, 225]

Безусловно, любая оценка упаковки p является в значительной мере функцией пяти основных свойств. Другими словами, контакты между зернами будут меняться по характеру (взаимным соотношениям), протяженности, форме и расположению. Таким образом, определяя данное понятие, мы встречаемся с той же ситуацией, с которой имели дело при рассмотрении понятий о других свойствах.

Кайе [48] пытался оценить степень соприкосновения зерен или характер их взаимного расположения в обнажениях и таким образом разработал методику изучения в полевых условиях. Основная операция состоит в сравнении внешнего вида изучаемого обнажения со стандартами, изображенными

на фотографиях. Недостатки такого визуального сравнения, как и любой подобной субъективной оценки, очевидны (см. раздел 6.2, где рассматривается визуальное сравнение сферичности и окатанности зерен).

Другие попытки в большинстве случаев оказались также неудачными, так как они не привели к новым методикам измерений. Это видно из сравнения табл. 8.1 и 8.2, в которых сведено в хронологическом порядке развитие

Таблица 8.2

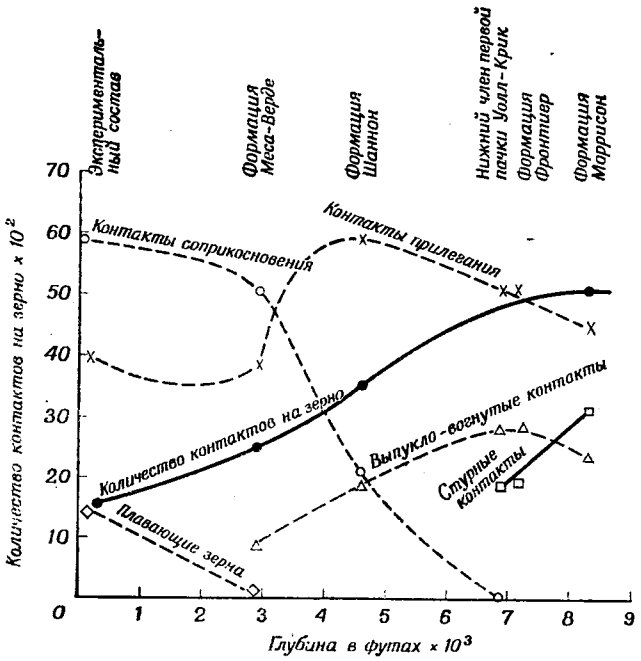
Методика измерений

Автор	Дата	Методика	Примечание	Единица опробования
Кайе	1938	Визуальное сравнение обнажений по облику со стандартами, изображенными на фотографиях	Оценка степени соприкасаемости или общего расположения	Объект изучения—обнажение (полевая методика)
Тэйлор	1950	а) Количество контактов на зерно б) Классификация контактов по форме	Изучение шлифов под микроскопом: сосчитать количество контактов на зерно; классифицировать контакты по форме на пять классов	Шлиф
Массон	1951	а) Количество контактов между зернами	Сосчитать контакты между зернами по какой-либо линии	Шлиф
Эмери	1953—1954	а) Количество контактов между кварцевыми зернами	Сосчитать контакты (только кварцевых зерен) и высчитать длину линии, пересекающей зерна (исправленную на размер и состав)	Шлиф
Кан	1954	а) Контакты между зернами: сближенность упаковки б) Плотность зерен по площади: плотность упаковки	Сосчитать контакты и измерить длину линии пересечения (исправленную на длину зерен)	Шлиф

методики измерений. Тэйлор [424] был первым исследователем, пытавшимся провести измерения в шлифах. Согласно его методике, источники изменчивости в характере упаковки определяются формой контактов и количеством контактов (соприкосновений). По типу контактов Тэйлор выделял пять классов: плавающие зерна (в плоскости данного шлифа зерна не соприкасаются одно с другим), контакты соприкосновения, прилегания, выпукло-вогнутые и структурные. Результаты измерений определялись сложными взаимодействиями основных свойств породы, так как попыток стандартизировать состав, размер и другие свойства зерен не предпринималось. Цель работы Тэйлора состояла в установлении зависимости между объемом норового пространства и глубиной залегания породы. Было изучено пять образцов с общим интервалом глубины около 5000 футов. Результаты работы представлены на фиг. 8.1, на которой совершенно четко выражена определенная закономерность. Однако однозначная интерпретация этой закономерности невозможна в силу того, что источники изменчивости обусловлены пятью свойствами и многочисленными смешанными эффектами, вызванными взаимодействиями этих свойств.

Другая попытка измерения упаковки зерен в шлифах из осадочных пород принадлежит Массону [288]. Согласно его методике, вся порода под-

разделяется на три текстурных компонента [288]: зерна, составляющие основную массу обломочного материала, зерна, заполняющие промежутки между основными зернами (матрица), и пустоты. Упаковка определяется количеством контактов между зернами на линии, пересекающей шлиф и имеющей определенную длину, причем учитываются только основные зерна. Таким образом, изменения в составе зерен несколько уменьшены тем, что измеряется лишь детрит, но не матрица и цемент. Массон предложил выделять в качестве основной переменной *вогнутые контакты* вместо входящих (выпуклых) и вогнутых контактов зерен. Массон рассматривал понятие «упаковка» под тремя аспектами: количество контактов между зернами, конфигурация этих контактов и плотность расположения разрезов зерен по площади шлифа. Он указывал также, что изменения в минеральном составе, размере и форме зерен влияют на характер упаковки. Сводя концепцию к операционной процедуре в качестве измеряемой переменной, он выбрал число контактов между зернами. Цель его исследований заключалась в определении меры плотности заполнения пространства зернами породы, которую можно было бы поставить в зависимость от других свойств песчаников, особенно от плотности, пористости и меры сложности поровых каналов [456].

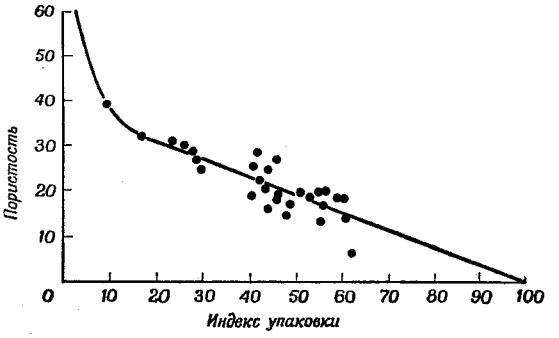


Ф и г. 8.1. Количество и тип контактов между зернами в песчаниках Вайоминга [424].

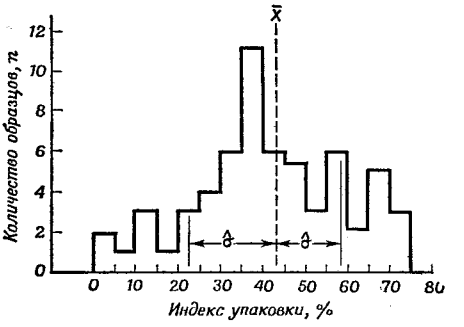
Массон [288] проанализировал 32 образца песчаников из нефтеносных горизонтов побережья Мексиканского залива и Среднего Запада, а также один образец искусственного песчаника. В каждом шлифе замеры он производил по четырем линиям (пересечениям). Количество сосчитанных зерен на линии «...менялось от 200 до 700 в зависимости от величины зерен». Количество контактов между зернами, полученное таким образом, пересчитывалось в проценты относительно общего количества возможных контактов. Наблюдаемые значения в песчаниках менялись от 18 в эоценовой формации Йегуа (побережье Мексиканского залива) до 62 в ордовикской формации Ойл-Крик (Оклахома). Для искусственного песчаника индекс упаковки равен 10. Теоретически индекс упаковки менялся от 0 в песчаниках, зерна которых не соприкасались одно с другим, до 100 в породах с абсолютно плотно прилегающими друг к другу зернами. Соотношения между индексом упаковки и пористостью на примере 33 проанализированных образцов показано на фиг. 8.2; видна, кроме того, определенная близость между наблюдаемыми характеристиками и теоретически предполагаемыми.

Используя методику Массона, Розенфельд определил показатель упаковки для 61 образца ортокварцитов формации Орискани. Сводная гистограмма частоты встречаемости приведена на фиг. 8.3. Среднее значение показателя

упаковки составляет 41,4% со стандартным отклонением, равным 17,7%. Следует обратить внимание на широкий размах колебаний показателей упаковки, меняющихся в формации Орискани от 3 до 75%. Аналогичную гистограмму можно, по-видимому, получить и для пород других формаций.



Ф и г. 8.2. Соотношение между пористостью и индексом упаковки, по Массону [ротапринт, «Измерение упаковки зерен в песчаниках», 1951].



Ф и г. 8.3. Гистограмма распределения числа контактов между зернами в 61 пробе кварцитов Орискани [363]. $\overline{X} = 41{,}4\%$; $\hat{\sigma} = 17{,}7\%$; $n = 61$.

Эмери [113], пытаясь найти отличия между «сухими» песчаниками Поконо и нефтеносными песчаниками Бериа, предложил следующую формулу определения показателя упаковки, в которой учитывается эффект влияния размера зерен:

$$PI\% = 100\,\frac{Q-\overline{X}}{LT}, \qquad (8.1)$$

где PI — показатель упаковки, Q — количество контактов между зернами кварца, $\overline{X}$ — среднее арифметическое значений длины зерен кварца *мм*, и LT — длина линии, пересекающей шлиф, *мм*. Индекс упаковки получается здесь путем сравнения ожидаемой упаковки зерен кварца, равной длине линии, по которой берутся замеры, деленной на средний размер зерен, с наблюдаемым количеством контактов между кварцевыми зернами. Показатель Эмери сходен с показателем Массона; в отличие от последнего в нем фигурируют лишь вогнутые контакты между зернами кварца и учитываются размеры зерен. Этот показатель может значительно меняться в зависимости от количества матрицы, цемента и пор. Эмери обнаружил, что песчаники формации Бериа и Поконо отличаются друг от друга как по среднему значению показателя упаковки, так и по размаху значений (табл. 8.3). Это

Таблица 8.3

Статистические характеристики распределения плотности упаковки в песчаниках формаций Поконо и Бериа [113]

Песчаники	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	n
Поконо	38,0	31,8	16
Бериа	56,4	16,9	16

свойство оказалось наиболее важным для того, чтобы можно было отличать «сухие» пески от нефтеносных [113 и 114]. Для пород, проанализированных Эмери, также наблюдается значительный размах величины показателя.

Упаковка зерен песчаников формации Берна в целом более плотная, чем формации Поконо, несмотря на то что в каждой из формаций состав песчаников весьма непостоянен, особенно это касается относительного количества матрицы. Формация Поконо значительно менее однородна по величине индексов упаковки и в среднем упаковка в породах этой формации менее плотная, чем в формации Берна.

Наиболее детальный и тщательный анализ понятия упаковки, как в концептуальном, так и в операционном отношении, выполнен Каном [224, 225, 299, стр. 228—244], который определил термин «упаковка» как «взаимное пространственное соотношение между зернами» [225, стр. 390].

Эту концепцию Кан рассматривал в двух аспектах: по агрегатным свойствам зерен и по свойствам зерен в пределах какого-либо объекта наблюдений. Первое свойство упаковки зерен он свел к операционной процедуре измерения плотности заполнения, или плотности упаковки, а второе — к процедуре измерения свойства, названного им «близостью заполнения». Свойство формы контактов зерен, или тип контактов, по терминологии Крынина, Кан не использовал. Это свойство имеет тот же смысл, что и классификация контактов по форме, предложенной Тэйлором.

Определения Кана свойств упаковки:

$$P_d = \left(m \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{t}\right) 100;$$

$$0 < \sum_{i=1}^{n} g_i < \frac{t}{m}, \tag{8.2}$$

где P_d — плотность заполнения, m — поправочный коэффициент для умножения, $\sum_{i=1}^{n} g_i$ — сумма длин всех сечений зерен по данной линии, t — общая длина линии, по которой производятся измерения;

$$P_p = \frac{q}{n} 100, \qquad 0 \leqslant q \leqslant n, \tag{8.3}$$

где P_p — близость заполнения, q — количество контактов между зернами, n — общее количество контактов, равное общему количеству зерен.

Измерения проводятся в шлифах по линиям, пересекающим шлиф. При этом, следуя рекомендациям Массона [288], считаются лишь дистальные ограничения зерен или вогнутые контакты. В методике Кана, как и в методике Эмери, предусмотрено также измерение размера зерен, который он называет «размером сечений» [113]. В соответствии с этой процедурой Кан проанализировал представительную серию обломочных осадочных пород, состоящую из трех образцов кварцитов, трех — аркозовых песчаников и трех — субграувакк. Результаты исследований приведены в табл. 8.4.

Анализируя результаты этих исследований, Кан показал, что все три измерения были взаимозависимы и что изменчивость между отдельными образцами и между формациями была значительно больше, чем изменчивость между разными линиями замеров. Но различия между разными типами пород одной формации были меньше, чем различия между породами одного типа, но принадлежащими к разным формациям. Следовательно, упаковка является в основном функцией условий образования осадочных пород и диагенеза, в то время как классификация типов пород Крынина, по которой разработана система опробования или выборок, основана на составе, или, другими словами, на характеристике области сноса. При такой классификации размах значений внутри того или иного типа пород будет больше, чем между типами пород.

Впоследствии Кан применил свою методику к анализу упаковки нефтеносных и «сухих» песков формации Солт-Уош и показал, что характер упаковки в этих двух совокупностях различен. В нефтеносных песках зерна местами образуют скопления, т. е. имеют тенденцию к более плотной упаковке, в то время как в «сухих» песках они распределены более равномерно. По плотности заполнения пространства P_d оба типа пород близки [225].

Таблица 8.4

Плотность заполнения пространства P_d, близость заполнения P_p и размеры сечений зерен для некоторых основных типов обломочных пород (J. Geol., 64, 583, 1956)

Формация	P_d	P_p	I_s
Тускарора	87,5	63,3	0,176
Орискани	60,9	27,9	0,097
Каше	55,7	36,9	0,089
Среднее для кварцитов	68,0	42,7	0,121
Поконо	72,6	39,9	0,139
Освего	82,5	57,0	0,161
Брадфорд	70,8	33,6	0,062
Среднее для субграувакк	75,3	43,5	0,120
Портленд	76,6	46,9	0,165
Рослин	90,5	73,5	0,178
Стоктон	78,5	58,5	0,128
Среднее для аркозовых песчаников	81,9	59,6	0,157

В своих дальнейших работах Кан [226, стр. 383] показал, что упаковка, измеряемая по разработанной им методике, является анизотропным свойством, связанным каким-то образом с региональной деформацией. Он предложил гипотезу, согласно которой «...присутствие или отсутствие трещин в осадочных породах обусловлено только анизотропией структурных параметров. Эффект воздействия стресса на горные породы определяется этими структурными параметрами» [226, стр. 385]. Это важное обобщение может служить основой для анализа многих интересных особенностей пород, связанных с их трещиноватостью как локальной, так и региональной.

Изменчивость характера упаковки зерен изучал также Штейнмец (см. в работе [164, табл. 1, стр. 51—61]).

8.3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ПРОЦЕДУРА

Очевидно, что упаковка, как с теоретических позиций, так и практических — замеренных ее колебаний, относится к числу важных свойств агрегата. Ясно также, что при изучении упаковки необходимо измерять эффект влияния состава, размера зерен, формы и, вероятно, их ориентировки. Поэтому должны быть изучены такие агрегаты, которые обладают аналогичной характеристикой в отношении состава, размера и формы зерен. В качестве изучаемых компонентов лучше всего пользоваться кварцевыми зернами, обломками кварцитов и кремней. На этих зернах можно сосчитать число контактов зерен друг с другом с целью получить оценку свойства, названного Каном «близостью заполнения» [1]. В анализ также можно включить изучение конфигурации контактов, следуя рекомендациям Тэйлора. При

[1] Эквивалент «индекса упаковки», по Массону

этом надо учитывать лишь указанные выше зерна, т. е. кварцевые обломки кварцитов и кремней. Подсчитывая относительное количество контактов с разными конфигурациями, можно определить соответствующий элемент индекса упаковки. Если число изучаемых компонентов ограничено согласно перечисленным, то для классификации контактов по форме можно пользоваться табл. 8.5. Процедура состоит в подсчете контактов разного характера.

Таблица 8.5

Классификация контактов по форме

Тип контактов	Символ	Графическое изображение	I класса
Плавающие зерна	*F*		0
Контакты соприкосновения	*T*		1
Контакты прилегания	*L*		2
Вытукло-вогнутые контакты (плотно прилегающие друг к другу зерна)	*C*		3
Сутурные контакты	*S*		4

Этот же анализ можно выполнить более точно — измерив протяженность контактов, определить также их конфигурацию. Представляется вполне вероятным, что в качестве первого приближения подсчет по классам будет вполне достаточным, так как в большинстве случаев измеряемые свойства взаимозависимы и изменения в измеренных значениях размера, формы, ориентировки и упаковки зерен в значительной степени являются общими. Если имеются достаточные данные, эту взаимозависимость можно уменьшить и оценить количество искомой информации в изменениях с помощью многомерного анализа. Такую процедуру можно использовать для определения того минимального количества измерений, которое позволяет узнать максимальную изменчивость. В настоящее время, когда разработаны адекватные процедуры для измерения каждого из свойств, это возможный и необходимый шаг в анализе петрографической изменчивости и последующего обоснования петрологических выводов [177, 181].

Изучать характер контактов зерен, показанных в табл. 8.5, рекомендуем также и при измерении степени консолидации различных осадочных пород — от современных рыхлых песков, где $F = 0$, а $T = 1$, до метакварцитов, где эти значения составляют 100% и $S = 5$ соответственно.

Интересно заметить, что теоретически контакты между зернами могут быть независимы от количества матрицы и цемента, но практически целесообразно приспособить измерение упаковки к характеру матрицы и цемента. Лишь в этом случае можно сравнивать разные породы с помощью меры упаковки.

Процедура измерений упаковки состоит в подсчете частоты встречаемости в разных классах контактов между зернами и пяти различных типов конфигураций контактов. В первом случае можно ожидать биномиального распределения, если подсчет превышает, например, 5%, и случайность опробования можно проверить на биномиальной модели [1]. При подсчете конфигураций в любом одном классе распределение будет приближаться к биномиальному; но если использовать все шесть классов, это потребует полиномиальной модели распределения (гл. 14). В этом отношении измерение упаковки очень напоминает оценку состава породы (гл. 9).

---

[1] По мере роста числа замеров биномиальное распределение будет стремиться к нормальному. Если число замеров меньше 5 или больше 95%, ожидаемой моделью будет распределение Пуассона.

щью строгих критериев и тем самым определять качество выполненного анализа. В большинстве случаев анализ состава породы требует некоторого компромисса между точным определением всех и каждого компонента в образце, с одной стороны, и количественной оценкой соотношений между этими компонентами — с другой. По-видимому, это справедливо для всех существующих аналитических методов, которые требуют тщательно составленной программы экспериментов с достаточным акцентированием на каждом этапе работы. При соблюдении этого условия конечные результаты исследований будут содержать максимум информации и обладать удовлетворительной степенью точности. К счастью, количественные характеристики позволяют обычно применять гораздо более точные проверочные критерии, чем качественные наблюдения. Пользуясь критериями адекватности, полученную информацию можно оценить путем сравнения ее с некоторой моделью.

Цель количественного изучения состава заключается в оценке изменчивости соотношений различных компонентов, входящих в состав горной породы; отсюда становится очевидным, что эта цель требует рассмотрения методов отбора проб, так как анализируется только часть породы.

Степень полноты анализа какой-то пробы, например образца или шлифа, должна быть сбалансирована с числом таких проб. Выбор между полным анализом нескольких шлифов и менее полным анализом большого количества шлифов будет зависеть от степени изменчивости как в пределах отдельных шлифов, так и между шлифами. Чем более значительны источники изменчивости, тем большее количество проб нужно анализировать. Именно на этом основании выбирается и тип анализа.

Излагая нижеследующий материал, мы надеемся, что исследователь достаточно хорошо знаком с методикой минералогического анализа и что в его распоряжении имеется справочная литература (например, [195, 275, 300, 304, 455]), включающая характеристику свойств минералов, которые могут быть использованы для диагностики различных компонентов в минеральных агрегатах.

9.2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА

Развитие количественных методов оценки минерального состава вкратце рассматривал Левинсон-Лессинг [281, стр. 30] и Чейс [63], а несколько более подробно — Холмс [199, стр. 312 и далее]. Делесс [93] первый предложил вычислять площади, занятые различными минералами в шлифах, но эта методика оказалась слишком трудоемкой для повседневного использования. Делесс наметил также линейную методику [199], ныне называемую микрометрическим методом, или методом Розиваля [367], детально им разработанным. С помощью специального устройства для измерений микрометрический метод был впоследствии усовершенствован и утомительная процедура измерений облегчена [100, 205, 206, 389, 447].

Глаголев [142, 143] предложил использовать метод подсчета точек. Этот метод, несомненно, наиболее эффективен из используемых в настоящее время. Для упрощения этой процедуры были сконструированы специальные столики [1], причем некоторые из них — с ручным управлением, другие же — с автоматическим.

Цель всех этих приемов и состоит в оценке объема компонентов в образцах горных пород, хотя в основе их лежит геометрическая (плоскостная) модель. Возникающие в связи с этим расхождением проблемы рассматривал Чейс [63, гл. 1 и 2], который показал, что использование линейных замеров,

[1] К ним относится также и нуш-интегратор, сконструированный Глаголевым.— *Прим. перев.*

ГЛАВА 9

Изучение минерального состава — количественно-минералогический анализ

Со временем качественные методы будут заменены количественными.

F. Y. Loewinson-Lessing, A Historical Survey of Petrology, Oliver and Boyd, Ltd., p. 32, 1954

9.1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдения, при которых определяется количественная оценка, имеют большой диапазон — от прямых замеров, таких, как измерение длины в гранулометрическом анализе, до подсчета частоты появления различных объектов или событий, например контактов между зернами при измерениях упаковки (гл. 8). Измерение минерального состава относится к числу анализов второго типа; оно заключается в оценке относительной частоты встречаемости различных минеральных компонентов.

Минералогический анализ начинали с чисто качественной характеристики, но вскоре в него стали включать примерную оценку содержания отдельных элементов, выражаемую терминами «редкий», «обычный» или «обильный». Однако потребовалось много времени для того, чтобы эти описательные термины превратились в более точную количественную оценку. Для петрологических выводов требуется гораздо больше данных, чем та информация, которая содержится в качественном петрографическом описании. В самом деле, не будет преувеличением, если мы скажем, что только наиболее четко выраженные крупномасштабные различия могут быть выявлены с помощью качественного анализа. Определение компонентов и их классификация по минеральным группам — первый шаг в исследовании [1], но совершенно очевидно, что описание образца породы не ограничивается определением составляющих компонентов.

Обычно считается, что, поскольку исследование начинается с определения минерального состава, любая ошибка в определении минералов должна привести к неправильной количественной оценке состава. Такая точка зрения основана на очень узком понимании термина «ошибка». Совершенно невозможно определить все компоненты в батолите; более того, редко достигается исчерпывающее определение составляющих даже в отдельных шлифах. Основная цель определения компонентов состоит в том, чтобы добиться сходимости результатов. Эта предпосылка может быть сведена к четкой операционной процедуре, правильность которой можно проверять с помо-

[1] Однако это не всегда так. Например, при ситовом анализе получают весьма существенные петрографические данные, но минеральный состав при этом не различается.

лиз можно выполнить лишь для очень малой пробы. Колебания же между пробами могут быть большими, в силу чего с помощью точного определения всех составляющих в единственной небольшой пробе нельзя оценить относительное количество классов в образце. Еще менее пригодно такое определение для оценки объема горной породы, соответствующего этим классам. Следовательно, полученная в конечном счете оценка всегда является функцией методики, использованной для ее получения. Было показано [121], что метод подсчета точек дает вполне удовлетворительные результаты, хорошо согласующиеся с данными, получающимися с помощью других аналитических методов [122]. Использование этого подхода для оценки соотношений классов в породе представляется вполне оправданным.

Так как основное требование заключается в выборе серии взаимно исключающих и исчерпывающих классов, необходимо определить классы на основе этого требования. Однако достижение этой цели сопряжено с преодолением трудностей. Определение минералов в классическом понимании — это умственная и физическая способность, развитая длительной и упорной тренировкой немногими посвятившими себя этой науке специалистами. Очень трудно, если это вообще возможно, свести эту способность к какой-то обычной практической процедуре. Тем не менее если задача исследований состоит в оценке пропорций классов, то именно к разработке такой процедуры надо стремиться. Почти во всех породах одними из главных компонентов являются кварц и полевой шпат. Это было установлено очень давно, но только сравнительно недавно стали различать огромное количество разновидностей этих двух минералов. Очевидно, что, если при аналитических исследованиях пользоваться лишь одним методом, это приведет к более простой и менее конкретной классификации. Гораздо большего можно было бы добиться, применяя, скажем, рентгеноскопическую и химическую диагностику минералов. Но, добившись полной идентификации всех минералов в пробе, мы, вероятно, не получим еще всей информации, необходимой для разрешения петрологических проблем. В конце концов мы придем к необходимости оценки пропорций минеральных компонентов.

Помимо кварца и полевого шпата, имеются минералы, диагностируемые с гораздо большим трудом, и окончательно принятый перечень классов должен включать все эти минералы. Осадочные породы сложены преимущественно зернами кварца, полевого шпата, обломками ранее существовавших пород, заполняющим веществом (матрицей), цементом; примерная количественная оценка этих компонентов дана в табл. 9.1. Можно упростить процедуру расчета, определив и приняв несколько более широких классов, таких, как «зерна», «матрица», «цемент» для осадочных пород [270] или «кристаллы» и «стекло» для интрузивных пород. Затем каждый класс можно разделить путем ввода подклассов; такая процедура необходима, если требуется рассчитать количественные соотношения компонентов породы.

В качестве первого шага все компоненты осадочных пород могут быть охвачены четырехчленной классификацией, отвечающей основным требованиям — взанмоисключаемости и исчерпываемости. Критерием, образующим основу этой классификации, является морфология, или габитус, компонентов в шлифах, что по существу определяется природой внутренних и внешних ограничивающих поверхностей. Если ограничивающая поверхность, выраженная обычно в шлифах кривой линией, непрерывна и по существу везде выпукла, а участок, окруженный этой границей, гомогенный, то вещество гомогенно, а его внешние контуры непрерывны (фиг. 9.1). Следовательно, есть два морфологических критерия: первый — зерна могут быть гомогенными илп гетерогенными; второй — границы зерен могут быть непрерывными или прерывистыми. Эти два критерия можно объединить и диагностировать четыре взаимно исключающих и исчерпывающих класса (фиг. 9.1).

длины сечения или подсчета серии точек для оценки площадей компонентов в шлифах приводит к несмещенной оценке соответствующих параметров и что оценка площади является при определенных условиях и несмещенной оценкой объема компонентов горной породы. Однако можно показать, что требования геометрических оценок не всегда выполняются в существующих аналитических методах [174, 457] и что теоретическое обоснование оценок, данное Чейсом, на практике не обязательно должно приводить к несмещенной оценке.

Если вернуться к основному уравнению, можно заметить, что в результате любого анализа шлифа горной породы получается статистическая оценка p_i параметра P, а P — функция по крайней мере пяти взаимодействующих аргументов (свойств), т. е.

$$P = f(m,\ s,\ sh,\ o,\ p). \tag{9.1}$$

Таким образом, на определение p_i, полученное методом подсчета точек, влияет изменение относительных соотношений компонентов, а также размер, форма, ориентировка и упаковка этих компонентов. Под различными аспектами источники изменчивости рассматривал Чейс [63, гл. 8 и 9], предложивший поправочный коэффициент (число коррекции 1С) для учета влияющих факторов. Число 1С есть функция по меньшей мере размера и упаковки зерен, но не константа. Следовательно, при измерении минерального состава, так же как и других свойств, единственный путь состоит в одновременной оценке всех влияющих факторов с помощью удовлетворительного статистического анализа [174, 175] [1].

9.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТОВ

Для определения объема компонентов в агрегатах методом подсчета точек требуется, во-первых, введение серии классов, число которых приблизительно равно числу минеральных видов и, во-вторых, подсчет точек и распределение их по соответствующим классам. Введение классов равноценно определению групп для табличного изображения данных, разработанного Чейсом [63, гл. 6]. При этом основное требование состоит в выборе взаимно исключающих и исчерпывающих классов, чтобы все точки можно было разместить и приписывать тем или иным классам с достаточной определенностью. Эти логические требования имеют еще и то преимущество перед точной идентификацией минеральных видов, что в процессе подсчета точек в большинстве случаев нет необходимости учитывать все критерии, которыми обычно пользуются для определения минералов. Серия намеченных классов представляет собой компромисс между набором минералов, которые мы хотели бы определить, и теми минералами, достаточно точное определение которых возможно на основе довольно простой оптической характеристики, используемой в методе подсчета точек.

В идеальном случае можно определить как все минеральные компоненты, так и каждый из них, но, чтобы достигнуть этого, надо провести сложные и многочисленные процедуры, такие, как дробление породы и разделение дезинтегрированного материала на взаимно исключающие классы. Однако практически это не достигается ни в одной из существующих методик, хотя довольно хорошее приближение можно получить при дроблении породы, просеивании и использовании магнитной сепарации и разделения в тяжелых жидкостях. После сепарации каждый взаимно исключающий класс должен быть определен рядом соответствующих критериев, которые могут включать дальнейшие физические и химические способы диагностики, а также оптический и рентгеновский анализы. Столь исчерпывающий ана-

[1] См. также описание микроструктуры в гл. 7.

Таблица 9.1

Приблизительные количественные соотношения минерального состава осадочных пород

Тип пород	Кварциты, %	Субграувакки, %	Граувакки, %	Аркозы, %
Породообразующие компоненты				
Обломки пород	10	20—30	25—30	25—35
Кварциты	} 100	} 95	10	Очень редки
Кремни				Очень редки
Глинистые сланцы — филлиты				Очень редки
Кристаллические сланцы		Редки	} 90	Обычны
Вулканические породы		Очень редки		Редки
Гнейсы			Редки	} 95
Граниты				
Полевые шпаты	< 5	< 5	5—30	5—50
Калиевый полевой шпат	100	} 100	Очень редок	90
Альбит — олигоклаз	Очень редок		} 100 преобладает	10±
Олигоклаз — лабрадорит				Очень редок
Кварц	70+	30—70	30—70	30—70
Разновидности	Смешанный	В среднем 50 метаморфогенный	В среднем 40 метаморфогенный и вулканогенный	В среднем 40 плутоногенный
Минералы, встречающиеся в различных количествах				
Слюды	Редки — отсутствуют	Обычно 10+	Обычно 20+	Обычно < 10
Мусковит	100	0—50	0—50	0—100
Хлорит		0—50+	0—50+	Редок
Биотит		0—50	0—50	0—100
Глауконит	Обычен — редок	Обычен	Редок — обычен	Редок
Акцессорные минералы				
Акцессорные минералы	< 1	1—5	1—15	1—15+
Циркон, рутил, турмалин	100	10—50+	10—20	10—50
Гранат и апатит	Очень редок	0—50	0—30	0—20
Ставролит и хлоритоид		0—10	0—20	0—10
Эпидот и клиноцоизит		0—10	0—20	0—5
Кианит и силлиманит		0,5	0—15	0—15
Амфибол		0—10	0—70	0—20
Пироксен		0—5	0—80	0—15
Матрица				
Матрица	Отсутствует — редка	Обильны	Обильны	Обилен
Слюды		Встречаются	Встречаются	Редок
Хлорит		Встречаются	Встречаются	Редок
Биотит		Встречаются	Встречаются	Редок

Продолжение табл. 9.1

Тип пород	Кварциты, %	Субграувакки, %	Граувакки, %	Аркозы, %
Матрица				
Глины		Обычны	Обычны	Обычны
Каолинит	Редок	Редок —50		50+
Иллит		50+	Редок	Редок
Монтмориллонит		Редок	Редок	Обычен
Вторичные и аутигенные минералы				
Цемент	Обилен	Обычен	Редок—обычен	Редок
Кремнистый	50+	0—20	0—10+	Редок
Карбонатный	50+	0—20	0—10	0—10
Титансодержащая группа				
Анатаз	Обычен	Обычен	?	Редок
Брукит	Обычен	Редок	?	?

В граувакках, подвергшихся метаморфизму, глинистые минералы обычно отсутствуют.

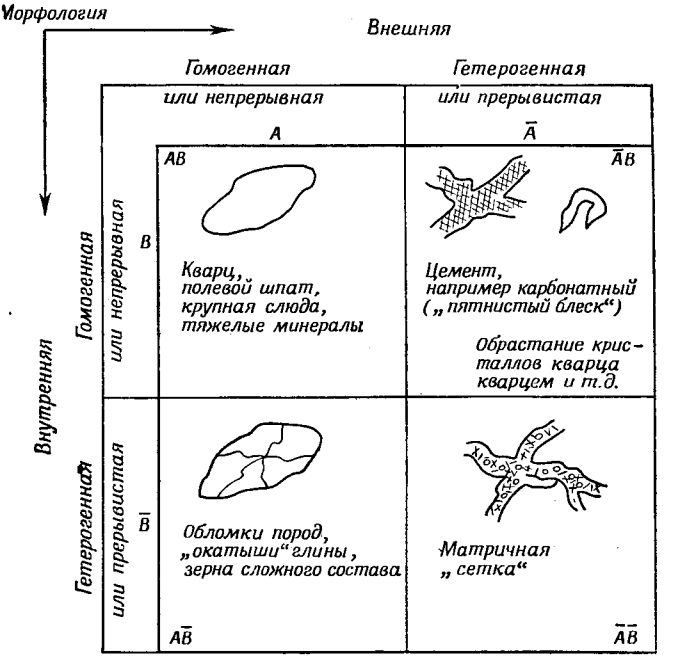
Примечание. В данной таблице смешано два свойства частоты встречаемости, а именно количественное и качественное ее выражение. Например, какой-либо минерал может встречаться во всех субграувакках в количестве 0,1 и является, таким образом, характерным, но редким. Таблица отражает личные представления автора; по мере роста наших знаний о минеральном составе осадочных пород она будет подвергаться изменениям.

Так, один компонент породы может быть гомогенным веществом, как, например, зерно кварца; другой — состоять из нескольких минералов, как, например, обломок ранее существовавшей породы. Матрица породы — это сложный компонент как по внутреннему строению, так и по внешним очертаниям, тогда как карбонатный цемент может быть внутренне гомогенным (единый кристалл), но иметь сложные внешние очертания (пятнисто-гаснущие кристаллы) [300]. Таким образом, в качестве основы для выделения классов можно исходить из классификации, представленной на фиг. 9.1.

Переводя на язык формальной логики, можно выделять четыре класса, причем первый обладает свойствами A и B, второй — «не A ($\overline{A}$)" и B, третий — A и «не B» ($\overline{B}$) и четвертый —«не A» ($\overline{A}$) и «не B» ($\overline{B}$).

Зерна отдельных минералов, таких, как кварц, полевой шпат, крупные чешуйки слюды и акцессорные минералы, характеризуются внутренней и внешней непрерывностью; обломки ранее существовавших пород состоят из внешне непрерывных элементов, но они внутренне прерывисты, причем обычно, но не всегда в них содержатся кристаллы или зерна, минеральный состав которых неоднородный: обломки гранита, кристаллических сланцев, метаморфических сланцев и т. д. Во многих породах эти непрерывные компоненты включены в весьма тонкозернистую основную массу, называемую матрицей, и так как эта матрица внешне и внутренне прерывиста, она, таким образом, попадает в класс $\overline{AB}$. Под воздействием некоторых процессов сложение основной массы после седиментации оказывается нарушенным. Оно претерпевает морфологические изменения, вещество матрицы остается при этом внутренне прерывистым, а ограничивающая его поверхность становится внешне непрерывной. Подобные породы нужно выделять в класс $A\overline{B}$. К ним относятся, например, оползневые отложения. Такую измененную матрицу бывает трудно отличить от обломков глинистых пород и сланцев и она обычно попадает в один класс с этими последними.

Другим важным элементом в строении осадочных пород является цемент, отличающийся большим разнообразием. Например, кремневый цемент может обрастать зерна кварца. Очень редко он распространяется по всей породе, как это характерно для матрицы; в таком случае его можно отнести к классу $\overline{AB}$; обычно цемент образует наросты вокруг отдельных зерен кварца и в этом случае его можно рассматривать внутренне гомогенным, т. е. индивидуальным по внутреннему строению, но обладающим прерывистой формой. Следовательно, он попадает в класс $A\overline{B}$. Любые сочетания минералов



Фиг. 9.1. Классификация элементов для «измерений» состава.
Эта классификация не зависит от генезиса, но может быть использована так, чтобы какой-либо генетический процесс подразумевался.

тина обрастания, например сростки полевого шпата или турмалина, классифицируются подобным же образом при внешней прерывистости, диагноз основан на перерыве между исходным зерном и зерном, обрастающим его. Если же этого перерыва нет, диагноз такому «цементу» поставить невозможно (например, кремнистому цементу в некоторых образцах кварцитов формации Орискани) [457].

Карбонатный цемент имеет совершенно отличный характер; он обычно образует мелкие вкрапленники, заполняя пустоты между элементами классов AB и $A\overline{B}$, т. е. кварцем, полевым шпатом и обломками пород. В таких случаях его можно рассматривать как внешне непрерывный и внутренне прерывистый (поликристаллический) и отнести к классу $A\overline{B}$. Обломки известняков и ископаемых органических остатков характеризуются теми же особенностями, а пойкилитовый карбонатный цемент является внутренне непрерывным и внешне прерывистым (класс $\overline{AB}$). Весьма часто этот цемент бывает прерывистым как внутренне, так и внешне, как, например, в некоторых образцах песчаников формации Кау-Ран [167, 174, фиг. 4,*b*].

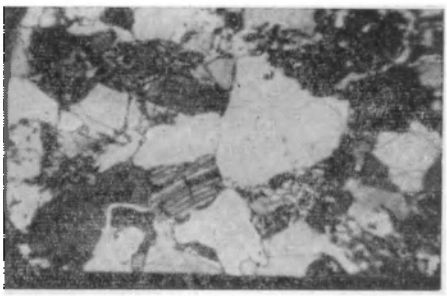
Преимущество предлагаемой классификации заключается в том, что она объединяет те элементы, которые по форме «кажутся одинаковыми» и разделяют элементы, отличающиеся по форме один от другого. Несмотря на то

что при пользовании этой классификацией нет необходимости знать природу изучаемого материала, все же элементы различной формы, но одного и того же химического состава следует различать и обычно интерпретировать как признак различного генезиса. Например, в разные классы здесь попадают кварц и кремнистый цемент или кластический и цементирующий карбонат.

Теперь эти классы можно подразделить дальше, пользуясь подходящими операционными критериями, которые позволяют установить действительно взаимно исключающие классы. В настоящее время нет общей классификации, но несомненно, что по мере накопления данных о минеральном составе осадочных пород такая общая классификация, которая бы стала общепринятой, будет разрабатываться [1]. Для сравнения различных пород общепринятая классификация становится необходимостью. Чтобы это сравнение имело смысл, для определения классов и подклассов элементов должны быть одни и те же критерии. Для принятой в конечном счете классификации потребуются классы элементов, к описанию которых и переходим.

9.3.1. Элементы класса AB, внешне (A) и внутренне (B) непрерывные

Кварц. К классу кварца относятся элементы [2] бесцветные, обладающие относительно низким рельефом (относительно канадского бальзама), обычно прозрачные, но часто с пылевидными включениями правильной и неправильной форм, характеризующиеся непрерывными и в большинстве случаев отчетливыми контурами (фиг. 9.2). В скрещенных николях элементы этого



Фиг. 9.2. Микрофотография эоценовых аркозных песчаников (штат Вашингтон).
Видны зерна кварца, полевого шпата и обломки пород. Николи скрещены; × 100. Каталог Пенсильванского университета № 9025 (из коллекции С. Т. Бресслера).

класса имеют низкую поляризационную окраску первого порядка. В шлифах осадочных пород зерна кварца обычно обладают эллипсоидальной формой, но последняя может быть от округлой (редко) до треугольной и почти столбчатой. Зерна такой разнообразной формы встречаются не столь часто, в среднем же она меняется мало (гл. 6).

В этот класс входят также некоторые полевые шпаты, в частности ортоклаз и несдвойникованный плагиоклаз. Чтобы различить эти минералы, можно окрасить шлиф кобальто-нитритом натрия [60]. Во многих осадочных породах весь полевой шпат составляет менее 5% породы, и очень редко возникает необходимость выделять его разновидности, поскольку последние примерно одни и те же, и соотношения между ними, насколько это известно в настоящее время, более или менее постоянны. Если необходимо получить надежное определение разновидностей полевых шпатов и их отно-

[1] Принятая для этой цели методика могла бы с успехом следовать практике диагностики, которой придерживаются медики [278]; диагноз болезни весьма напоминает идентификацию минерального состава методом подсчета точек в шлифах.

[2] При подсчете точек элементы сами являются точками на сетке опробования и каждая точка должна быть отнесена к какому-либо классу (или подклассу) и только к этому одному классу.

сительных количеств, вероятно, нужно применить другую методику, например рентгеновский анализ.

К другому источнику неопределенности относится пятнистое погасание элементов этого класса. В зернах кварца различного происхождения часто наблюдается слабо выраженное волнистое погасание, а также двойникование, что обычно объясняется воздействием стресса при метаморфизме. В некоторых случаях волнистый характер погасания становится настолько отчетливым, что элемент уже нельзя рассматривать как внутренне гомогенный и тогда его следует отнести к классу $\bar{A}B$. Перед подсчетом точек необходимо решить, по каким критериям такой элемент должен быть исключен из класса AB и переведен в класс $\bar{A}B$, и затем придерживаться этих критериев в продолжение всего эксперимента. Неопределенность возникает, если критерии

Фиг. 9.3. Микрофотография шлифа девонских субграувакковых песчаников формации Чипманк.

Видны зерна кварца, обломки пород афанитового сложения, кристаллы слюды и кремнистый цемент. Николи скрещены; × 200. Каталог Пенсильванского университета № 7816 (из коллекции Ф. Л. Стениониса).

будут обоснованными скорее концептуально, чем операционно. В этом заключается наиболее серьезная ошибка диагностики, которая оказывает влияние на оценку количественного соотношения компонентов.

Полевой шпат. Элементы, имеющие сходство с описанными в предыдущем классе, но для которых характерны в скрещенных николях пластинчатые или решетчатые двойники, должны быть отнесены к полевому шпату (фиг. 9.2). Они имеют обычно более прямоугольные очертания по сравнению с кварцем, но этот критерий нельзя считать устойчивым. С другой стороны, полевые шпаты часто бывают насыщены пылевидными частицами продуктов распада, но и этот критерий также может привести к ошибкам ввиду его изменчивости. Окрашивание частично помогает преодолеть эту трудность.

На первый взгляд кажется просто подразделить этот подкласс по различным типам двойникования, но в том то и дело, что плагиоклаз, сдвойникованный по периклиновому закону, часто очень похож на решетчатый микроклин; кроме этого, не все зерна микроклина имеют решетчатые двойники и не все разрезы сдвойникованиого микроклина обладают решетчатым рисунком. Весьма разнообразны также пертитовые вростки, так что для предварительного подсчета целесообразно использовать группу полевых шпатов в целом, а затем при отдельных подсчетах учитывать подклассы, чтобы попытаться определить соотношение различных типов полевых шпатов.

Слюды. В шлифах цвет этого минерала обычно меняется от прозрачного бесцветного с переходом различных оттенков бурого до красно-бурого и с различными оттенками зеленого до голубовато-зеленого. Габитус также весьма непостоянен: от вытянутых прямоугольных зерен (что встречается наиболее часто; фиг. 9.3) до крупных округлых участков или даже до полигональных очертаний (редко). Относительный рельеф более резкий по сравнению с двумя предыдущими классами, а бесцветные или светло-окрашенные разновидности характеризуются яркими (второго или третьего порядка) цветами поляризации. Погасание в зернах прямоугольной формы обычно прямое, но зерна часто бывают скрученными и изогнутыми. Опять-таки возникает

желание пойти по более легкому пути, что в некоторых случаях осуществимо — подразделить данный подкласс по цвету. При таком делении нельзя ожидать, что «цветовые» группы обязательно совпадут с разновидностями слюд — мусковитом, биотитом, хлоритом без применения более точных критериев, которые в основном и должны учитываться при подсчете точек.

Другие элементы, входящие в класс AB. В отдельных случаях могут встретиться и другие элементы — внутренне однородные и внешне непрерывные, например акцессорные минералы, такие, как циркон, апатит, гранат и рудные минералы (которые в этом отношении особенно характерны), но в целом все эти минералы редко встречаются в осадочных породах и в процессе подсчета точек их наиболее удобно относить к «другим в классе *AB*». Эта группа редко составляет больше 2%. Если же содержание превышает 2%, имеет смысл выделить в подклассы наиболее часто встречающиеся акцессорные минералы.

9.3.2. Элементы класса $A\overline{B}$, внешне непрерывные (A), внутренне прерывистые ($\overline{B}$)

Основная масса компонентов, входящих в этот класс, представляет собой обломки ранее существовавших пород; поскольку состав этих обломков очень важен при интерпретации генезиса содержащих их осадочных пород, их почти всегда надо подразделять. Обломки гранитов, кристаллических сланцев, филлитов, шиферных сланцев, глинистых сланцев, глин, кварцитов, песчаников, кремнистых сланцев, эффузивных пород, известняков

Фиг. 9.4. Обломки гранитов в аркозовых песчаниках.

А — зерно сложного состава, несомненно принадлежавшее граниту; *Б* — зерно сложного состава, происхождение которого неясно; *В* — зерна простого состава.

и доломитов очень часто встречаются во многих типах осадочных пород. При выборе подклассов нужно использовать лишь строгие операционные критерии. Придерживаться последовательно этой классификации при подсчете точек чрезвычайно трудно. В качестве общей рекомендации можно принять следующую: для предварительного подсчета точек надо использовать простую классификацию, что практически оправдывается; затем, если это необходимо, можно повторно изучить шлифы и подсчитать разновидности зерен, входящие в данный класс, способом, специально принятым для обломков пород [164]. Подразделение на фанериты и афаниты вполне пригодно для первоначального разделения. Выделение «пластовых» (или полосчатых) и «непластовых» разновидностей может быть также использовано в качестве самостоятельного или в сочетании с фанеритами и афанитами.

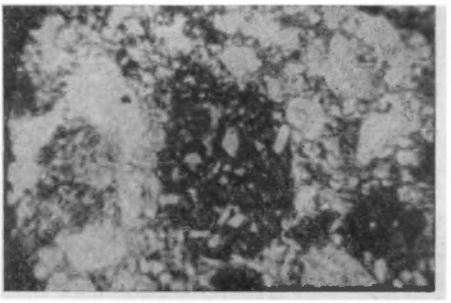
Обломки различных типов гранитов (фиг. 9.4) встречаются как в аркозах, так и в граувакках [1]. Когда эти обломки состоят из кварца и полевого шпата, их, конечно, легко диагностировать. Однако в некоторых случаях в осадочных породах обломки пород, состоящие из одного кварца, нельзя с полной уверенностью отнести к ранее существовавшим гранитам. В настоящее время нет операционно исчерпывающего критерия для отличия этих «обломков» от других, имевших иные источники сноса. Эта неопределенность особенно нежелательна, когда изучаются те породы, в которых обломки явных гранитов встречаются редко. Вероятно, следует подчеркнуть, что,

[1] Названия пород даются по Крынину [270].

когда мы относим какой-нибудь элемент (точку) к «кварцитам», мы всегда должны быть готовы к такой неопределенности.

Кроме того, исследователь находится в затруднении еще и в тех случаях, когда обломки гранитов в шлифах осадочных пород имеют те же размеры зерен (и приблизительно ту же форму), что и зерна кварца (класса AB). Это особенно ярко проявляется, когда используется термин «гнейс», поскольку обломок «гнейса» в обычном песчанике значительно отличается от породы, называемой гнейсом в поле. Таким образом, разделение обломков гранитного состава на массивные и полосчатые способствовало бы более правильному ходу анализа. При таких условиях термин «кристаллические сланцы» был бы вполне подходящим для гранитов с полосчатой структурой.

Часто в процессе подсчета точек неопределенность возрастает в связи со сходством (фиг. 9.4) обломков гранита (класс AB) с обломками кварца



Фиг. 9.5. Микрофотография шлифа ордовикских субграувакковых песчаников (Уэльс).
Видны обломки эффузивных пород с вкрапленниками кварца и полевого шпата. Николи скрещены; × 100. Каталог Пенсильванского университета № 9707 (из Уэльского музея).

и полевого шпата (класс AB). Только при строгом соблюдении критериев, отличающих класс AB от класса $A\overline{B}$, можно избежать ошибки.

К тонкозернистым породам с тонкополосчатой структурой рекомендуем относить филлиты, шиферные и глинистые сланцы, а к тонкозернистым массивным породам — обломки глин и кремней.

Кварциты относятся к породам, почти нацело сложенным кристаллами кварца и входящим в класс $A\overline{B}$. По мере уменьшения размера кристалликов, слагающих обломки, до субмикроскопических между кварцитами и роговиками возникает постепенный переход. Для преодоления этой новой неопределенности вновь нужно установить какой-то критерий, как, например, размер кристалла.

Обломки эффузивных пород имеют в основном афанитовую структуру, которая меняется от микрокристаллической через криптокристаллическую до стекловатой. Если в них есть вкрапленники (фиг. 9.5), эти породы сравнительно просто идентифицировать. Когда вкрапленников нет, можно использовать микроструктуру, а если нельзя воспользоваться ни тем, ни другим, эти обломки обычно классифицируют как кремни [164].

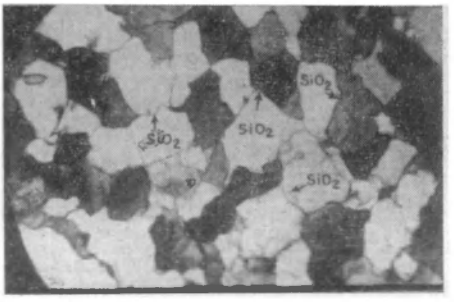
В некоторых осадочных породах встречаются обломки известняков и доломитов, нередки также обломки ископаемых организмов [167]. Эти обломки можно принять один за другой, если не следовать точно критериям, намеченным для проведения общей четырехчленной классификации. Если зерна не имеют специфического габитуса, это может привести к ошибкам в подсчетах.

9.3.3. Элементы класса $\overline{A}B$, внешне прерывистые ($\overline{A}$), внутренне непрерывные (B)

В этот класс входят цементирующие элементы осадочных пород, и обычно опытный петрограф может определить данный класс довольно легко. Но термин «цемент» часто употребляют ошибочно, когда «критерий», исполь-

зуемый для опознания, основан больше на генетических предпосылках, чем на наблюдаемых морфологических различиях. Например, кремнистый цемент весьма заметно отличается по своей морфологии от карбонатного, но если при классификации мы их объединим, эта операция станет источником ошибок при последующем петрологическом истолковании.

Под кремнистым цементом понимают чисто кварцевый оптически однородный (или почтп однородный) материал, соприкасающийся с зернами кварца (фиг. 9.6). Чтобы отличить кремнистый материал цемента от обломочного кварца, необходимо найти четкую границу между зернами кварца и цементом. В классическом случае песчаников Пенрнта [184, стр. 211; 187, стр. 105] пленки окислов железа позволяют совершенно отчетливо определить эту границу. Почти всегда в зернах есть каемки пылевидных включений, что дает возможность отличить зерно от цемента. Однако в некоторых случаях при строго кристаллическом эвгедральном внешнем облике



Ф и г. 9.6. Микрофотография шлифа силурийских кварцитов формации Тускарора (Маунт-Юнион, Пенсильвания).

Видно обрастание зерен кварца кремнистым цементом. Николи скрещены; × 150. Каталог Пенсильванского университета № 7987 (из коллекции Г. В. Вуда).

в шлифе невозможно бывает установить эту границу, что относится, например, к некоторым образцам кварцитов Орискани [457].

Другой критерий, с помощью которого осаждение из раствора можно отличить от механического выпадения, заключается в морфологии контактов между соседними зернами или кристаллами; так, если угол между контактирующими зернами равен 120°, это означает кристаллизацию из раствора [405 и 406]; одновременно это служит указанием на присутствие кремнистого цемента (конечно, этим критерием можно пользоваться в тех случаях, когда нет четко выраженных границ между зернами и цементом).

Кремнистый цемент всегда ассоциирует с кварцем, но нередко встречаются также и другие типы кремнистого цемента [187]. В таких случаях этот цемент может частично попадать в классы $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ и, возможно, в класс $\overline{AB}$. Точно определить класс можно лишь на основе морфологии и указанных диагностических признаков.

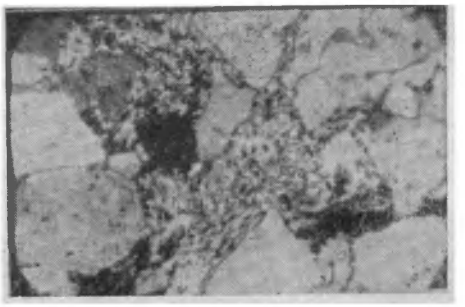
Нередко встречаются сростки полевого шпата [36, стр. 87 и ниже], хорошо известны также сростки турмалина [269]. Описаны также сходные образования циркона [47]. Все они попадают в класс $\overline{A}B$.

Карбонатный цемент в отличие от кластических обломков карбонатного состава (включающих обломки ранее существовавших известняков и доломитов, а также ископаемых органических остатков) может иметь также очень разнообразный внешний облик. Форма выделений, типичная для класса $\overline{A}B$, представляет собой сравнительно крупные пятна, оптически внутренне непрерывные по всей площади, а внешне прерывистые вследствие пойкилитовых включений зерен других минералов; такие выделения характерны «пятнистым блеском» [300].

9.3.4. Элементы класса $\overline{AB}$, внешне ($\overline{A}$) и внутренне ($\overline{B}$) прерывистые

Карбонатный цемент чаще всего встречается в виде небольших участков, заполняющих поры в осадочных породах (фиг. 9.7). В этом случае он внутренне прерывистый ($\overline{A}$ — поликристалличность) и внешне прерывистый (B — неправильные контуры). Если карбонатный цемент составляет свыше 30% от площади шлифа, то такая разновидность называется «песчаным известняком».

Другим элементом, который может быть классифицирован как внутренне и внешне прерывистый ($\overline{AB}$), является материал, называемый матрицей, или заполняющим веществом [270, стр. 138]. Размер зерен этого сложного по составу материала изменчив, но обычно этот последний более тонкозернистый, чем элементы класса AB. Трудно дать точные критерии для его



Фиг. 9.7. Микрофотография шлифа миссисипских субграувакковых песчаников формации Поконо (Алтуна, Пенсильвания).

Видны зерна кварца и кварцитов. Типичный для слюдистой матрицы облик. Николи скрещены; × 150. Каталог Пенсильванского университета (из коллекции Х. В. Шейдла).

Фиг. 9.8. Микрофотография пенсильванского песчаника формации Фаунтин (Ред-Кросс-Парк, Колорадо).

Видны зерна полевого шпата и кварца; хорошо выражена морфология кристаллического карбонатного цемента. Николи скрещены; × 100. Каталог Пенсильванского университета № 8506 (из коллекции Дж. Хуберта).

идентификации из-за сложности состава, включающего по крайней мере глинистые минералы, материал цемента (кремнистого или карбонатного), недоступный для диагностики, мельчайшие частицы кварца и другие минералы (фиг. 9.8); данное Браммаллом [38] определение сетки иллюстрирует потенциальную сложность характера матрицы.

Этот материал типичен для таких пород, как граувакки (субграувакки и граувакки) и аркозы, но в общем он встречается редко, а в кварцитах его совсем не бывает. Очень часто матрицей называют тот самый материал, который оптически определяется в шлифах лишь с большим трудом. В силу этих особенностей формы нахождения и распределения в шлифах, вероятно, являются наилучшими критериями для диагностики матрицы.

Матрица отличается от обломков глин класса $A\overline{B}$ по морфологии. Следует помнить, что по морфологическим признакам обломки местного происхождения не всегда отличаются от принесенных издалека; другими словами, необходимы дополнительные критерии, чтобы можно было отличать обломки ранее существовавших глин предположительно обломочного происхождения от обломков матрицы, характеризующихся непрерывным внешним габитусом, обусловленным некоторыми наложенными процессами, нарушившими первичное сложение породы [174, фиг. 2].

В большинстве случаев остальные элементы, лежащие за пределами этих подклассов, можно объединить под рубрикой класса «другие». Эти элементы, вместе взятые, следует определять с помощью доступных мор-

фологических критериев и впоследствии более точно дифференцировать путем детальных исследований.

При подсчете точек целесообразно пользоваться небольшим количеством подклассов. Эта рекомендация особенно справедливой бывает в том случае, когда оператор не уверен, к какому подклассу следует отнести какой-нибудь элемент; чем больше выбор, тем утомительнее процедура подсчета и тем менее близкими оказываются результаты. Восьми подклассов вполне достаточно для любого частного подсчета. Если же есть необходимость в большей детальности, нужно произвести новый подсчет, обратив при этом особое внимание на подразделения внутри подклассов. Такой двойной подсчет дает более достоверные оценки по сравнению с попыткой выделить те же подразделения при первом подсчете. Чтобы дать основную оценку типов и соотношений обычно встречающихся элементов, для предварительных исследований фактически достаточно четырех главных классов.

9.4. ИСПЫТАНИЕ МЕТОДИКИ НА СХОДИМОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

После того как выбрана серия классов для анализа методом подсчета точек, следует начать анализ с предварительного эксперимента, имеющего основную цель — испытать сходимость классификации. Оператор должен произвести повторные подсчеты в различные дни, чтобы решить, приобрел ли он достаточно устойчивые навыки для работы.

Если в получении результатов предварительного эксперимента принимали участие несколько операторов, следует провести более совершенный эксперимент с участием этих операторов.

В настоящее время уже не надо доказывать, что для химического анализа требуются определенные стандарты и унифицированная методика; при таком анализе получить дублированные результаты легче, чем процедурой, подобной подсчету точек, которая зависит от искусства оператора и от состояния оператора (например, от степени его усталости). Проверка на сходимость результатов подсчета в тонких шлифах гранитов описана Чейсом и Фэрбэрном [59], а осадочных пород — Гриффитсом и Розенфельдом [161]. Некоторые рекомендации для таких испытаний даются в настоящей книге.

Прежде всего мы должны проверить сходимость некоторых определений подклассов по n разным шлифам и p операторам. Анализ шлифов будет проведен с помощью t пересечений в каждом шлифе, и места этих t пересечений должны быть взяты наугад каждым оператором. Чтобы добиться приближения к модели бесконечной совокупности (см. гл. 18 и ниже), необходимо провести многократные замеры по каждому шлифу. Схема таких операций дана в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Схема эксперимента для проверки гипотезы отсутствия воздействия операторов и шлифов

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Ожидаемый средний квадрат
Между операторами	$p-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_{mp}^2 + tm\sigma_p^2$
Между шлифами	$m-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_{mp}^2 + tp\sigma_m^2$
Операторы × шлифы	$(p-1)(m-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_{mp}^2$
Линии (по операторам и шлифам)	$mp(t-1)$	σ_ε^2
Сумма дисперсий	$mpt-1$	σ_{tot}

Сходимость проверяется путем сравнения ожидаемых средних квадратов (чистый компонент изменчивости), полученных операторами по шлифам со значениями по пересечениям в виде отношения дисперсий F:

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_{mp}^2}{\sigma_\varepsilon^2};\ \text{степени свободы} — (p-1)(m-1)\ \text{и}\ mp(t-1).$$

Увеличивая число пересечений, можно повышать чувствительность критерия до требуемого уровня. Далее, дисперсии по линиям пересечения можно изучить, группируя значения по линиям в небольшие серии, например в каждом из пяти пересечений выделяется по 30 серий, в каждой серии объединяется пять точек. Необходимо отдавать себе отчет в том, что, если расхождения между дисперсиями несущественны, причиной этому служит либо близость соответствующих или средних значений, либо большая несходимость определений, произведенных операторами в разных шлифах.

Сходимость результатов, полученных разными операторами, можно проверить сравнением их подсчетов по одному и тому же пересечению. Чтобы установить сходимость данных по подклассам, необходимо использовать очень гибкую схему проверки с довольно большим числом изучаемых компонентов. Большую помощь в этом отношении оказывают графики анализов дисперсии, по которым можно судить о качестве анализа (см. [161, фиг. на стр. 80], а также раздел 15.6, фиг. 15.5 настоящей книги).

Весьма рекомендуем иметь небольшую серию шлифов в качестве стандартов; операторы, начинающие данный анализ, должны их анализировать. Тем самым еще до начала анализа можно добиться точных наблюдений операторов. Если намечаются значительные по масштабам аналитические работы рассматриваемого типа, коллекция стандартных шлифов, в которой разные типы пород представлены несколькими шлифами, окажется особенно необходимой.

9.5. ПРОЦЕДУРА И МЕТОДИКА

Процедура точечных подсчетов довольно проста. Необходимая аппаратура состоит из столика для точечных подсчетов и счетчика. Существует несколько конструкций как столиков, так и счетчиков.

Столиками можно манипулировать вручную либо контролировать их автоматически. Стандартный столик, сконструированный для ручного подсчета точек в тонких шлифах, продается в «Американ Оптикал Компани». Стандартный автоматический столик легко усовершенствовать. Вполне подходящей является модель столика Бауха и Лома, усовершенствованная Розенфельдом [366].

Для регистрации подсчетов пользуются также счетчиками кровяных телец. Наиболее удобны счетчики, которые регистрируют данные по восьми классам и общее значение. Другой тип — деноминаторные счетчики — также имеют разные размеры и вполне доступны. Такие счетчики можно установить на четыре, шесть или восемь каналов записи. Автоматический электрический счетчик, который можно приобрести у «Свифт энд Сан Лимитед», состоит из столика для подсчета точек, соединенного со счетным устройством.

Показания счетчиков лучше всего заносить в специальный журнал; одна из возможных форм журнала, пригодная для обычных исследований, приведена в табл. 9.3.

Для ускоренного подсчета и уменьшения ошибок диагностики можно пользоваться увеличенным изображением. В большинстве случаев для осадочных пород удобно увеличение в 100—250 раз. Расстояние между линиями замеров, естественно, не зависит от степени увеличения. При анализе осадочных пород целесообразно проводить подсчеты по сближенным линиям. Обычно на счетных столиках пользуются следующими расстояниями: 0,5 *мм*

Таблица 9.3

Таблица точечного подсчета минерального состава

Шлиф _____ Микроскоп _____ Тип _____

Порода _____ Столик _____

Объектив _____ Окуляр _____

Начальное положение _____ по v _____ по H № пересечения _____

Положение шлифа _____ Длина линии _____

Оператор _____ Расстояние между линиями _____

Примечания: _____

№ клавиша	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Табулятор
Минерал											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
Сумма											
Среднее значение											

между вертикальными линиями и 0,3 *мм* между горизонтальными. В некоторых случаях эти расстояния уменьшают, пользуясь квадратной сеткой окуляра, которая является далеко не лишним дополнительным атрибутом при детальных исследованиях.

Перед началом эксперимента нужно просмотреть шлиф и убедиться в том, что площадь его достаточна для подсчетов и что шлиф правильно изготовлен. Обычно считается, что точки должны располагаться по линиям прямоугольной сетки. Однако это требование несущественно. Линии могут отклоняться от одного направления. Иногда пересечения в разных направлениях оказываются даже необходимыми (см., например, работу [226]). После предварительного просмотра шлифа можно приступить к выбору системы классов и подклассов, которая нужна для данного исследования. Однако до окончательного выбора следует выполнить несколько пробных подсчетов с тем, чтобы удостовериться в стабильности диагностики оператора, так как лишь в этом случае будет получена достаточно точная оценка состава. Если оператор достаточно опытен, предварительные испытания

можно значительно упростить. Подсчеты, полученные при предварительных испытаниях, в анализе не учитываются.

Результаты точечного подсчета выражают числом элементов в классах и подклассах. Для стабильных оценок средних значений по шлифам Чейс [63] рекомендовал производить определения в количестве 1000 точек на шлиф. Вероятно, что для некоторых осадочных пород нужно еще большее число подсчетов. В качестве первого шага анализа желательно получить оценку принятой схемы опробования, т. е. расположения проб. Для этой цели из всей серии шлифов, подлежащих анализу, выбирают несколько шлифов (например, четыре), отражающих самые разнообразные породы. В этих шлифах проводят замеры на 10 линиях по 100 точек в каждой. Если это необходимо, точки группируют в небольшие серии. После этого стабильность полученных оценок можно проверить по индексу дисперсии (см. гл. 14 и работы [127, 171, 174, 416]). Если выявляется стабильность оценки, анализ можно продолжать. Но если оценка нестабильна, например χ^2 превышает практическое значение при уровне $P < 0{,}05$, линии подсчетов следует как-то объединить. Цель этой процедуры состоит в необходимости убедиться, что окончательная программа опробования может обеспечить получение случайных проб анализируемой генеральной совокупности. После этого задаются наиболее вероятным характером распределения значений, получаемых в результате анализа шлифов осадочных пород. Этот вопрос рассматривали Чейс [55] применительно к гранитам и Гриффитс [171, 174] — к осадочным породам.

Для подклассов, составляющих от 5 до 95% шлифа, вполне подходящей моделью можно считать биномиальное распределение, в то время как для подклассов, слагающих меньше 5% и больше 95%, соответствующей моделью будет распределение Пуассона. В обоих этих случаях требуется строгое выполнение условий опробования (см. гл. 14 и работу [171]).

Очень часто компоненты породы в шлифе такие, что условия опробования выполнить не представляется возможным; в таком случае пользуются альтернативными моделями — гипергеометрической [55] и отрицательной биномиальной [171, 172]. Для слоистых пород можно ожидать распределений Лексиана и Пуассона (см. раздел 14.6 и работы [233, 444]).

Несколько примеров манипуляций, необходимых для сравнения наблюдаемой частоты встречаемости с ожидаемой, описывается в гл. 14 настоящей книги, а также в других работах автора [171, 172].

В окончательном виде данные анализа будут выражены в виде средних значений и стандартных отклонений, а частота встречаемости может иллюстрироваться гистограммами. Некоторые примеры приведены в разделе 9.6, а также в гл. 14.

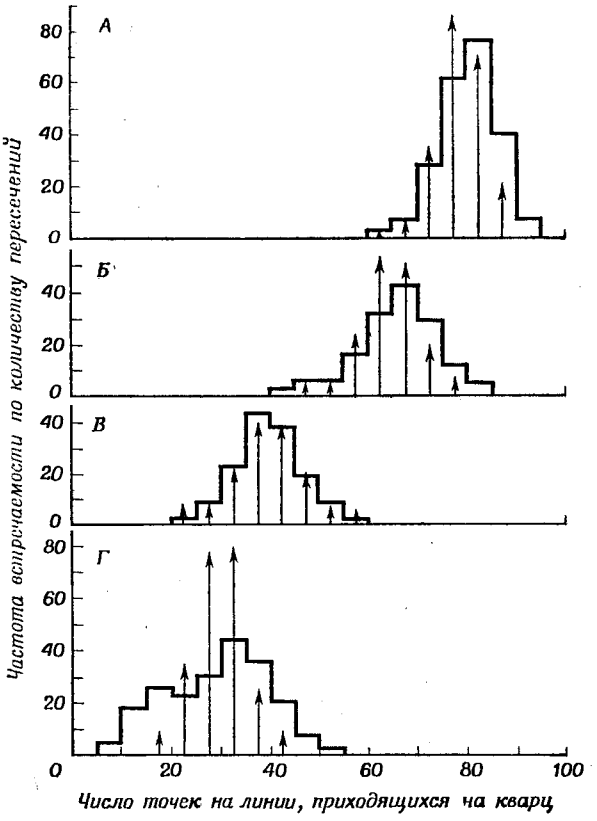
9.6. ПРИМЕРЫ ИЗУЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛЬНОГО СОСТАВА ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Чтобы проиллюстрировать характер ожидаемых результатов точечного подсчета элементов в шлифах, можно рассмотреть в качестве примеров некоторые известные в литературе эксперименты.

В процессе одного такого эксперимента пять операторов выполняли анализ трех шлифов из одного и того же образца кварцитов формации Орисканп. В каждом из шлифов замерялось по 15 линий со 102 точками на линии. Частота встречаемости для кварца показана на фиг. 9.9. Ожидаемое распределение для тех же средних значений выражено в виде стрелок. Расхождения здесь очевидны, и, по-видимому, они служат указанием либо на неслучайный характер опробования (расположения линий), либо на неприменимость биномиальной модели.

Точно так же распределение для кварца по подсчетам одного оператора на 25 шлифах (6 линий в шлифе, по 100 точек на линии) песчаников формации Солт-Уош представлено на фиг. 9.9, *Б*. Здесь наблюдаемые значения также не совпадают с ожидаемыми по биномиальной модели, показанными стрелками.

С другой стороны, в песчаниках формации Кау-Ран частота встречаемости для класса кварца, полученная по 39 шлифам (4 линии по 100 точек



Фиг. 9.9. Распределение относительных количеств кварца в различных осадочных породах.

А — кварциты Орискани:
$\overline{X} = 80{,}4$ $\overline{X}\% = 78{,}8$
$\hat{\sigma} = 5{,}9$ $n = 10{,}2$
$N = 225$ $m = 3$

Б — аркозовые кварциты Солт-Уош:
$\overline{X} = 65{,}4$ $\overline{X}\% = 65{,}4$
$\hat{\sigma} = 7{,}9$ $n = 100$
$N = 150$ $m = 25$

В — субграувакки Кау-Ран:
$\overline{X} = 39{,}7$ $\overline{X}\% = 39{,}9$
$\hat{\sigma} = 7{,}0$ $n = 100$
$N = 156$ $m = 39$

Г — аркозовые породы Рослин:
$\overline{X} = 29{,}4$ $\overline{X}\% = 32{,}7$
$\hat{\sigma} = 10{,}4$ $n = 90$
$N = 225$ $m = 3$

в каждом шлифе), очень близка к частоте нормального распределения, имеющего то же среднее значение и стандартное отклонение (фиг. 9.9, *В*). В этом случае нет существенного отклонения от гипотезы, согласно которой пробы, взятые по 156 линиям, являются случайной выборкой из совокупности с нормальным распределением с одним и тем же средним и стандартным отклонением.

Наконец, в эксперименте, поставленном с целью приобретения навыков в подсчетах, группой из пяти операторов были изучены три шлифа аркозов эоценовой формации Рослин, штат Вашингтон [39], по 15 линиям и 90 точкам на линии в каждом шлифе. Получились резкие расхождения между наблюдаемыми частотами и ожидаемыми по биномиальной модели.

На всех этих графиках абсцисса делится в соответствии с числом точек на линии замеров, предписанной классу, обозначенному как кварц. Ордината выражена количеством линий, которые содержат число точек, приходящихся на кварц, показанных по оси абсцисс. В четырех рассмотренных случаях площадь и длина линий пересечения меняются, так что статистики опробования останутся несравнимыми, если их графики не будут выражены в одних и тех же единицах.

Среднее значение $\overline{X}$ равно np, где n — число точек на линии. Чтобы сравнить средние значения, каждое из них выражается в процентах путем деления $\overline{X}$ на n и умножением на 100.

Стандартные отклонения также не сопоставимы без соответствующих пересчетов в одни и те же единицы. Ряд других примеров можно найти в гл. 14 и в цитированной литературе.

Представительная коллекция анализов различных осадочных пород методом точечного подсчета см. в табл. 9.4—9.6, где отражены также осо-

Таблица 9.4

Статистические характеристики результатов минералогических анализов некоторых обломочных пород (аркозы)

Элемент	Формация									
	Рослин [39]		Фаунтин [202]	Лайонс [202] [1]	Солт-Уош					
					«Сухие» песчаники [165]		Нефтеносные песчаники [165]		Уэйнсберг [399]	
	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$
Кварц	30,7	6,6	27,4	58,2	60,9	9,9	56,5	9,6	49,8	8,4
Полевой шпат	23,7 [2]	8,7	29,3	11,9					6,0	4,4
Обломки пород	18,2	12,1	20,2	9,0	13,1	9,0	10,6	5,1	13,4 [3]	6,7
									7,8 [4]	4,9
Слюды	7,3	6,2	4,4	0,5						
Матрица	13,7	16,9	14,3	11,0	14,5	12,2	6,8	5,8	11,6	6,6
Кремнистый материал			0,1	2,7	11,9	8,1	11,9	6,1	0,7	1,2
Карбонатный материал	5,2 [5]	6,7	2,6	6,0	7,6	8,1	8,5	6,9	8,9	8,3
Другие элементы	1,2	1,1	1,6	0,6						
Сумма	100,0		99,9	99,9	108,0		94,3		98,2	
Число шлифов	40		48	32	25		25		75	
Число линий на шлиф	2		6	6	6		6		10	
Число точек на линию	100		100	100	100		100		50	

[1] Среднее взвешенное, стандартное отклонение не вычислялось.
[2] Плагиоклаз — 12,2%, полевой шпат — 9,5%, другие компоненты не дифференцировались.
[3] Обломки кварцевых пород.
[4] Обломки слюдистых пород.
[5] Карбонаты и сульфаты.

бенности схем опробования, на основе которого получены приводимые данные. По этим таблицам перевод в обычные единицы можно сделать путем отношения среднего значения и стандартного отклонения, если известно число n — количество точек на линии.

Стандартные отклонения характеризуют степень ожидаемой изменчивости. Обычно она довольно значительна. По этим цифрам можно судить, в каких широких пределах меняются относительные содержания разных подклассов в одной и той же осадочной породе. Чтобы установить различия в количестве любого компонента, необходимо особое внимание уделить разработке подходящей схемы опробования.

Таблица 9.5

Статистические характеристики результатов минералогических анализов некоторых обломочных пород (кварциты)

Элемент	Формация												
	1	2	3			4		5		6		7	
	Орискани					Хомвуд				Тускарора			
	$\overline{X}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$
Кварц Полевой шпат	77,7	94,1	2,0	95,6	2,7	70,1	9,6	80,2	5,4	77,9	3,3	82,1	4,2
Обломки пород [1] Слюды	1,4	0,4	0,8	0,7	0,9	15,9	10,0	5,4	3,3	0,9	0,4	1,3	0,8
Матрица [2]		0,9	0,9	1,2	1,4	9,5	8,3	6,9	4,4	5,7	1,0	4,6	2,8
Кремнистый материал	9,5	4,5	1,9	1,9	1,3	3,7	1,8	7,1	2,6	14,5	3,4	12,6	4,2
Карбонатный материал	3,8												
Другие элементы	7,1 [3]												
Сумма	99,5	99,9		99,4		99,2		99,6		99,0		100,6	
Число шлифов	80	20		20		20		20		20		20	
Число линий на шлиф	20	80		80		80		80		80		80	
Число точек на линию	25	100		100		100		100		100		100	

Литературные источники: данные столбика 1 — [363], столбиков 2 — 7 — [457].
[1] Обломки пород в столбиках 2 — 7 относятся к кварцитам.
[2] Матрица содержит обломки слюдистых пород.
[3] Кластический карбонат.

Таблица 9.6

Статистические характеристики результатов минералогических анализов некоторых обломочных пород (граувакки)

	Формация									
	Кау-Ран [167]		Макстон [1]		Чипманк [319, 410]		Бериа [113]		Поконо [113]	
	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}$
Кварц	39,7	7,0	51,1	7,7	53,5	6,5	63,4	8,6	61,7	10,9
Полевой шпат	1,0	0,9	0,4	0,7	6,4	3,3	0,4		0,5	
Обломки пород	40,1	8,9	23,7	7,3	14,1	10,6	2,1		7,7	
Слюды	0,7	0,9					1,3		1,6	
Матрица	9,8	6,3	11,1	6,2	19,3	5,4	16,2		25	
Кремнистый материал	8,4	3,7	13,5	7,4	5,3	3,2	$<0,1$		$<0,1$	
Карбонатный материал	4,0	7,0	0,3	0,8			11,6		3,1	
Другие элементы							5,1		0,8	
Сумма	103,7		100,1		98,6		100,1		101,4	
Число шлифов	39		33		71			16	16	
Число линий на шлиф	6		4		5			5	5	
Число точек на линию	200		200		100			100	100	

[1] Гриффитс, неопубликованные данные.
Примечание. Сумма может значительно отличаться от 100% из-за накапливающейся ошибки группировки.

ГЛАВА 10

Изучение минералогического состава. Акцессорные минералы

Минеральные фации какой-либо древней осадочной породы и современных отложений одного и того же морского бассейна могут быть чрезвычайно сходными. В то же время они могут отличаться от других пород, лежащих непосредственно ниже и выше. Таким образом, каждая фация будет обладать своей собственной характеристикой.

J. Thoulet, p. 9, 1913

10.1. ВВЕДЕНИЕ. КОНЦЕПЦИЯ

Исследования акцессорных минералов представляют собой специфическую область изучения вещественного состава горных пород. Если химический состав пород или содержание основных химических компонентов можно сравнить с минералогическими анализами, то определение акцессорного состава аналогично определению элементов-примесей. В соответствии с этим методика исследования акцессорного состава, подобно методике определения элементов-примесей, требует специальной подготовки и обработки проб для выделения «элементов». Как в химических, так и минералогических исследованиях методика сводится к подсчету относительных количеств элементов.

Акцессорными называются минералы, встречающиеся в породах относительно редко. Они составляют менее 1% объема изверженных, осадочных и метаморфических пород. Иногда эти редкие компоненты концентрируются, например в пегматитах, в основных породах, образовавшихся при ликвации магмы, в аллювиальных россыпях и в различных рудных месторождениях. Таким образом, акцессорные минералы часто представляют значительный практический интерес. Процентные соотношения между наиболее распространенными акцессорными минералами изверженных различных пород показаны в табл. 10.1. Метаморфические породы, не выделенные в таблице, в данном случае можно отнести как к преобразованным изверженным, так и осадочным породам.

Из 3000 минералов, насчитывающихся в земной коре, около 300 довольно часто присутствуют в качестве акцессорных в осадочных породах. В большинстве случаев в осадочных породах содержится от 10 до 15 минеральных видов акцессориев. Но некоторые породы, например черные пески или вулканические пески, почти мономинеральны, в то время как другие, например гляциальные отложения, содержат свыше 50 различных минералов. Генетически акцессорные минералы можно подразделить на аллогенные, или детритусовые, и аутигенные, или минералы осадочной породы, образовавшиеся in situ. Изучение акцессорных минералов используется для дифференциации областей сноса (поиски источников сноса), выяснения условий осадконакопления (характеристика окружающей среды) и оценки диагене-

Таблица 10.1

Взаимоотношения между акцессорными минералами изверженных и осадочных пород

	Изверженные породы, %	Минералы	Осадочные породы, %	
Породообразующие	0—65	Ортоклаз	0—60	Породообразующие
	0—50	Плагиоклаз	0—30	
	0—30	Кварц	0—95	
Встречающиеся в переменных количествах	0—50	Амфибол, Пироксен	<1	Акцессорные Встречающиеся в переменных количествах
	0—20	Слюда	0—5	
	0—20	Оливин		
Акцессорные	<1	Циркон, Турмалин, Апатит, Гранат, Сфен и т. д.	<1	Акцессорные
Вторичные		Хлорит, Эпидот		

тических изменений в осадочных породах (изучение парагенезиса пород). Степень успеха в выполнении этих разнообразных задач, как и следует ожидать, бывает различной. Некоторые исследователи считают, что изучение акцессорных минералов обеспечивает получение любой информации, в то время как другие глубоко в этом сомневаются. В общем в осадочных породах, залегающих близ дневной поверхности, особенно в кайнозойских отложениях, изучение акцессорных минералов, оказывается, имеет большой смысл. В случае осадков, находящихся далеко от источников сноса, в которых акцессорные минералы были многократно переотложены в результате нескольких циклов седиментации, а также в случае весьма древних пород, в которых первичное разнообразие акцессорных минералов уже затушевано, получаемая информация может быть весьма незначительной. В общем аркозы и грауваккн относительно богаче акцессориями, чем субграувакки и кварциты [1], как по количеству акцессориев, так и по их разнообразию. Тем самым подтверждается известное положение, согласно которому в породах, формировавшихся вблизи источников сноса, например в аркозах и граувакках, содержится гораздо более разнообразный комплекс акцессориев, чем в субграувакках и кварцитах, обломочный материал которых подвергался переносу в течение длительного времени, в результате чего произошла значительная селективная сортировка.

Следует помнить, что изменчивость минерального состава акцессориев весьма ограничивает информацию. В наибольшей степени это ограничение относится к породам, претерпевшим различные изменения при седиментации и диагенезе, в результате которых изменились как первичные соотношения между минералами, так и расположение минералов. Информация, получаемая в таких случаях, может привести к ложным выводам.

10.2. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ АКЦЕССОРНЫХ МИНЕРАЛОВ

История исследований акцессорных минералов довольно детально описана Босуэллом [36, гл. 11, стр. 15 и ниже], который считал, что начало ее восходит к Реомюру [346]. Когда акцессорные минералы считались еще дико-

[1] Общие петрографические термины даются в понимании Крынина [268].

винными, изучались лишь акцессории рыхлых пород, например морских и аллювиальных песков [86]. Интерес к ним не был чисто академическим, так как среди этих минералов иногда находили драгоценные камни. Согласно Босуэллу [36], примерно до 1870 г. аналитическая методика ориентировалась в основном на химические анализы, но уже в это время пользовались магнитной сепарацией и диагностикой минералов по кристаллографическим формам. После 1870 г. стали широко применять разделение минералов в тяжелых жидкостях. Были разработаны стандартные процедуры для получения «тяжелых» концентратов из пород. В период с 1870 по 1890 г. при петрографических исследованиях начали применять поляризационный микроскоп, благодаря чему этот период нужно считать кульминационным для описательной петрографии. Выдающимся примером исследований «тяжелых» минералов была работа Туле [425] по пескам Сахары.

Интерес к акцессорным минералам возрос в течение последнего десятилетия прошлого века. В этот период была разработана более совершенная методика, появились и более детальные исследования; здесь следует указать на работы Ретджерса [348], который первым поставил вопрос о возможности определения областей сноса и условий осадконакопления по результатам изучения акцессорных минералов. Артини [16] предложил ввести количественную оценку содержания акцессориев в породе с помощью шкалы с показаниями от 1 до 10 (т. е. от широко распространенных до редко встречаемых). В это же время в своей классической работе Кайе [53] рассматривал вопрос об акцессорных минералах карбонатных пород.

Периодом расцвета исследований акцессорных минералов и становления их как самостоятельной научной дисциплины, преподаваемой в университетах [36, стр. 25], можно считать 1900—1920 гг.

Акцессорные минералы стали обнаруживать во все более и более древних породах. Был выработан основной принцип, согласно которому каждому типу осадочных пород присущ характерный, только ему свойственный комплекс акцессорных минералов. После этого стало возможным проводить стратиграфические корреляции с помощью тяжелых минералов [33]. Иллингс [210], коллега Босуэлла, впервые применил анализ акцессорных минералов в нефтяной геологии, когда он скоррелировал третичные отложения Тринидада [1].

Уже давно было установлено, что комплекс тяжелых минералов, содержащихся в какой-либо осадочной породе, можно отнести к той или иной области сноса, если известны тяжелые минералы пород, слагающих эту область. Рэсталл и Уилкоксон [345] были одними из первых исследователей, пытавшихся описать акцессорные минералы изверженных пород. Макки [284], изучая модификации кварца, предложил использовать разновидности минералов, что было усовершенствовано Браммаллом [37] в его известном исследовании дартмурских гранитов. Так как Гровс [182] знал комплекс тяжелых минералов в этих гранитах и в породах соседних участков, представленных также гранитами, ему удалось оценить степень участия различного гранитного материала в формировании кайнозойских осадочных пород Южной Англии.

Таким образом, к началу 30-х годов нашего века были канонизированы основные особенности исследований акцессорного состава. Было установлено также [36, стр. 47—49], что результаты исследований можно применять для нахождения областей сноса, выяснения условий транспортировки и седиментации, а также, на основании относительной стабильности различных минеральных видов, введения диагенеза. В течение двух следующих десятилетий (1920—1940 гг.) изучение акцессорных минералов было признано

[1] Название «Тринидад» повсюду в книге относится к одному из островов бывшей британской Вест-Индии, который ныне является частью страны, называемой «Тринидад и Тобаго».

в качестве стандартного метода в нефтяной геологии, причем большая эффективность метода была продемонстрирована при многих обширных исследованиях; особенно эффективно оказалось изучение третичных осадочных пород [95, 97, 105, 117, 194, 347].

К началу 1940-х годов стало очевидным, что если для палеогеографических реконструкций обширных областей и корреляций стратиграфических подразделений в широких пределах изучение акцессорных минералов приносит несомненную пользу, то эффективность этого метода при детальных исследованиях оказалась сомнительной, так как локальные отклонения часто бывают слишком значительными, затушевывающими основные закономерности. Уже давно было установлено, что содержание акцессорных минералов в осадочных породах может изменяться в зависимости от селективной сортировки [36, стр. 5, 75 и ниже]. Одним из первых роль этого фактора подчеркнул Руби [371]. Пытались снять влияние эффекта сортировки на размеры путем изучения зерен, принадлежащих к одному или двум классам размеров [376], но эти попытки оказались малоэффективными. Природа этой проблемы и ее значительность были окончательно выяснены и описаны Риттенхаусом [358, 359]. В своих работах он отмечал существенные ограничения в использовании изменчивости относительных содержаний акцессорных минералов. Их изучение продолжалось и в 40-х годах и позже, однако уже без прежнего энтузиазма — решались лишь определенные специфические проблемы [11, 209].

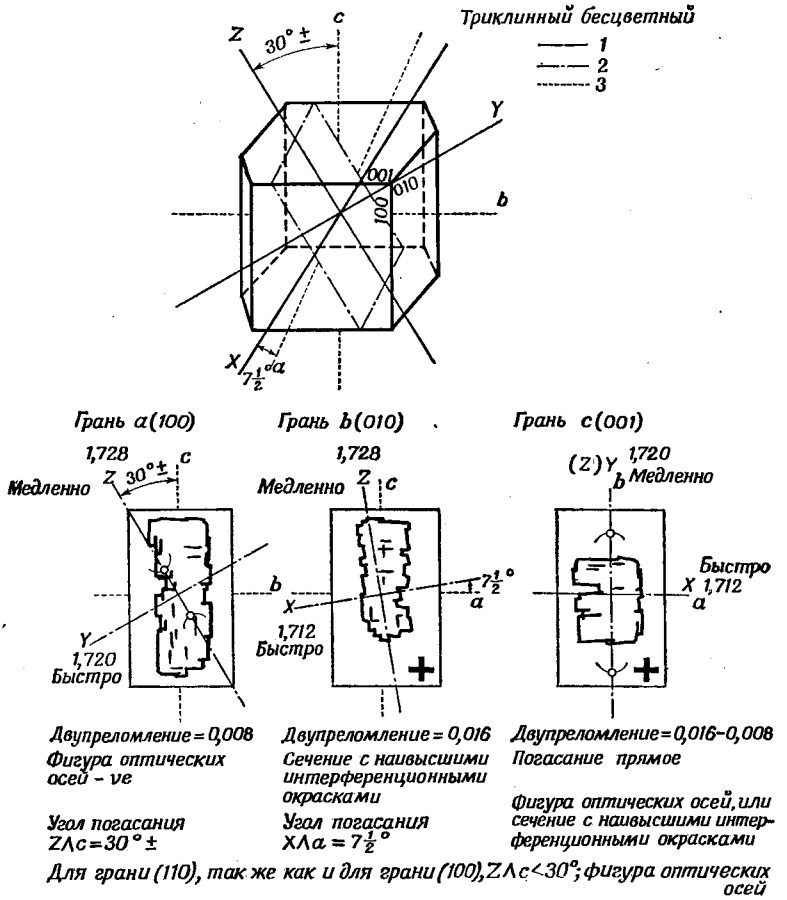
Очевидно, что достижение более точных и конкретных выводов требует более строгого подхода к проблеме, такого подхода, с помощью которого можно было бы «извлекать определенный сигнал из беспорядочного шума», т. е. изучать все более и более тонкие колебания относительных содержаний акцессорных минералов.

10.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ ЭЛЕМЕНТОВ

Акцессорные минералы обычно классифицируются в гомогенные группы с помощью определенного набора диагенетических критериев. Во многих справочниках можно найти очень сложные наборы критериев, по которым определяются минералы [248, 300, 455]. Можно рекомендовать таблицы, например такие, как в книгах А. Винчелла и Г. Винчелла [455, табл. 3] или Рассела [379]. Следует, однако, признать, что диагностика акцессорных минералов представляется особым искусством, приобретаемым в основном в результате длительной практики. Так же как и в обычном минералогическом анализе, процедура диагностики требует соблюдения некоторых психофизических предпосылок для постепенного приобретения определенных навыков. Для новичка эта процедура представляется обычно наиболее трудной сравнительно с другими подобными работами. Акцессорные минералы гораздо труднее определять в свободных зернах, чем в шлифах, так как кроме изменений, обнаруживаемых в шлифах, свободные зерна меняются по своим размерам и габитусу. Поэтому наиболее верным диагностическим критерием минерала является его облик, или габитус [1]. В сознании любого специалиста, опытного в диагностике тяжелых минералов, каждый минерал имеет определенный облик. Такой специалист интуитивно улавливает черты сходства в кристаллах, отличающихся по некоторым специфическим особенностям габитуса. В шлифах сечения зерен всегда произвольны и случайны. Приготавливая препараты с цельными зернами, минералоги наблюдают свободные зерна в каком-либо стабильном положении, обычно в таком, которое обеспечивает максимальную площадь проекции. Например, в шлифах

[1] Под габитусом кристалла понимаются его естественные очертания и величина как признаки, которые не меняются при любом способе приготовления изучаемого препарата.

базальный пинакоид мусковита встречается редко, а в свободных зернах эта грань наблюдается часто. Далее, в шлифах вряд ли можно мусковит принять за топаз, а в препаратах со свободными зернами тот и другой имеют вид бесцветных округлых пластинок (базальные пинакоиды) со сходным рельефом (показатель преломления $\pm 1{,}64$). В шлифах оба минерала кажутся изотропными, поэтому в сходящемся свете обоим им свойственна двухосная интерференционная фигура либо с малым, либо с несколько бо́льшим углом между оптическими осями (2V). Таким образом, эти минералы легко принять один за другой. И лишь по единственному признаку их можно отличить — топаз оптически положителен, мусковит — отрицателен.



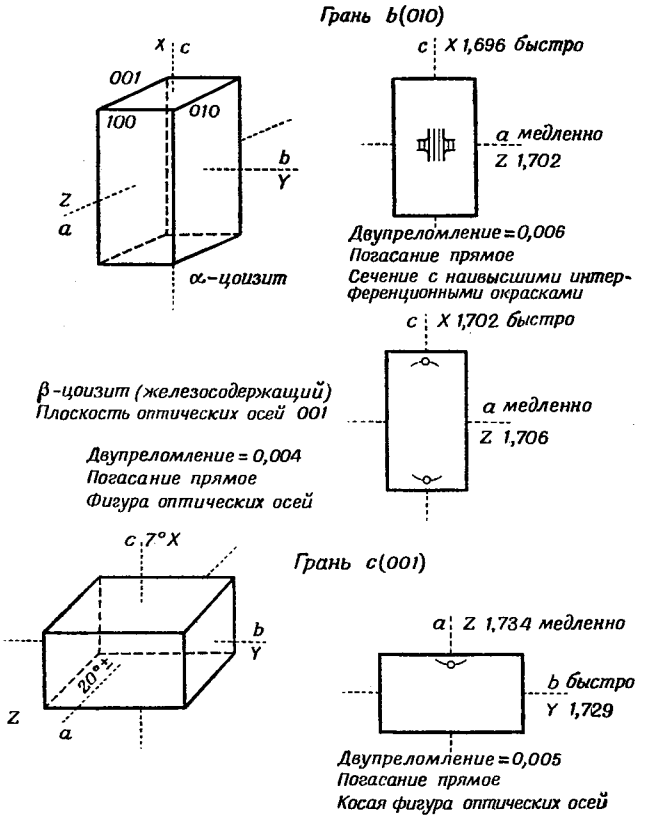
Ф и г. 10.1. Габитус и оптические свойства кианита (триклинный бесцветный).
1 — оптически положительный, оптическая ось; *2* — спайность; *3* — кристаллические оси.

Для правильной диагностики акцессорных тяжелых минералов часто бывает необходимо определить кристаллографическую ориентировку изучаемой грани, операция весьма трудоемкая. Многие минералоги считают, что для диагностики среди различных справочных пособий необходимо иметь тщательно выполненные рисунки, отражающие строение типичных минералов (фиг. 10.1) [1]. Но, несмотря на все эти пособия, иногда приходится

[1] Броммалл собрал в Королевском горном училище в Лондоне коллекцию цветных зарисовок различных возможных сечений распространенных акцессорных минералов, с воспроизведением цвета, плеохроизма и интерференционных фигур, характерных для каждого сечения. Эти зарисовки чрезвычайно помогают при изучении шлифов, ими можно пользоваться и как справочником и как учебным пособием.

извлекать то или иное зерно из препарата и определять его показатель преломления в иммерсионных жидкостях. Алан Стюарт (университетский колледж Свенси) продемонстрировал автору несколько иной способ: в покровном стекле препарата с зернами делают отверстие, бальзам растворяют в ксилене, зерно помещают на специально сконструированный столик, вращающийся в жидкости с известным показателем преломления. Наблюдая зерно в разных положениях под микроскопом, определяют показатель преломления и, следовательно, минеральный вид [147].

Одно из преимуществ элементов-примесей перед акцессорными минералами состоит в том, что определение элементов производится автоматически, посредством того или иного механического устройства. В определенных условиях также автоматически можно оценить относительное содержание тех или иных элементов. Точность или воспроизводимость результатов диагностики минералов и оценки их содержания определяется здесь качеством того или иного устройства. С помощью совершенных приборов можно проанализировать большее количество образцов, сэкономив при этом время и средства. Кроме того, обучить персонал производить анализ элементов-примесей гораздо легче, чем определять акцессорные минералы. В силу этих обстоятельств можно считать, что до тех пор, пока изучение акцессорных минералов не станет обеспечивать получение какой-то уникальной информации, имеющей большой интерес и значение, популярность, какой это изучение пользовалось в 30-х годах нашего века, не вернется.



Ф и г. 10.2. Габитус и оптические свойства цоизита-клиноцоизита.

10.4. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Сегрегация акцессорных минералов и получение их концентратов, основаны главным образом на их большей плотности сравнительно с плотностью породообразующих минералов — кварца, полевых шпатов, обломков пород (отсюда и происходит название «тяжелые минералы»). Прежде всего необходимо дезинтегрировать образец породы, не нарушая при этом по возможности габитуса тяжелых минералов. Затем дезинтегрированную пробу опускают в тяжелую жидкость, например в бромоформ или четырехбромистый ацетилен. При этом легкие минералы всплывают, а тяжелые опускаются на дно.

Свойства наиболее широко применяющихся тяжелых жидкостей сведены в табл. 10.2. Характеристику различных аппаратов для разделения зерен

Таблица 10.2

Тяжелые жидкости для отделения акцессорных минералов

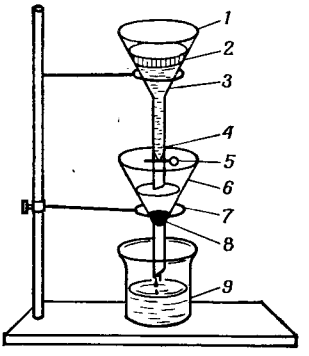
	Бромоформ (трибромметан)	Четырехбромистый ацетилен (*симм*-тетрабромметан-1,1,2 2-тетрабромметан)	Иодистый метилен (дииодметан)
Формула	$CHBr_2$	$C_2H_2Br_4$	CH_2I_2
Молекулярный вес	252,77	345,70	267,68
Точка кипения, °С	149,5	151,0	180
Точка замерзания, °С	6—7	0,1	5—6
Плотность	2,890 (при 20° С)	2,9630 (при 20° С)	3,325 (при 10,5° С)
Показатель преломления	1,63795 (при 19° С)	1,63795	1,7559 (при 10,5° С)
Примечание	Жидкость бесцветная или гексагональные кристаллы	Жидкость бесцветная до желтой, разлагается при 239—242° С	Жидкость бесцветная, начало кристаллизации при 0° С

Литературный источник. «Руководство по химии и физике», 28-е изд. «Кемикел Раббер Паблишинг Компани», Кливленд, Огайо, 1944.

можно найти в обычных учебных пособиях [248, стр. 335—344; 300, стр. 101 и ниже]. Для анализа небольшого числа проб достаточно собрать простейшее приспособление, состоящее из двух разделительных воронок и стакана для сбора излишней жидкости (фиг. 10.3). Если анализу подлежит большое количество проб и необходимо получить количественные результаты, следует организовать работу более рационально. В частности, для более полной и быстрой сепарации и для обеспечения более простого контроля анализа рекомендуется применять центрифугирование.

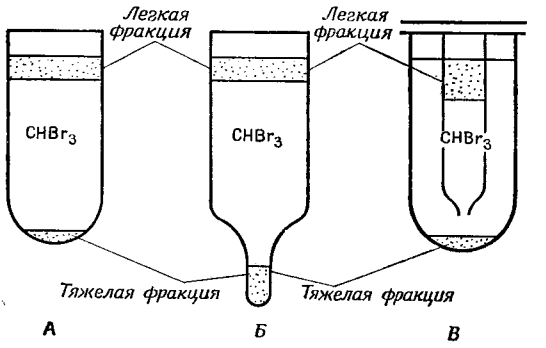
Основная трудность при сепарации центрифугой состоит в извлечении тяжелой фракции. Один из способов извлечения был продемонстрирован Р. Маккеем в Королевском горном училище в Лондоне (устное сообщение, 1938). Маккей использовал простой сосуд для центрифугирования (фиг. 10.4, *А*). После того как сепарация легких и тяжелых элементов была достигнута, сосуд с бромоформом заморозили в смеси льда и поваренной соли. Легкое нагревание сосуда в руке позволяет извлечь из сосуда замерзший столбик бромоформа с вмерзшими в него зернами. Затем столбик разбивают, и ту его часть, в которой содержатся тяжелые зерна, кладут на фильтровальную бумагу в воронку, где бромоформ тает и стекает сквозь фильтр. Если легкие минералы не представляют интереса, содержащую их часть столбика собирают в общем контейнере, где их фильтруют. Для точных количественных исследований подобная методика неудовлетворительна, так

как при извлечении столбика из сосуда часть легкой фракции иногда прилипает к стенкам сосуда и загрязняет тяжелую фракцию. Усовершенствование, предложенное Крыниным (устное сообщение, 1947), состоит в том, что нижняя часть сосуда должна быть резко суженной (фиг. 10.4, *Б*), что обеспечивает замораживание жидкости лишь в этой нижней узкой части сосуда. Затем легкую фракцию вместе с бромоформом удаляют из сосуда и промывают. Далее извлекают тяжелую фракцию. По альтернативной методике, впервые предложенной Салливаном [420] и независимо от него разработанной Джеффрисом [218], внутри основного сосуда для центрифугирования помещают специальный сосуд по способу, показанному на фиг. 10.4, *В*. Пробу помещают во внутренний сосуд. После центрифугирования верхнее отверстие



Ф и г. 10.3. Аппарат для сепарации тяжелых минералов с помощью тяжелых жидкостей.

1 — фильтровальная воронка; *2* — легкие минералы; *3* — тяжелая жидкость; *4* — тяжелые минералы; *5* — зажим; *6* — фильтровальная воронка; *7* — фильтр; *8* — тяжелые минералы; *9* — излишек тяжелой жидкости в стакане.



Ф и г. 10.4. Сосуды для сепарации тяжелых минералов в тяжелых жидкостях с помощью центрифугирования.

А — замораживание всего содержимого сосуда (устное сообщение Р. А. Макеев, 1938); *Б* — замораживание только суженной, нижней части сосуда (устное сообщение Крынина, 1947); *В* — сосуд в сосуде [212].

внутреннего сосуда закрывают рукой, и остающаяся в нем легкая фракция отделяется от тяжелой. Последняя находится во внешнем сосуде, откуда ее отфильтровывают.

При центрифугировании бромоформа или любой другой тяжелой жидкости возникает одно техническое затруднение: под воздействием веса тяжелой жидкости во время операции сосуд лопается. Чтобы этого избежать, надо поместить стеклянный сосуд вместе с его металлическим чехлом в бромоформ, играющий роль подушки.

Так как основная цель рассматриваемой операции состоит в сепарации и концентрации акцессорных минералов, разработаны и другие способы, улучшающие сепарацию, в частности использование ручного и электрического магнита или недавно сконструированного изодинамического сепаратора Франца. Эти способы сепарации могут применяться либо в качестве собственно метода, либо в сочетании с тяжелыми жидкостями. Различные приемы сепарации наиболее полно описаны Милнером [301]. Следует подчеркнуть, что эти приемы в основном нацелены на концентрацию акцессорных минералов п. там, где возможно, на сепарацию каждого минерального вида в особую фракцию. Для удаления из изучаемой пробы отдельно более грубых и тонких частиц применяется соответственно просеивание и отмучивание. Эта операция основана на том, что акцессорные минералы по размеру обычно располагаются между средними песчинками и грубыми илистыми частицами, эффективно в пределах от 500 до 30 *мк* (1—5 ϕ-единиц). Если задача исследований состоит в оценке относительных количеств различных минеральных видов путем подсчета во фракциях, остаток разделяют на под-

классы (на нодфракции), что неизбежно приводит к появлению новых ошибок опробования (см. следующий раздел), в связи с чем такую методику вряд ли можно считать целесообразной. Если же основная цель заключается в диагностике, разделение по минеральным видам является большим достижением и выделенные фракции можно затем изучать с помощью рентгеноскопического либо химического анализа. В этом смысле окончательное решение определяется в зависимости от цели исследования, а ясно намеченная цель играет весьма существенную роль при выборе подходящей методики.

После отделения тяжелой фракции ее следует промыть. Кислотами удаляют железистые пленки, органическими растворителями — остатки нефти, с помощью других растворителей — различные маскирующие пленки [300]. Наконец, приготовляют препараты по фракциям, т. е. помещают зерна в специальные смолы, легко разжижающиеся при нагревании и застывающие при охлаждении[1]. Если предполагаются значительные затруднения с диагностикой, препарат изготовляют с применением какой-либо жидкости с известным показателем преломления, которую можно легко заменить другой. Установка и отбор акцессорных минералов в препарате — важный шаг, особенно в том случае, если необходим подсчет содержаний минералов. Если количество имеющихся зерен превысит то, которое можно поместить в препарат, естественно, возникает вопрос об отборе зерен для препарата. Существуют различные способы деления, при которых возникающие при делении изменения можно контролировать [229, 316, 449]. При необходимости количественных определений нужно обеспечить гомогенное распределение зерен по площади препарата; Аллен [11] рекомендует изготовлять специальные шлифы с сеткой[2], облегчающей процедуру подготовки препарата.

Тщательная подготовка препарата совершенно необходима и является залогом правильной диагностики минералов и верной оценки их количественных соотношений.

10.5. ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ АКЦЕССОРНЫХ МИНЕРАЛОВ

По мере усовершенствования методики чисто описательные исследования, при которых регистрировалось наличие или отсутствие того или иного минерального вида, сменялись количественными определениями [36, стр. 69]. Сначала это были лишь субъективные определения относительной частоты встречаемости, но уже в 1898 г. Артини ввел числовую шкалу для оценки относительных количеств, по которой минералы, составляющие очень малую часть препарата, оценивались числом 10, а составляющие основную часть — числом 1. На этом этапе исследований уровень получаемой информации был либо номинальным (разделение зерен на группы — минеральные виды), либо порядковым (приближенная оценка частоты встречаемости; см. раздел 12.5). Шкала, предложенная Салмоджарги [382], обеспечивала тот же уровень информации, что и шкала Артини, но шкала Салмоджарги отмечалась обратными значениями оценок: большему количеству минералов соответствовало большее число. Флит [131] предложил оценивать частоту встречаемости с помощью подсчета числа зерен данного минерала. В 1931 г. Драйден, рассматривая проблему точности и воспроизводимости результатов подсчетов, предложил пользоваться «вероятной ошибкой» как оценкой точности подсчета. Риттенхаус [354] трансформировал кривые Драйдена с помощью логарифмической шкалы в прямые линии с целью облегчить процесс оценки точности определений.

---

[1] Например, канадский бальзам, пиперин или хиракс, показатели преломления которых равны соответственно 1,54; 1,68 и 1,70.

[2] Такие шлифы поставляет «Катрок Инжиниринг Компани», Лондон.

С введением подсчетов уровень информации вновь повысился, на этот раз до интервального. Но, ввиду того что нуль в шкале подсчета приравнивается к минералам «неустановленным», эту шкалу нельзя считать совершенной. Так как величина интервала между процентными показателями, например между 25 и 50%, не фиксирована, то в общем уровень получаемой информации вряд ли достигает здесь интервального.

Если для оценки соотношений минералов принят метод подсчета, необходимо стандартизировать методику подсчетов. Препарат с зернами тяжелых минералов, помещенный на специальном механическом столике, рассматривается под микроскопом. Подсчеты проводятся либо по линиям, пересекающим препарат, либо по полям зрения. Обычно более предпочтителен подсчет по линиям, потому что при простом перемещении шлифа зрение оператора устает значительно меньше; кроме того, по линии каждое зерно можно помещать в центр поля зрения, что очень важно для диагностики. В большинстве случаев непрозрачные акцессорные минералы количественно превышают прозрачные. Так как непрозрачные минералы определяют под микроскопом при отраженном свете, то перед последующими процедурами нужно как можно быстрее исключить из анализа непрозрачные минералы. Голландской школой петрографов [1] разработана методика, согласно которой 100 зерен пробы сначала классифицируют на прозрачные и непрозрачные, затем анализируют 100 или более зерен только прозрачных минералов. Эта методика имеет ряд преимуществ. Например, если анализируемая проба на 90% состоит из непрозрачных минералов и в ней насчитано 100 прозрачных зерен, эта операция эквивалентна подсчету 1000 зерен первоначальной пробы. Так как непрозрачные минералы редко используются для различных интерпретаций, рассмотренную методику можно считать вполне эффективной для достижения большей точности подсчетов и способствующей уменьшению трудностей, возникающих при статистическом анализе процентных соотношений минералов [263, 436].

Теперь предположим, что распределение какого-либо вида тяжелых минералов, например граната, биномиально. Пусть среди N зерен прозрачных минералов в препарате имеется P зерен граната. Тогда по каждому пересечению шлифа получается оценка X_i для P, и если сосчитано n ($n < N$) зерен, тогда $\overline{X}$, среднее по X_i, будет подходящей оценкой P при условии, что пересечения являются случайными выборками тяжелых минералов в шлифе. Если сосчитаны все N зерен, число кристаллов граната будет равным P, т. е. числу зерен, присутствующих в препарате. Практически в пробе подсчитывается n зерен. Мы исходим из того, что по мере приближения n к N значение $\overline{X}$ стремится к P (см. разделы 2.3 и 12.6). Оценка точности подсчета обычно представляется как некоторая функция стандартного отклонения (σ), которое при биномиальном распределении равно $\sigma = \sqrt{NPQ}$ (см. раздел 14.2). Тогда оценку количества зерен граната [2] можно представить как $\overline{X} \pm \sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})}$. Вероятная ошибка, которую Драйден рекомендовал понимать как функцию стандартного отклонения, выражается так:

$$\text{Вероятная ошибка (число зерен)} = 0{,}6745\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}. \qquad (10.1)$$

Можно допустить, что с ростом величины n подходящей аппроксимацией для биномиального распределения будет нормальное (см. раздел 14.2) и что

[1] Группа выдающихся минералогов-специалистов по акцессорным минералам; в нее входят Дуглас, Кромелин, Андел и многие другие. Группу возглавляет Эдельман (город Вагенинген).

[2] Эту оценку можно выразить в процентах, разделив ее значение на n и умножив на 100. Например, процент граната равен (NP/N) 100, или оценка составляет $(100\overline{X})/n$, а так как $\overline{X} = np$, она равна $100p$; подобным образом $\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})} = \sqrt{pnq}$, или в процентах это составляет $\sqrt{pq/n}$.

среднее значение ± 1 стандартное отклонение охватывает около 67,45% площади, ограниченной кривой нормального распределения, т. е. вероятность попадания данного наблюдения в интервал $\mu \pm \sigma$ равна 67,45% (см. раздел 13.7). Тогда вероятная ошибка представит интервал $\mu \pm 0{,}6745\sigma$, или 50% площади, ограниченной кривой нормального распределения. Поэтому для любого данного наблюдения имеются равные шансы попасть или не попасть в этот интервал. Проще использовать интервал $\mu \pm k\sigma$, где $k = 2$ или 3, который, таким образом, охватывает соответственно 95,4 и 99,7% площади, ограниченной кривой. Если следовать обычным рекомендациям, основанным на биномиальном распределении, «ошибку подсчета» $2\sqrt{\overline{X}\,(1-\overline{X})}$ можно оценить довольно легко, рассчитав значение $\overline{X}$. В табл. 10.3 приведены величины этой ошибки для наиболее представительной серии значений $\overline{X}$. Легко заметить, что ошибки распределены симметрично относительно максимума кривой. Далее, вероятность попадания новой

Таблица 10.3

Оценка «ошибок подсчета»

Среднее $\overline{X}$	p $\frac{\overline{X}}{n}$	q $\frac{1-\overline{X}}{n}$	npq $\overline{X}\left(\frac{1-\overline{X}}{n}\right)$	$\sqrt{npq}$ $\sqrt{\overline{X}\left(\frac{1-\overline{X}}{n}\right)}$	$2\sqrt{npq}$ $2\sqrt{\overline{X}\left(\frac{1-\overline{X}}{n}\right)}$
5	0,05	0,95	4,75	2,18	4,36
10	0,90	0,90	9,00	3,00	6,00
20	0,20	0,80	16,00	4,00	8,00
30	0,30	0,70	21,00	4,58	9,16
40	0,40	0,60	24,00	4,90	9,80
50	0,50	0,50	25,00	5,00	10,00
60	0,60	0,40	24,00	4,90	9,80
70	0,70	0,30	21,00	4,58	9,16
80	0,80	0,20	16,00	4,00	8,00
90	0,90	0,10	9,00	3,00	6,00
95	0,95	0,05	4,75	2,18	4,36

оценки в интервал 50 ± 10 находится на 95%-ном уровне, так что для 100 подсчитываемых зерен ожидаемый интервал составляет от 40 до 60 зерен.

При таких условиях более надежный подход заключается в использовании каких-то частей пробы и интервала $\overline{X} + k\hat{\sigma}_{\overline{X}}$, где $k = 2$ или 3 и $\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \hat{\sigma}/\sqrt{n}$. Путем правильного подбора величины n ошибку определения средних для частей пробы можно контролировать (см. раздел 2.6). Например, предположим, что имеется четыре серии, в каждой из которых находится по 25 зерен, т. е. $P = 50$. Тогда интервал $\overline{X} + 2\,\hat{\sigma}_{\overline{X}} = 50 \pm 2\hat{\sigma}/\sqrt{n}$, или $50 \pm \frac{2}{5}\,\hat{\sigma}$. Таким образом, целесообразно проводить подсчеты в небольших сериях.

При биномиальном распределении по случайным выборкам получаются несмещенные состоятельные оценки (см. раздел 12.6). Но допущение о случайном характере опробования биномиальной совокупности эквивалентно принятию модели постоянной вероятности, а это в свою очередь требует определенных характеристик опробуемой совокупности (см. раздел 14.3). Физически это означает, что гранат по подсчетам в разных пересечениях имеет постоянную встречаемость, поэтому чрезвычайно важно, чтобы препарат был равномерным. Лишь в этом случае принятие модели постоянной вероятности будет оправданным (см. раздел 14.3). Ниже будет показано,

что практически чрезвычайно трудно приготовить препарат, удовлетворяющий этим требованиям. Чтобы достигнуть лучшего контроля в процессе подсчета и приготовления препарата, Аллен [11] предложил использовать стекла с размеченной на них сеткой. Без контроля равномерности подсчеты могут привести к смещенным оценкам и полученные значения соотношений минералов не будут представлять истинных соотношений минеральных видов в препарате.

Значительное колебание количественных соотношений тяжелых минералов в разных пробах одного и того же слоя — обычное явление. В силу этого Эванс, Хейман и Мейджид [117] предложили пересчитывать процентные соотношения, получаемые при подсчетах, и выражать их в новой шкале, сглаживая, таким образом, случайные помехи. На этой новой шкале нулевая точка не имеет физического смысла и цена делений шкалы разная. Такую шкалу надо считать шагом назад, так как с ее помощью нельзя получить порядковый уровень информации, следовательно, подсчет становится бесполезной операцией, а «ошибка в подсчете»— бессмысленной [1].

Крамбейн и Расмуссен [253] пытались дифференцировать и сравнить источники изменчивости в оценке соотношений тяжелых минералов. Они обнаружили, что общая лабораторная ошибка приблизительно равна полевой ошибке, возникающей при опробовании, и что «ошибки» в весовых процентах тяжелых минералов больше, чем ошибки в частостях встречаемости. Для достижения более полного контроля в процессе фракционирования тяжелых минералов эти исследователи рекомендовали пользоваться центрифугой (см., кроме того, [356]). Они нашли также, что ошибки в разделении исходной пробы при отборе препарата для изучения, а также ошибки в приготовлении препарата и в подсчете зерен примерно в три раза больше, чем ошибки, получаемые от разделения исходной пробы путем просеивания и сепарацией в бромоформе. Таким образом, основные ошибки, по их мнению, возникают на заключительной стадии лабораторного изучения.

Приведенный обзор убеждает в том, что лишь весьма существенные изменения в количественных соотношениях минералов, выдерживающиеся по всему региону, могут быть использованы для геологической интерпретации. И если колебания в соотношениях действительно представляют реальный интерес, отбор объектов наблюдения должен строго контролироваться. Осуществлять контроль наиболее целесообразно с помощью препаратов, приготовленных простейшим способом. Так как после дезинтеграции влияние способа отбора пробы на колебание в распределении минеральных видов можно считать аналогичным трансформации распределения Пуассона в биномиальное распределение (см. раздел 14.7), то для избежания дальнейших осложнений желательно изучать всю дезинтегрированную пробу без сокращений. В этом случае для проверки адекватности приготовленного препарата подходящей моделью будет распределение Пуассона [171]. Так можно избежать многих ошибок, возникающих в результате разделения исходной пробы.

Если полученная путем подсчета оценка действительно представительнее для распределения минеральных видов в анализируемой пробе, можно изучить изменчивость между пробами. Чтобы установить, действительно ли репрезентативна эта изменчивость минералов для какого-то геологического тела, необходимо узнать распределение минеральных видов в «натуре» («реальном мире»). Некоторые возможные распределения рассматриваются в разделах 14.5 и 14.10 и в работе [171]. К настоящему времени наиболее реальной моделью из «реального мира» представляется отрицательная биномиальная модель (см. также [11]).

---

[1] В данном случае правильность арифметической процедуры для определения среднего значения и стандартного отклонения сомнительна.

10.6. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА АКЦЕССОРНЫХ МИНЕРАЛОВ

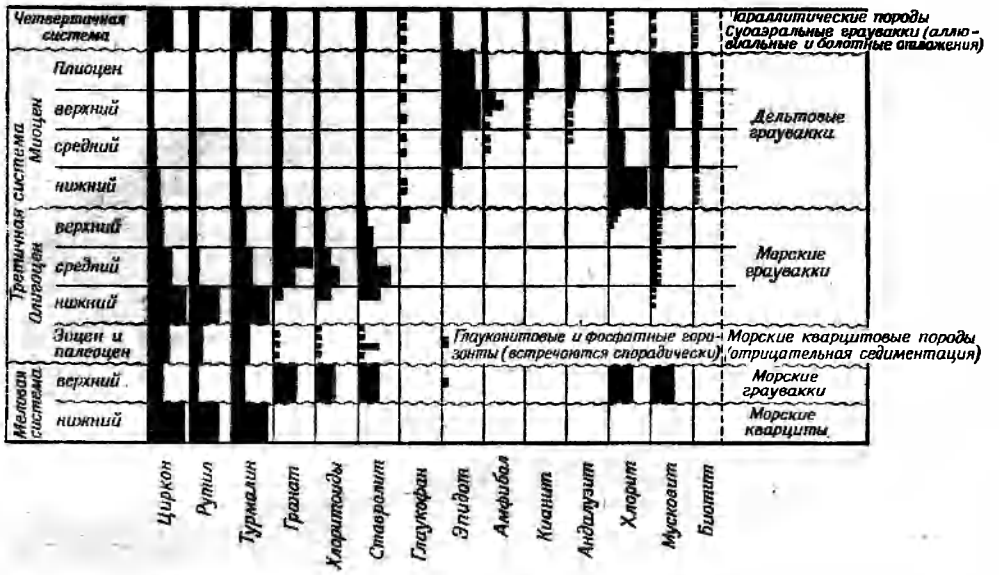
Акцессорными минералами обломочного происхождения в осадочных породах обычно пользуются для нахождения и характеристики источников сноса. По этим минералам также выясняют условия седиментации, в частности условия эрозионных процессов, транспортировки и осаждения. По степени их сохранности и присутствию аутигенных акцессориев реконструируются диагенетические процессы, которые действовали после осаждения зерен. Вновь заметим, что тяжелые минералы используются для стратиграфической корреляции лишь в том случае, если в каком-то слое установлен устойчивый набор минералов, отличный от минералов покрывающих и подстилающих слоев.

Акцессорные минералы используются при поисках россыпных месторождений золота, алмазов и платины [342], их изучают при оценке стекольных и керамических песков [34], а также при картировании областей, сложенных изверженными породами, по потокам рассеяния тяжелых минералов в случае слабой обнаженности. Принцип применения тяжелых минералов в указанных целях очень прост. Во-первых, нужно отыскать какой-то характерный минерал, который связывал бы обломочные породы с каким-то специфическим источником сноса. Чрезвычайно яркий пример представляет в этом случае вынос хромита из серпентинитов Лизарда, встречающегося в нерастворимом тяжелом остатке аллювия у пункта Чолк, около Бир-Хеда в Девоншире [89]. Рибекит в ледниковых отложениях Уэлса происходит либо из Минид-Маура в северном Уэлсе, либо из Айлза, Крейг в Ферт-оф-Клайде в Шотландии [146]. Синий турмалин из дартмурских гранитов считается маркирующим минералом мезозойских и третичных осадочных пород Южной Англии [182].

Такие характерные минералы встречаются не всегда, но для тех же целей можно использовать и характерные разновидности обычных минералов: Макки [286] впервые описал фиолетовый циркон как индикатор докембрийских льюисских гнейсов; Гровс [182] пользовался в этих же целях зональными цирконами дартмурских гранитов [37]. Многочисленные подобные примеры приводит Босуэлл [35]. Другая подобная альтернатива заключается в использовании каких-либо необычных морфологических особенностей или включений в кристаллах, например пилообразных граней зерен ставролита в триасе Англии [426], «гравированных» гранатов [300] и зональных апатитов [408]. Полагают, что некоторые морфологические особенности (например, каемки на зернах амфиболов и пироксенов [105], обрастание кристаллов циркона [47], обрастание и срезание кристаллов турмалина [269]) обусловлены диагностическими процессами.

Перечисленные особенности встречаются редко, вследствие чего их не всегда можно применить. В таком случае вместо отдельных минералов рассматривают характерные сообщества минералов, благодаря чему анализ акцессорных минералов можно распространить на значительно большее количество типов различных осадочных пород. Аналогичная практика существует в палеонтологии, где вместо отдельных видов также рассматриваются комплексы организмов. Одним из характерных примеров такого рода является типичность различных стратиграфических горизонтов Британии, о чем писал Босуэлл [36, гл. 6]. Стратиграфические корреляции типичных минеральных сообществ в основном определяются по вертикали весьма ограниченными пределами, но по горизонтали — обширным распространением. Многие стратиграфические перерывы или несогласия маркируются резкими изменениями в сообществах акцессорных минералов (см., например, [194]). «Первое появление» какого-либо нового минерала в серии слоев обычно используется для выделения маркирующего горизонта. Например, в Южном Тринидаде верхи разреза олигоценовых песчаников характери-

зуются первым появлением глаукофана, а основание самого молодого миоценового цикла ознаменовано первым появлением актинолита [416]. Подобным же образом в Южном Тринидаде семейство прозрачных минералов в составе циркона, рутила и турмалина характерно для формации Ла-Карьер. Низы олигоцена выделяются по этому же семейству и, кроме того, по присутствию ставролита и граната. Последовательная смена минеральных ассоциаций в разрезе может быть использована для зонального расчленения третичных отложений Тринидада (фиг. 10.5), о чем впервые упоминает Иллинг [210]. Начиная с нижнего мела или юры и кончая четвертичными отложениями по относительной частоте встречаемости различных минералов



Ф и г. 10.5. Распространение акцессорных минералов в меловых — третичных отложениях Тринидада.

в разрезе выделяется около семи четко выраженных зон. Эти зоны относительно беспрерывно прослеживаются на протяжении 700 миль; протягиваясь в широтном направлении, они уходят в Венесуэлу. Снизу вверх по разрезу эоцена-олигоцена наблюдается постепенное усложнение состава минеральных ассоциаций — от простой, циркон-рутил-турмалиновой, к которой выше «присоединяются» ставролит-хлоритоид, а затем гранат (содержание его равномерно увеличивается и достигает 30% всех прозрачных акцессорных минералов), до сложной, в которой постоянно, хотя и редко, встречается глаукофан (<5%). Именно такая последовательность появления минералов наблюдается в постепенно вскрывающемся в процессе эрозии районе, сложенном метаморфическими комплексами, причем степень метаморфизма увеличивается по мере приближения к интрузивным породам, которые слагают ядро этого комплекса. Таким образом, выявляющаяся в данном примере последовательность минералов служит указанием на специфическую область сноса, представляющую собой складчатую горную зону, претерпевшую региональный метаморфизм; возможно, что этой областью может быть, например, область Сьерра-де-ла-Коста в северной Венесуэле. Вверх по разрезу наблюдается резкая смена ассоциаций богатой эпидотом, характерных для миоценовых отложений. Эти отложения венчаются слоями, в которых впервые появляется амфибол (верхний миоцен). Основная масса акцессориев в миоценовых породах представлена мусковитом,

биотитом и хлоритом. В преобладании мусковита и хлорита наблюдаются циклические флуктуации, что позволяет предполагать размыв слабометаморфизованных осадочных пород, переслаивающихся с измененными вулканогенными породами (судя по присутствию эпидота и амфибола).

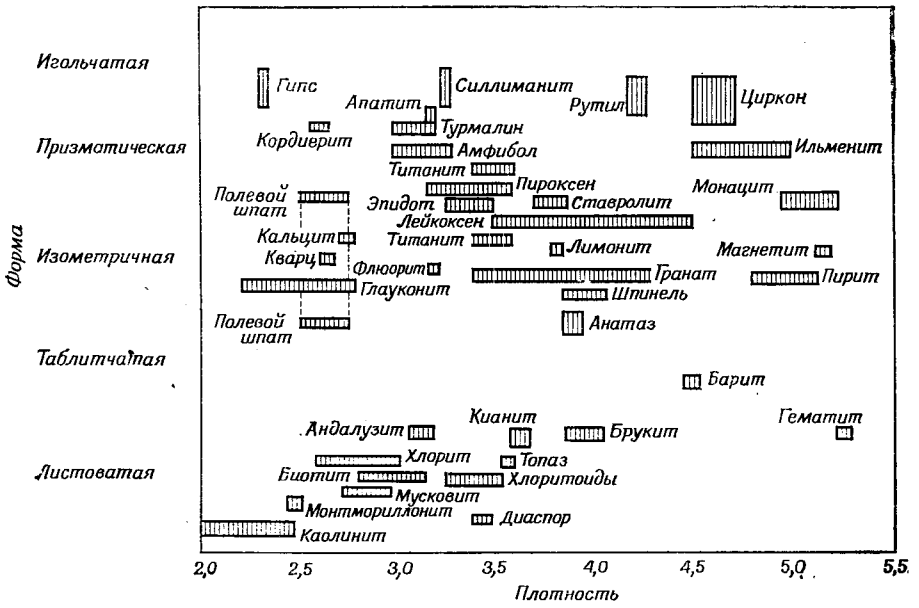
Эти зоны и соответствующие им области сноса можно установить, не прибегая к точному количественному анализу, так как в основном они определяются значительными изменениями в частоте встречаемости минералов. Если при увеличении точности оценки содержания минералов пытаться перейти к более локальным корреляциям, можно заметить, что флуктуации в количествах становятся слишком случайными («шумными»). Здесь выявляется очевидный парадокс, заключающийся в том, что корреляции по крупному региону вполне возможны, полную же увязку разрезов скважин, расположенных на 220 футов одна от другой при их глубине от 300 до 500 футов, осуществить нельзя даже в том случае, если бы можно было провести точные подсчеты минералов. Такая особенность свойственна всем исследованиям тяжелых минералов. Очевидно, что это ограничивает возможности применения метода, который эффективен лишь для выявления закономерностей в региональном плане.

Изменения, выявленные путем анализа акцессорного состава, можно наблюдать и по составу породообразующих минералов областей сноса. Так, сообщество циркон-рутил-турмалин типично для песчаников, богатых кварцем (кварциты); они встречаются, например, в нижнемеловой формации Ла-Карьер и в эоценовых кварцитах Пойнт-а-Пьер. Четвертичные пески в юго-западном Тринидаде становятся более богатыми кварцем, одновременно с чем в составе акцессориев начинают преобладать циркон, рутил и турмалин. С другой стороны, как в олигоценовых, так и в миоценовых субграувакках содержится гораздо более сложный комплекс тяжелых минералов. Таким образом, кварциты и субграувакки почти всегда будут резко отличаться по составу сообществ тяжелых минералов; тем самым изменения в наборе породообразующих и акцессорных минералов можно, по-видимому, статистически точно коррелировать, а это в свою очередь означает, что эти изменения взаимозависимы.

10.7. ПРИНЦИП ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Общеизвестно, что тяжелые минералы часто встречаются в виде скоплений, образующихся в результате природных процессов селективной сортировки (см. например, [36, гл. 7]). Как упоминалось, Руби [371] количественно оценил амплитуду эффекта этих процессов, а Риттенхаус [358, 359] детально рассмотрел принцип гидравлической эквивалентности применительно к современным рекам (например, Рио-Гранде). Аллен [9—11], кроме того, подчеркнул пятнистый характер распределения тяжелых минералов в песках Эшдаун в Южной Англии. Принцип гидравлической эквивалентности в связи с размерами зерен рассматривается также в разделе 4.10. Если два минерала обломочного происхождения, сопровождая друг друга, встречаются в какой-то осадочной породе, значит, они гидравлически эквивалентны. В таком случае, как это часто наблюдалось, размер зерен более тяжелого минерала будет меньше размера более легкого. Если, например, сравнивать размеры зерен циркона, кварца и мусковита, зерна циркона окажутся наименьшими, кварца — средними, а мусковита — наибольшими. Очевидно, что свойствами, обусловливающими гидравлический эквивалент, служат эффективная плотность, размер и форма зерен. При этом, естественно, все эти минералы имели равную вероятность попасть в изучаемую породу и при диагенезе количественные соотношения между минералами не были нарушены. Если при этих условиях изменится скорость потока, в котором переносится и осаждается детрит, соответственно изменятся как средний размер и форма, так

и размах размеров и формы осаждающихся зерен. Из гранулометрического анализа и наблюдений за современными процессами известно, что такие изменения довольно обычны; столь же обычны будут случайные колебания в относительных количествах минералов. Это значит, что если породы, слагающие область сноса, содержат, например, 2% ставролита [1], то в составе тяжелой фракции песчаников, образовавшихся вследствие разрушения этих пород, ставролит может составлять от 2 до 30 и более процентов в зависимости от условий седиментации-концентрации в процессе выветривания, эрозии, транспортировки и осаждения. Так как все эти условия подвержены резким



Ф и г. 10.6. Графическое изображение принципа гидравлической эквивалентности применительно к наиболее распространенным тяжелым акцессорным минералам.

изменениям, они могут найти свое выражение в песчаниках, слагающих одно и то же обнажение. Отсюда становится очевидным, что, если мы намерены интерпретировать даже умеренные колебания относительных содержаний акцессорных минералов осадочных пород, необходимо учитывать условия седиментации.

Одно из возможных весьма заманчивых решений состоит в использовании минералов со сходными свойствами и подсчете колебания их содержаний. Например, если два минерала имеют одну и ту же плотность и форму, то при одинаковых гидравлических условиях они должны вести себя сходным образом. И наоборот, если другие два минерала отличаются один от другого по плотности или форме или по обоим признакам, то и поведение их должно быть различным. О классификации наиболее обычных минералов обломочных горных пород по плотности и форме зерен дает представление табл. 10.5. Пироксен и амфибол находятся довольно близко один от другого, но оба отличаются от граната, из чего можно заключить, что колебания в содержаниях пироксена и амфибола будут сходными, но отличными от колебаний, характерных для граната. Проверка этой гипотезы с использованием данных Рассела, исследовавшего акцессорные минералы песков реки Миссисипи, описывается в разделе 21.14. В результате проверки подтвердилась

[1] Следует заметить, что в данном случае мы не располагаем надежной информацией о составе пород в области сноса, так что содержание ставролита в них может быть от 0 до 30% и более.

тесная ассоциация амфибола с пироксеном и различия между амфиболом и гранатом, так же как между пироксеном и гранатом.

Некоторые представления об амплитуде эффекта можно получить путем сравнения поведения двух минералов на модели гидравлического равновесия, например закона Стокса. Так, постулируя ламинарное течение и рассматривая циркон и эпидот (плотность соответственно 4,6 и 3,2 $г/см^3$), закон Стокса можно выразить в следующем виде (см. также раздел 4.6):

$$V = \frac{2g}{9\eta}(d_1 - d_w)\, r^2, \quad \text{или} \quad V = C\,(d_1 - d_w)\, r^2.$$

Так как скорость для обоих минералов рассматриваемой пары одна и плотность воды принята постоянной и равной 1 $г/см^3$,

$$V = C\,(d_1 - d_w)\, r_1^2 = C\,(d_2 - d_w)\, r_2^2, \quad \text{или} \quad (d_1 - 1{,}0)\, r_1^2 = (d_2 - 1{,}0)\, r_2^2,$$

а для циркона и эпидота $-3{,}6r_1^2 = 2{,}2r_2^2$, или $1{,}28r_1 = r_2$.

Трудно представить, что такие небольшие отличия оказываются столь чувствительными к колебаниям скорости потока. Однако, как показали широкие исследования циркон-эпидотовых отношений в миоценовых отложениях Южного Тринидада, в которых оба минерала являются обычными и постоянно присутствующими компонентами тяжелой фракции, устанавливается закономерное и систематическое увеличение содержания эпидота в направлении снизу вверх по разрезу. Все остальные случайные колебания были большими и совершенно случайными, т. е. не поддающимися контролю.

Использование разновидностей одного и того же минерала, предложенное Брамаллом [37], может показаться подходящей основой для сравнений: две разновидности одного и того же минерала должны вести себя более сходно, чем различные минералы. Но и здесь обширными исследованиями разновидностей циркона и турмалина в третичных отложениях Тринидада были установлены весьма резкие, не поддающиеся контролю колебания в относительных количествах различных минералов. Разновидности обоих минералов устанавливались по цвету, габитусу и включениям. Оказалось, что изменения в их относительных количествах очень тесно связаны с изменениями размеров зерен.

Селективная сортировка по размеру зерен, их форме и плотности — чрезвычайно эффективный процесс. Если он продолжается достаточно длительно или с достаточной интенсивностью, то в результате затушевываются все различия в минеральном составе, исключая лишь самые значительные. Недавно Мак-Интайр [294, 295], пытаясь исключить влияние источников изменчивости, вызванной селективной сортировкой, предложил учитывать различия в размере и особенно в форме зерен акцессорных минералов. Для решения определенных вопросов, например сравнения различных условий осадконакопления и, следовательно, различной степени селективной сортировки, такой подход представляется многообещающим.

В общем необходимо отдавать отчет в том, что изменения в соотношениях между различными минеральными видами определяются рядом всевозможных факторов, т. е. возникающая здесь проблема является многофакторной. В первом приближении взаимоотношения можно выразить таким образом:

$$\mathrm{Var}\,(X_i) = f\,(Sa,\ Wth,\ Er,\ Tr,\ Dep,\ Di),$$

т. е. изменчивость содержания минерала X_i является функцией изменчивости содержаний минералов в области сноса *Sa*, выветривания в области сноса *Wth*, эрозии *Er*, транспортировки *Tr*, осаждения *Dep*, диагенеза *Di*. Сомнительно, чтобы эксперимент, охватывающий изменчивость шести факторов (см. шестимерную классификацию, гл. 20), успешно выполнялся только с помощью изучения изменчивости в соотношениях акцессорных минералов.

ГЛАВА 11

Измерение производных свойств

При определении веса применяются принципы сложения и равенства в том же смысле, какой заложен в арифметическом действии сложения и в арифметических равенствах. Но оба принципа не подходят для определения плотности.

N. R. Campbell, Foundations of Science, Dover Publ., Inc., p. 281, 1957

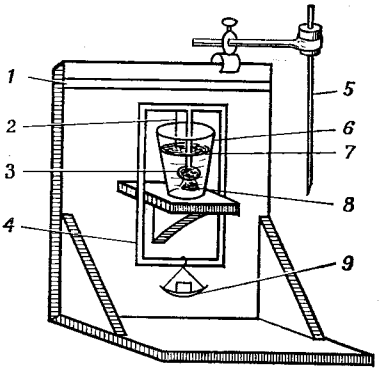
11.1. ВВЕДЕНИЕ

Помимо уже рассмотренных основных свойств, горные породы, являясь агрегатными образованиями, обладают рядом других характеристик, которыми пользуются для их описания. Эти свойства называются *производными*, потому что для оценки их необходимо знать основные свойства [50, стр. 346 и ниже]. Производные свойства можно рассматривать как качества пород или как такие характеристики, которые определяют поведение пород и которые изменяются в зависимости от изменения условий формирования пород. В общем производные свойства зависят от основных свойств, и важнейший элемент анализа горных пород заключается в оценке природы этой зависимости. Первый этап подобного анализа состоит в формализации функциональных отношений между производными и основными свойствами и в установлении эмпирических некоторых показателей или коэффициентов, влияющих на функциональные отношения. Практически, однако, функциональные отношения выявляются лишь после того, как установлены и выверены эмпирические взаимоотношения.

Если число основных свойств пород равно пяти, число производных свойств, которыми можно пользоваться для описания агрегата и предсказания его поведения при меняющейся окружающей обстановке, кажется неограниченным. Фактически же, по мере вовлечения в сферу изучения все новых и новых производных свойств, количество получаемой при этом новой информации о породах будет уменьшаться. Таким образом, изменения производных свойств и соответствующие изменения характера породы не неограничены. Часто оказывается, что измерять производные свойства более удобно и просто, чем измерять основные свойства, а на предварительных этапах изучения породы это измерение подчас является единственно возможным. Однако главная цель аналитических исследований состоит в применении, изменении и контроле поведения агрегатного материала. Решить ее можно, лишь изучив изменения основных свойств. В настоящей главе кратко рассматриваются методы измерения плотности, пористости и некоторых других производных свойств, очень важных для характеристики осадочных пород и других агрегатных материалов.

11.2. ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЕМНОЙ ПЛОТНОСТИ

Плотность агрегата — интересное и важное производное свойство. Оно используется как при полевых исследованиях крупных блоков горных пород (гравиметрические наблюдения), так и в процессе лабораторных исследований небольших проб. Под плотностью вещества здесь понимается его вес в единице объема [1]. Обычно различают два типа плотности — общую, или объемную, плотность породы и плотность вещества зерен. Первая характеризует агрегат в его «естественном» состоянии, а вторая — среднюю взвешенную плотность компонентов, слагающих агрегат. Р[illegible]личные значения



Ф и г. 11.1. Ртутные весы для определения объемной плотности горных пород [224].

1 — исходная линия; *2* — указатель; *3* — тело с известной массой; *4* — рамка; *5* — термометр; *6* — стакан; *7* — уровень ртути; *8* — образец; *9* — чашка для гирек.

этих свойств в основном обусловлены присутствием пор в агрегате. Три свойства — объемная плотность BD (bulk density), плотность зерен GD (grain density) и пористость, или объем пор P (porosity), — связаны между собой следующим образом:

$$P = \frac{GD - BD}{GD}, \tag{11.1}$$

или

$$\frac{BD}{GD} = 1 - P. \tag{11.2}$$

Плотность зерен можно измерить пикнометром, только предварительно нужно провести полную дезинтеграцию породы на ее составные части. Дезинтегрированный материал взвешивают, а его объем определяют; для этой цели материал помещают в сосуд (пикнометр) с известным объемом. Но таким методом весьма трудно добиться высокой степени воспроизводимости результатов. Существуют автоматические приборы, например воздушный пикнометр Бекмана. Однако показания различных приборов трудно стандартизировать и обеспечить ту степень точности, которая необходима для изучения измерений плотности.

Довольно часто оператор принимает, что все частицы дезинтегрированной породы — кварцевые с плотностью 2,65. Однако в большинстве случаев такое допущение неправильно, так как плотность осадочных пород находится в пределах от 1,5 до 2,8 и количественные изменения кварцевых зерен могут быть довольно значительными (гл. 9).

Объемная плотность измеряется так же, как и плотность зерен. Простым и легко контролируемым способом является метод ртутных весов. Этот метод был предложен Уэстманом [450] для определения объемной плотности кирпича, а Джонс [223] этот метод модифицировал.

Прибор, показанный на фиг. 11.1, обеспечивает вполне эффективную работу [74, 148, 158—160, 164, 364]. При хорошо разработанной схеме про-

[1] Удельный вес — это отношение массы тела к массе воды в равном объеме при 4° С, а плотность — масса на единицу объема тела (в граммах на кубический сантиметр).

ведения эксперимента (см. ниже) этим методом можно пользоваться для определения объемной плотности пород в интервале от 1,5 до 3,0 *г/см*^{3} с воспроизводимостью результатов до 0,01 единицы.

Процедура состоит в следующем. Пробу взвешивают на аналитических весах. С помощью ртутных весов определяют общий объем пробы, для чего последний погружают в ртуть. Ртутные весы состоят из стакана, заполненного ртутью, и тéла с некоторой известной массой (рекомендуем, например, шар из нержавеющей стали), жестко скрепленного с рамкой, на которую можно класть дополнительные гирьки. Перед погружением в ртуть стального шара определяют его вес. Затем под шар помещают пробы породы и узнают вес, необходимый для погружения в ртуть шара и пробы [1]. В обоих случаях шар опускается в ртуть до одного и того же уровня, определяемого специальным указателем (фиг. 11.1). Требуется некоторый навык для того, чтобы рамка с прикрепленным к ней телом оставалась в процессе всего опыта горизонтальной и параллельной некоторой исходной заданной линии. Перед взвешиванием наклоном рамки удаляют пузырьки воздуха из стакана со ртутью.

Расчетные данные следующие: w_d — вес образца в миллиграммах; $t°$ — температура ртути; d_t — удельный вес ртути при данной температуре (по таблице, которую можно найти, например, в «Руководстве по химии и физике»); c — масса шара, w_m — масса пробы. Объемная плотность вычисляется по формуле

$$\mathrm{BD} = \frac{d_t w_d}{w_d + w_m - c} \; г/см^3. \tag{11.3}$$

Можно найти также и общий объем BV:

$$\mathrm{BV} = \frac{w_d}{\mathrm{BD}} \; см^3. \tag{11.4}$$

Рекомендуется взвесить изучаемую пробу до ее погружения в ртуть и после погружения с тем, чтобы узнать, не проникла ли ртуть внутрь пробы (увеличение веса) или не потеряла ли проба часть своей массы (уменьшение веса). Образец записей результатов наблюдений и расчетов приведен в табл. 11.1. По этой таблице предполагается пятикратное измерение одной и той же пробы, обычно же бывает достаточно трех измерений, если, конечно, не требуется более высокой точности.

Выбор эффективной методики наблюдений очень важен при изучении большого количества проб и особенно в тех случаях, когда в целях экономии времени работа проводится несколькими операторами [161]. Известны различные схемы проведения рассматриваемых лабораторных исследований, а также методы статистического анализа. Они разбираются в нижеследующих главах (гл. 18 и др.). Можно различать сбалансированные и несбалансированные схемы. Первыми пользуются при работах небольшого масштаба. Суть их состоит в многократном измерении каждой из проб. С увеличением числа изучаемых проб переходят к несбалансированным схемам, при которых повторные наблюдения проводятся лишь на отдельных пробах. Такие схемы очень эффективны в тех случаях, когда результаты анализа можно запрограммировать для ЭВМ [158—160]. Статистический анализ результатов эксперимента большого масштаба, проведенного по несбалансированной схеме, может оказаться очень трудоемким и дорогостоящим, если не пользоваться автоматическими электронно-вычислительными устройствами [74].

---

[1] Х. Мейер (Пенсильванский университет, факультет геохимии и минералогии) предложил усовершенствование, заключающееся в том, что для погружения в ртуть до одного и того же уровня тела с известной массой, а затем этого тела и образца применяется тонкий песок. Вес песка и чашечки, на которую он высыпается, определяют затем на аналитических весах. Таким образом обеспечивается большая точность взвешивания.

Таблица 11.1

Форма таблицы для определения объемной плотности методом ртутных весов

Проба № _____

Предварительная обработка _____

	1	2	3	4	5
Дата					
Оператор					
t					
d_t					
w_d					
w_m					
c					
w_d					
BD					
BV					

BD — объемная плотность;
BV — общий объем;
d_t — удельный вес ртути при $t°$ С;
w_d — вес сухой пробы в воздухе (до и после погружения в ртуть);
w_m — вес, необходимый для погружения образца в ртуть;
c — вес, необходимый для погружения в ртуть тела с известной массой.

1	1
3	4
5	Примечания

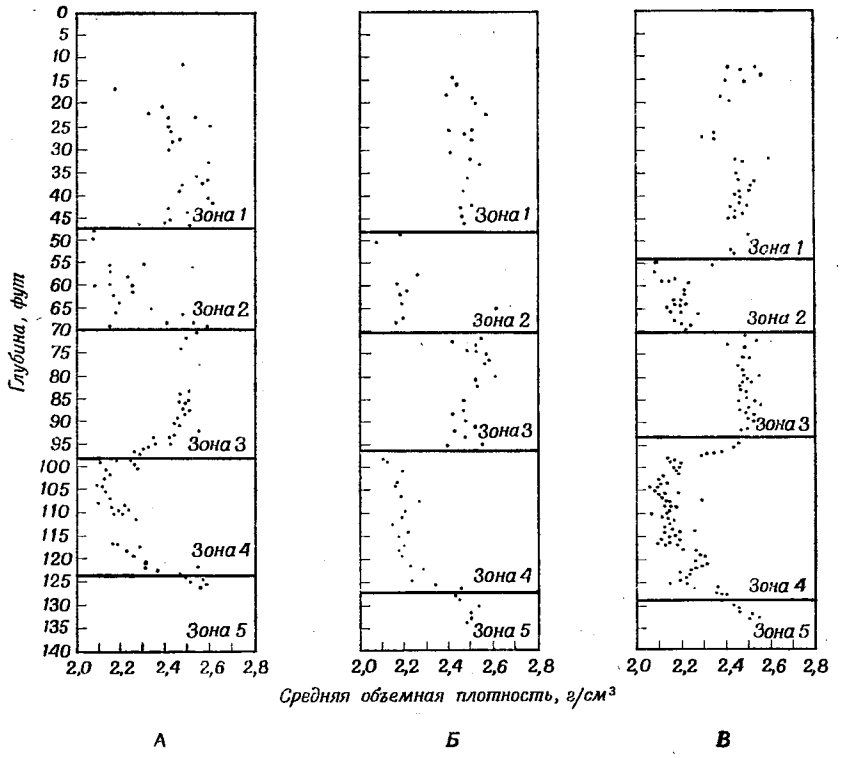
11.3. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Теоретически объемная плотность может меняться от единицы до бесконечности, практически же для главной массы горных пород она находится в интервале от 1,3 до 3,0, а для осадочных пород — от 1,5 до 2,9. Если анализируются пробы, взятые наудачу из гомогенной группы пород, распределение значений объемной плотности будет стремиться к нормальному. В этом случае в качестве подходящего статистического метода исследования можно воспользоваться дисперсионным анализом. Пример такого анализа приведен в табл. 18.7. Диапазон изменений плотности пород иллюстрируется на фиг. 11.2, где приведены данные для 343 проб пачки Солт-Уош юрской формации Моррисон, плато Колорадо. Пробы взяты из трех скважин [164]. Более типичный пример представлен в табл. 11.2, составленной по анализам 161 пробы той же пачки Солт-Уош. Эти образцы относятся к скважине *C*, Булл-Каньон, плато Колорадо [74, стр. 45; 157, табл. 1].

Интересно заметить, что ошибка эксперимента $\hat{\sigma}_\varepsilon$ составляет обычно около 0,01 единицы объемной плотности, в то время как мера изменчивости между анализируемыми пробами $\hat{\sigma}_m$ составляет величину, которая иногда превышает ошибку в 10 раз. Чтобы достигнуть такого соотношения, нужно выбрать эффективную схему эксперимента и провести достаточное количество повторных наблюдений [74, 157]. Различия между средними значениями объемных плотностей зон являются вполне реальными и ощутимыми; эти значения отражают различие между аргиллитами (зоны 1, 3*a* и 5) и песча-

никами (зоны 2 и 4). Зона 3*b* сложена песчаниками, сцементированными тем или иным количеством карбоната. Объемная плотность этих пород больше, чем аргиллитов.

Объемная плотность эффективно используется при изучении и прослеживании литологических изменений той или иной формации. Изменения



Ф и г. 11.2. Объемная плотность образцов из скважин *A*, *B*, *C*. Булл-Каньон, Колорадо [164].

плотности вполне достаточны, чтобы можно было обнаружить разломы или несогласия в тех случаях, когда их нельзя выявить другими способами. Имеется определенная зависимость между плотностью и глубиной залегания пород [17, 193], что нелишне знать при расчетах вскрыши и эффекта сжатия осадочных пород.

Таблица 11.2

Объемная плотность 161 пробы, взятой из скважины *C*, Булл-Каньон, плато Колорадо ([74], с изменениями)

Зона	$\overline{X}$	$\hat{\sigma}_m$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	n
1	2,427	0,074	0,007	30
2	2,222	0,116	0,010	25
2*a*	2,477	0,014	0,012	16
3*b*	2,490	0,036	0,009	12
4	2,195	0,084	0,017	72
5	2,491	0,037	0,047	6

11.4. ИЗМЕРЕНИЕ ПОРИСТОСТИ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Объем пор, обычно выражающийся как пористость, или поровое пространство,— важное производное свойство агрегатных тел. Это свойство имеет большое значение при оценке запасов нефти и в гидрогеологических исследованиях. Оно используется также при оценке эксплуатационных характеристик таких искусственных агрегатных материалов, как огнеупорный и строительный кирпич, различные керамические изделия, шлаки. Естественно, что для различных целей пористость определяется различными способами, и различные методы изучения пористости имеют те или иные преимущества и недостатки. Интересный и содержательный обзор, касающийся пористости и способов ее измерения, был сделан Розенфельдом [361]. Существует обширная литература по методам определения и использования пористости (см., например, [330]). Делая выбор между многочисленными методами, важно знать цель проводимых исследований и природу получаемых данных. Например, иногда различают абсолютную и эффективную пористость, понимая под первой общий объем пор, а под второй — объем пор. В нефтяной геологии обычно более важно знать эффективную пористость. Но если важнейшим аспектом исследований является плотность материала, наибольший интерес будет представлять абсолютная пористость. Эффективная пористость служит основой для расчетов коллекторских свойств пород, что рассматривается ниже. Очевидно, что численное выражение абсолютной пористости можно найти, если известна величина общей плотности породы и плотность зерен ее слагающих [см. уравнения (11.1) и (11.2)].

Существуют многочисленные способы определения эффективной и особенно абсолютной пористости. Было установлено, что значение эффективной пористости меняется в зависимости от типа флюида, применяемого для ее определения [279, 361]. В таком случае, прежде чем выбрать подходящую схему эксперимента, необходимо решить, для чего будут использованы его результаты. Для определения эффективной пористости часто применяется способ, описанный Юстером [465]. При этом способе можно пользоваться различными флюидами. Величина эффективной пористости будет зависеть от того, взаимодействует ли этот флюид с породой. Часто в качестве флюида применяется газ; взаимодействие его с породой ничтожно. Результаты, получаемые в этом случае, будут отличаться высокой точностью. Тем не менее если проводимые в лаборатории измерения пористости должны отражать определенные или «природные условия», то создаваемые в лаборатории условия должны как можно ближе подходить к природным.

Для определения эффективной пористости находят вес пробы в воздухе, затем насыщают ее флюидом и насыщенную пробу взвешивают в воздухе и флюиде. Наибольшая трудность состоит в том, чтобы обеспечить воспроизводимое насыщение, а также создать условия, при которых в насыщенной пробе сохранился бы флюид. Несколько проб одновременно помещают в вакуумную сушилку для удаления флюидов из пор. Когда они полностью удалены, вводится флюид и пробу пропитывают им до полного насыщения. Степень насыщения будет зависеть от проницаемости породы. Чтобы достичь «полного» насыщения, часто применяют специальные тщательно разработанные приемы. Обычно удается добиться лишь некоторой воспроизводимости результатов, что тщательно контролируется с помощью повторных экспериментов. Пробы, насыщенные тем или иным флюидом, рекомендуется хранить в том же флюиде и извлекать лишь для повторного взвешивания.

По достижении насыщения пробу вытирают сухой тряпочкой, чтобы удалить лишнее количество флюида, а затем определяют вес в подвешенном состоянии на аналитических весах. Далее пробу погружают в мерный стакан, заполненный насыщающим флюидом, и вновь взвешивают. Обозначим

вес сухого вещества w_d, вес насыщенного образца в воздухе — w_s, а в насыщающем флюиде — w_i. Вес проволочки (погруженной), на которой держится образец, обозначим w_w, а удельный вес флюида при температуре $t°$ С — d_t. Тогда эффективная пористость P_{eff} выразится так:

$$P_{eff} = \frac{w_s - w_d}{w_s - (w_i - w_w)}. \qquad (11.5)$$

Объем пор PV будет равен

$$PV = \frac{w_s - w_d}{d_t}. \qquad (11.6)$$

По этим данным, естественно, можно найти *эффективный* общий объем BV_{eff} и *эффективную* общую плотность BD_{eff}. Запись измерений и расчетов производится по форме табл. 11.3.

Таблица 11.3

Форма таблицы для записи измерений при определении эффективной пористости

Проба № _____

Предварительная обработка _____

Тип флюида _____

	1	2	3	4	5
Дата					
Оператор					
w_d					
w_s					
w_i					
w_w					
$w_i - w_w$					
t					
d_t					
PV					
BV					
BD					

PV — объем пор;
BV — эффективный общий объем;
BD — эффективная общая плотность;
P_{eff} — эффективная пористость;
w_d — вес сухой пробы в воздухе;
w_s — вес пробы, насыщенной флюидами в воздухе;
w_i — вес образца в насыщающем флюиде;
w_w — вес проволочки, поддерживающей образец, погруженной во флюид;
d_t — плотность флюида при $t°$ С;

$$BV = \frac{w_s - (w_i - w_w)}{d_t} \ см^3;$$

$$BD = \frac{w_d}{BV} \ г/см^3;$$

$$P_{eff} = \frac{w_s - w_d}{w_s - (w_i - w_w)} \ \%;$$

$$PV = \frac{w_s - w_d}{d_t} \ см^3.$$

1	2
3	4
5	Примечания

11.5. ПОРИСТОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Интервал значений пористости, рассчитанный теоретически для агрегата, состоящего из сферических частиц, будет составлять от 26 до 47% от общего объема в зависимости от характера расположения частиц. При наименее плотной кубической упаковке сферических частиц поры составляют 47% общего объема; наиболее плотную упаковку имеет агрегат, состоящий из ромбоэдров, где поры занимают 26% [135, 145]. В осадочных породах пористость может колебаться в интервале от 0 до 50%, хотя практически очень редко встречаются породы с пористостью менее 2% и более 35%. Пористость нефтеносных песков обычно колеблется в пределах от 10 до 30%, наиболее распространенных песков — от 10 до 25%.

Из уравнений (11.1) и (11.2) видно, что пористость связана обратной зависимостью с общей плотностью; эта зависимость обычно линейна [92]. Практически она выражается отношением 1 : 1, так что значение одного из рассматриваемых свойств можно использовать вместо другого, заменив только соответственно размерность и знак.

Пытались выявить соотношения между пористостью и основными свойствами. Результаты их оказались весьма противоречивыми, о чем свидетельствует табл. 11.4, составленная Розенфельдом [361]. Очевидные противоречия, иллюстрируемые таблицей, обусловлены зависимостью между измеряемыми свойствами, которые в свою очередь отражают взаимодействие

Таблица 11.4

Влияние основных свойств на изменение пористости [361]

Свойства пород	Источник информации [1]		
	теоретические расчеты	искусственные смеси	осадочные горные породы
Частицы крупных размеров	0	0 ± —	0 ± —
Хорошая сортировка	±	±	±
Некоторая асимметрия в сторону тонких частиц	?	±	±
Высокая степень «сферичности» и «окатанности» (общий эффект)	?	± —	0 ± —
Средняя степень «окатанности»	?	±	?
Неплотная упаковка	±	?	?
Небольшое содержание в цементе карбонатов, сульфатов, сульфидов и т. п.	±	?	±
Небольшое содержание глинистых частиц	±	?	±

[1] Нуль, плюс и минус обозначают относительные изменения в пористости применительно к данному свойству породы при условии постоянства других свойств.

между породами и окружающей средой как в лабораториях, так и в полевых условиях. Единственный путь, по которому можно идти в данном случае — это эмпирическое исследование серии проб горных пород [167, 175].

Если анализируемые пробы взяты наудачу из «гомогенной» совокупности, то распределение пористости, так же как и объемной плотности, по мере увеличения значения n будет приближаться к нормальному распределению. Вследствие этого для изучения изменений пористости можно применить обычный параметрический статистический анализ (см., например, [113, 167, 172, 319, 362, 410]).

11.6. ИЗМЕРЕНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Проницаемость — это мера скорости потока флюида, отнесенная к единице площади поперечного сечения агрегата. Таким образом, это свойство имеет много общего с пористостью и может считаться динамическим выра-

жением последней в условиях движущегося флюида. Измерение этого свойства сопряжено с теми же трудностями, которые встречаются при измерении пористости. Дополнительным источником изменчивости служат специфические трудности, возникающие в связи с измерениями динамической системы. Разработан ряд методов измерения проницаемости. Прежде всего необходимо четко представить цель, для которой будут использованы результаты определения проницаемости. В зависимости от этого и следует выбирать метод. Хорошо известно, что между породой и флюидом, проходящим через поры породы, возникают определенные взаимодействия. Вследствие этого в стандартных методах сначала в качестве флюида использовались газы [305]. Но для решения многих задач эти методы оказались неудовлетворительными. Например, они не отражают адекватно поведения в естественных условиях нефтеносных пород, поэтому от них отказались и стали применять различные жидкости. Проницаемость миоценовых нефтеносных субграувакковых песчаников Тринидада для воздуха достигает порядка 3000 *мдарси*, в то время как для жидкостей она уменьшается, например в случае дистиллированной воды, всего до 200—300 *мдарси*. Тем не менее измерение воздушной проницаемости является общепринятым методом при изучении керна нефтеносных пород. Помимо этого основного метода широко применяют его различные модификации; используют, в частности, одно- и двухфазные флюиды [330]. Еще одна особенность, усложняющая измерения проницаемости, состоит в направленном характере этого свойства. Давно уже было установлено, что флюиды скорее перемещаются не поперек, а вдоль плоскостей напластования [305]. Однако лишь относительно недавно было обнаружено, что и в плоскости напластования скорость потока в различных направлениях также не одинакова [222]. В силу этого чрезвычайно трудно выбрать подходящий метод измерения проницаемости, если точно не сформулировать критерии, характеризующие данный случай. Один из подходящих методов состоит в измерении воздушной проницаемости цилиндрических образцов керна определенных размеров. Керн вставляют в круглое отверстие, сделанное в неофреновой резиновой пробке. Диаметр этого отверстия должен быть таким, чтобы цилиндр прочно держался в пробке и полностью закупоривал отверстие. Затем через образец пропускают воздух, который улавливается в сосуде и измеряется в миллиметрах в единицу времени. Проницаемость K рассчитывается согласно следующей формуле:

$$K = \frac{QuL}{(P_i - P_0)A}, \qquad (11.7)$$

где K — проницаемость, *мдарси*, Q — скорость потока, *см*^{3}/*сек*, u — вязкость воздуха, *спз*, L — длина образца, *см*, A — площадь поперечного сечения, *см*^{2}, P_i — давление на входе, *атм*, P_0 — давление на выходе, *атм*.

Скорость потока не должна быть настолько большой, чтобы могли возникнуть турбулентные явления.

Есть многочисленные модификации этого метода, описанные в литературе (см., например, [305, 330] и др.). Чтобы измеряемая проницаемость отражала естественные условия, иногда приходится пользоваться очень сложными экспериментами. Примерами их может быть метод восстановления природного состояния [45] и метод измерения направленной проницаемости [208, 222].

11.7. ПРОНИЦАЕМОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Теоретически проницаемость может меняться от нуля до бесконечности, практически же интервал колебаний составляет от 0 до нескольких тысяч миллидарси. В нефтеносных породах она меняется от 1 до 3000 *мдарси* с наиболее обычными значениями от нескольких десятков до нескольких сотен

миллидарси. Пески, содержащие парафинистые нефти (например, третья песчаная пачка серии Брадфорд в верхнем девоне Пенсильвании) имеют среднюю проницаемость около 1 *мдарси*; такие породы встречаются редко.

Распределение проницаемости, измеренной в миллидарси для случайной выборки, состоящей из проб гомогенного агрегата, обычно отличается высокой степенью асимметрии в направлении к высоким значениям проницаемости, т. е. низкие значения встречаются гораздо чаще высоких. Обычно, если в качестве аргумента используется логарифм проницаемости, распределение обнаруживает тенденцию приближаться к нормальному. Вследствие этого пользуются не значениями проницаемости в миллидарси, а их логарифмами (см., например, [167, 319, 410]).

Райдер [381] впервые показал, что между пористостью и логарифмом проницаемости песчаников серии Брадфорд существует зависимость, близкая к линейной. Такие соотношения можно предполагать на основании постулирования функциональных взаимоотношений между пористостью и проницаемостью, т. е. из уравнения Козени [320, стр. 47]

$$K = Cd^2 \frac{\phi^3}{(1-\phi^3)^2}. \qquad (11.8)$$

Тогда $\log K = \log C + 2 \log d + 3 \log \phi - 2 \log (1 - \phi)$. Такая приблизительно линейная зависимость между логарифмом проницаемости и пористостью характерна для многих нефтеносных песчаников (см., например, [167, 192, 319, 410]). Во многих случаях доля общей для обоих свойств изменчивости, выраженная коэффициентом определенности r^2 (гл. 21), достигает 60—70%, т. е. 60—70% от совокупности факторов, влияющих на изменения пористости, будут определять также и изменчивость логпроницаемости, и только 30—40% факторов будут независимыми.

Таким образом, обнаружена заметная зависимость производных свойств друг от друга, что и следовало ожидать, так как они являются функцией одних и тех же пяти основных свойств. В отношениях производных свойств к основным можно постулировать общие факторы и продемонстрировать эти факторы эмпирически [167, 172, 319, 410]. Очевидно также, что по мере увеличения количества производных свойств увеличивается объем информации, зачастую излишней. Поэтому следует ориентироваться на какое-то определенное число измеряемых производных свойств. Конечно, это не значит, что нужно остановиться на измерении объемной плотности, пористости и проницаемости. Но если по результатам измерений новых свойств видно, что их изменчивость на 90% является общей с изменчивостью других свойств, то изучение этих новых свойств имеет мало смысла. Дополнительную информацию о породе можно получить лишь в том случае, если будет установлено, что новые производные свойства обладают некоторой независимостью по сравнению с уже известными, измеренными свойствами. Например, если объемная плотность в 20 образцах нефтеносных песчаников линейно связана с пористостью и общая изменчивость оценивается по коэффициенту определенности примерно в 90%, нецелесообразно измерять объемную плотность и пористость на разных пробах. Более целесообразно измерить одно из этих свойств на большом количестве проб, чем оба свойства — на меньшем.

11.8. ДРУГИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Как уже упоминалось, число интересных производных свойств, которые можно было бы использовать для характеристики поведения породы, очень велико. Если не вполне ясно, зачем нужно изучать новые свойства, то более ценные аналитические данные о породе можно получать путем измерения меньшего числа свойств на большем количестве проб. В любом случае анализ производных свойств целесообразно производить по следующему плану:

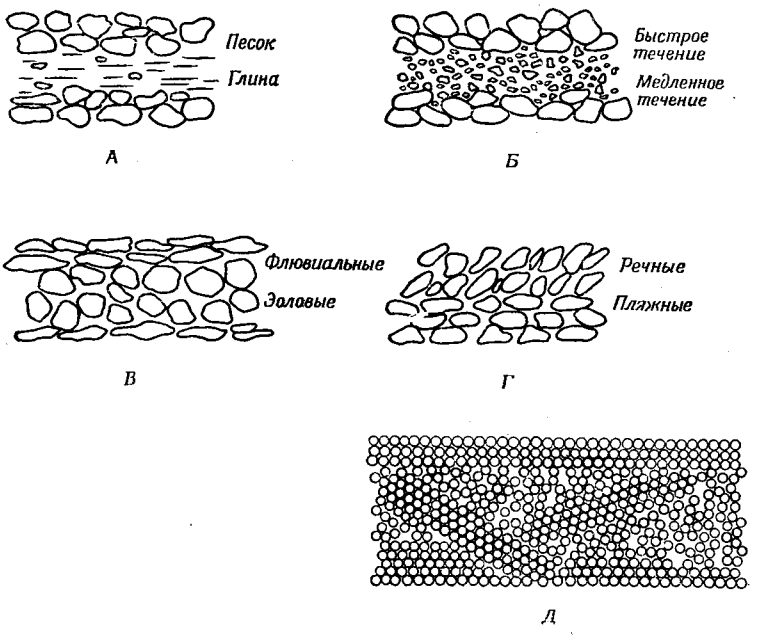
четко сформулировать концепцию, которую затем следует свести к операционному определению; наметить схему анализа, которая отвечала бы требованиям операционного определения; изменения свойств по возможности объяснить с помощью основной концепции; целесообразно определить амплитуду изменений свойств и характер распределения; выбрать наиболее подходящий способ анализа полученных данных. Прежде чем приступить к самим экспериментам, нужно выработать схему всего исследования и оценить воспроизводимость результатов. Для выяснения характера зависимостей полученные данные нужно подвергнуть многомерному анализу, например построить уравнения множественной регрессии и вычислить корреляционные матрицы. Чтобы определить меру избыточности данных, рекомендуем пользоваться компонентным анализом [172, 175, 181].

Есть много производных свойств, которые оцениваются лишь качественно. Такими свойствами пользуются при описании горных пород в поле. Одним из наиболее характерных свойств осадочных пород является слоистость, или стратификация. Это свойство не всегда определяется достаточно точно. Оно квалифицируется как свойство, «...выражающееся в виде пачек горных пород, которые имеют форму пластин или линз и отличаются друг от друга либо литологически, либо структурно» [329], или «...стратификация... возникает благодаря многим причинам — различиям в структуре пород, степени связности их частиц или цементации, цвете, минералогическом или литологическом составе и внутреннем строении» [393]. Пожалуй, наиболее удачное концептуальное определение дал Отто [1] [317], который под единицей седиментации понимает «...пачку пород определенной мощности, отложившуюся при одних и тех же условиях». Далее он объясняет, что в пределах единицы седиментации «...допустимы определенные отклонения тех или иных характеристик пород относительно некоторого среднего значения; но сами эти отклонения должны составлять унимодальное распределение». Таким образом, формулировка Отто эквивалентна понятию «коллектива» фон Мисеса [302]. Действительно, допущение подобных изменений необходимо, если нужно однозначно определить равновероятностное опробование какой-то гомогенной единицы. Концептуально слоистость, или стратификацию, можно охарактеризовать как явление, обязанное своим возникновением некоторым изменениям в одном из пяти основных свойств, что графически показано на фиг. 11.3. Но такое концептуальное определение нужно модифицировать, так как известно, что, когда концепции сводятся к операционным процедурам, различные свойства изменяются не независимо, а взаимосвязанно. Каждый тип породы, выделенный по характеру слоистости, будет характеризоваться отклонениями значений пяти основных свойств от их средних значений; тем самым основную единицу седиментации можно определить с позиций понятия о минимальной изменчивости.

Другими словами, можно говорить о слоистости в том случае, если изменчивость свойств между пачками превышает изменчивость внутри пачки. Такая формулировка отвечает статистическим и геологическим определениям этого понятия. Это определение создает также некоторый операционный базис, так как оно помогает установить наличие слоистости и ее амплитуду. Например, в стратифицированной толще результаты анализа проб, взятых поперек слоистости и относящихся к нескольким пачкам, и проб, взятых в пределах одной пачки, будут различными [170]. Отсюда следует, что, если рассматриваемые пачки невелики по мощности, стратификацию можно характеризовать количественно. Если же опробуемая совокупность массивна или изотропна в отношении изучаемого свойства, то независимо от расположения проб результаты анализа окажутся близкими и стратификация не будет установлена. Опробуя какую-либо совокупность, разбитую

[1] Аналогичную единицу Апфель [14] определяет как фазу.

на маломощные подразделения, можно установить ее внутреннюю структуру, анализируя изменения значений свойств. Дисперсионный анализ, особенно его многомерный вариант, будет идеальным средством для раскрытия структуры изменчивости любого агрегатного вещества. Модель, которая построена по данным такого анализа, служит основой для рекомендаций по опробованию (гл. 2 и фиг. 2.3.); в качестве примера ее рассматриваем в связи с проблемами опробования (фиг. 7.2). При испытаниях такой модели была уже



Ф и г. 11.3. Принципы, лежащие в основе понятия слоистости, или стратификации [175].
А — изменение в составе; *Б* — изменение в размере; *В* — изменение в форме; *Г* — изменение в ориентировке; *Д* — изменение в упаковке.

установлена ее эффективность [170, 411, 412, 458]. Следует заметить, что различные предварительные испытания включали как измерительные, так и вычислительные процедуры. Характер этих исследований не зависит от масштаба объектов; они применимы как к шлифам, так и к обнажениям. Их можно использовать при региональном картировании; кроме того, эти исследования представляют однозначную основу для определения толщи слоистых горных пород любой мощности с любой степенью дробности. Очевидно также, что один и тот же макроскопически устанавливаемый эффект может быть обусловлен изменениями разных свойств. Чтобы определить, к какому именно свойству относятся данные изменения, необходим тщательный структурный анализ. Рассмотрим, например, такой крайний и упрощенный случай. В одной пачке слоистость установлена по изменению состава пород, а в другой — по изменению в характере упаковки зерен. Если по выделенным таким образом «пластам» измерим, например, углы падения, получим разные цифры. С подобным явлением приходится сталкиваться, т. е. надо отличать истинную слоистость от ложной.

ГЛАВА 12

Обработка и свертывание информации

Это те правила, которые делают измеряемые свойства настолько схожими с числами, что, возможно, эти свойства следует обозначать символами, главное назначение которых — представлять числа. Именно поэтому можно отыскать одно и только одно число, которое должным образом представляет изучаемое свойство, благодаря чему числа будут содержать необходимые сведения о рассматриваемых характеристиках.

N. R. Campbell, What Is Science, Dover Publ., Inc., p. 118, 1952

12.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 1 в общих чертах обрисован организационный план экспериментального исследования, определяемый в итоге как научный метод. В последующих главах подчеркнуты этапы этого плана — основная идея метода, формулировка задачи и преобразование концептуальных определений в операционные процедуры и методики, которые приводят к конкретным измерениям. Эти измерения и представляют собой тот сырой материал (замеры и наблюдения), который составляет основу последующего анализа. Выбирается такая методика наблюдений и замеров, которая может обеспечить сбор наиболее многочисленных данных; при этом желательно применять более простые способы, ибо они более действенны при сборе относительно большого количества фактов. Однако большое количество данных или цифр останется совершенно непонятным без соответствующих методов обработки. Поэтому в последующих главах более широко рассматриваются способы обработки многочисленной информации, направленные на суммирование и группирование данных с переводом этой информации в такие формы, которые бы легко поддавались систематизации. Все эти процедуры являются частью единого плана экспериментального исследования. Поэтому исходные данные следует собирать по рекомендуемой методике, которую в свою очередь выбирают, по возможности, соответственно поставленной цели: преобразовать эти данные в формы, допускающие последующую статистическую обработку. Следовательно, процедуры сбора и процедуры обработки данных составляют лишь отдельные части единого процесса. Мы должны описать процесс тех приготовлений, которые предшествуют обработке данных, так как этой стороной исследования часто пренебрегают как утомительной и скучной.

Ввиду того что собранные данные оцениваются по затратам времени или стоимости, необходимо выбрать такой способ обработки, который бы обеспечил наиболее эффективное использование собранной информации. В этом заключается первый этап подготовки. Ко второму этапу подготовки относится оценка всей информации, заключенной в обработанных данных, с точки зрения решения вопроса, удачно ли выполнены процедуры. С помощью

статистического анализа нельзя извлечь информации больше, чем заключено в исходных данных, поэтому желательно «подстроить» аналитический аппарат к намеченной цели исследования и к характеру собранного материала. В этом смысле ниже мы дадим краткое описание теорий измерений и выбора процедуры подготовки данных под различными аспектами в зависимости от поставленной цели, намеченного плана и методики сбора материалов наблюдений.

12.2. СБОР И РЕГИСТРАЦИЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Начальный этап обработки данных зависит от способа, которым они фиксируются; эти процедуры в двадцатом столетии были в корне преобразованы. Раньше было принято наудачу фиксировать какие-то наблюдения,

			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
Образец	*Оператор*	*Поле зрения*	a	b	b/a_μ	*Наклонение*	a_ϕ	b_ϕ		

Ф и г. 12.1. Первый пример карточки исходных данных; используется для фиксации размеров зерен в шлифе, их облика и ориентировки.

a — длинная ось; b — короткая ось; b/a_μ — отношение длин осей (длина осей дается в микронах); наклонение — наклонение длинной оси к фиксированному направлению (по степени); ϕ — масштаб по Крамбейну.

	Образец:			*Оператор:*							
Зерно	a_μ	b_μ	c_μ	ψ	a_ϕ	b_ϕ	c_ϕ	S_r	R_k		

Ф и г. 12.2. Второй пример карточки исходных данных; используется для фиксации размеров и облика отдельных зерен и гальки.

a, b, c — длинная, средняя и короткая оси, *мк*; ϕ — масштаб (по Крамбейну; ψ, $\sqrt[3]{bc/a^2}$ [252]); S_r — сферичность, определенная визуально [357]; R_k — окатанность, определенная визуально [252].

затем анализировать их и публиковать выводы. Нередко, даже в тех случаях, когда исходные данные наблюдений были уже опубликованы, в повторных изданиях этим первичным материалом пренебрегали в пользу теоретических построений. По мере накопления научных работ возросло и критическое отношение к ним, что не позволяло опубликовывать первичные наблюдения, а это в свою очередь привело к упрощению исходных данных. Фишер [130], цитируя пример из ранней работы Лайелля по установлению стратиграфической последовательности третичных слоев, замечает: «Лайелль... в приложении к третьему тому своей книги занял не менее 56 страниц детальным описанием классификации каждой отдельной формы и подсчетами, которые... впоследствии были почти немедленно забыты... приложение... выдержало всего лишь 2 года...»

Сбор информации требует определенных способов записи и хранения, и если любой, более или менее крупный массив исходных данных надлежа-

щим образом не будет систематизирован, вся информация может стать ненужной. Для начала полезны таблицы; относительно способов их построения имеется масса литературы. Исследователь прежде всего должен выработать общую схему фиксации данных по мере их накопления; такие формальные схемы оказывают огромную помощь как во время полевых работ, так и в лаборатории. На фиг. 12.1 и 12.2 показаны регистрационные формы, которые выбраны в качестве оправдавших себя при измерении размеров и облика зерен в шлифах и рыхлых пробах или при изучении гальки в полевых условиях.

Со временем исследователи разработают метод, который позволил бы упростить последующий анализ данных. Один из способов, которым этого можно достичь, заключается в использовании перфокарт.

12.3. СИСТЕМЫ РУЧНЫХ ПЕРФОКАРТ [1]

Перфокартами типа Кейсорт [2] пользовались при описании керна из пачки Солт-Уош, формация Моррисон (плато Колорадо), по одной карте на каждые 3 погонных дюйма керна [157, 159, 160]. Карточки заполняли по коду, составленному для выбранных характеристик и напечатанному вдоль краев карточек. Разработка кода — наиболее важная сторона дела. Каждое изучаемое свойство занимает на карточке поле или ряд отверстий (позиций) по краю. Например, представим, что каждой пробе надо приписать число; для этой цели выделяется поле. Отверстия удобно размещать по 4 на 3/4 дюйма, как это показано на фиг. 12.3. Четыре отверстия обозначаются цифрами 1, 2, 4, 7; если мы пробьем нужное отверстие или несколько нужных отверстий, можно получить любое число от 0 (нет перфорации) до 9 (пробиты 7 и 2). Это выразится в виде столбика единиц; второе подобное поле обозначает десятки, третье — сотни. Путем сочетания трех полей, охватывающих 12 отверстий, можно пронумеровать пробы до номера 999 включительно [3].

Следующий шаг состоит в выборе поля для некоторого свойства, например цвета (на фиг. 12.3 см. «цвет»); в данном случае в поле имеется 8 отверстий, каждое для отдельного цвета, и сверх этого 2 отверстия для необычных цветов, не предусмотренных при предварительном беглом изучении керна.

Для обозначения размеров зерен предназначено поле из шести отверстий (на фиг. 12.3 см. «структура»); другое поле из 7 отверстий служит для обозначения характера наслоения (на фиг. 12.3 см. «слоистость»). Специальные поля предназначаются для нескольких других характеристик, которые могут представить особый интерес при описании этого керна, например: нефтяные пески, рыхлые или сцементированные, наличие глиняных галек, конкреций. Для других свойств пробы остаются неиспользованными много других полей.

Данные, регистрируемые на перфокартах, нужно описывать по единой системе, так как каждое поле учитывается в каждом отдельном случае. Кроме того, нельзя менять код во время описания, так как он фиксирован на картах. Конечно, такой подход не избавляет ни от расхождений в описаниях разных исполнителей (если работу выполняют несколько операторов), ни от разнобоя в данных одного и того же оператора, хотя систематизация все же помогает стандартизировать описание.

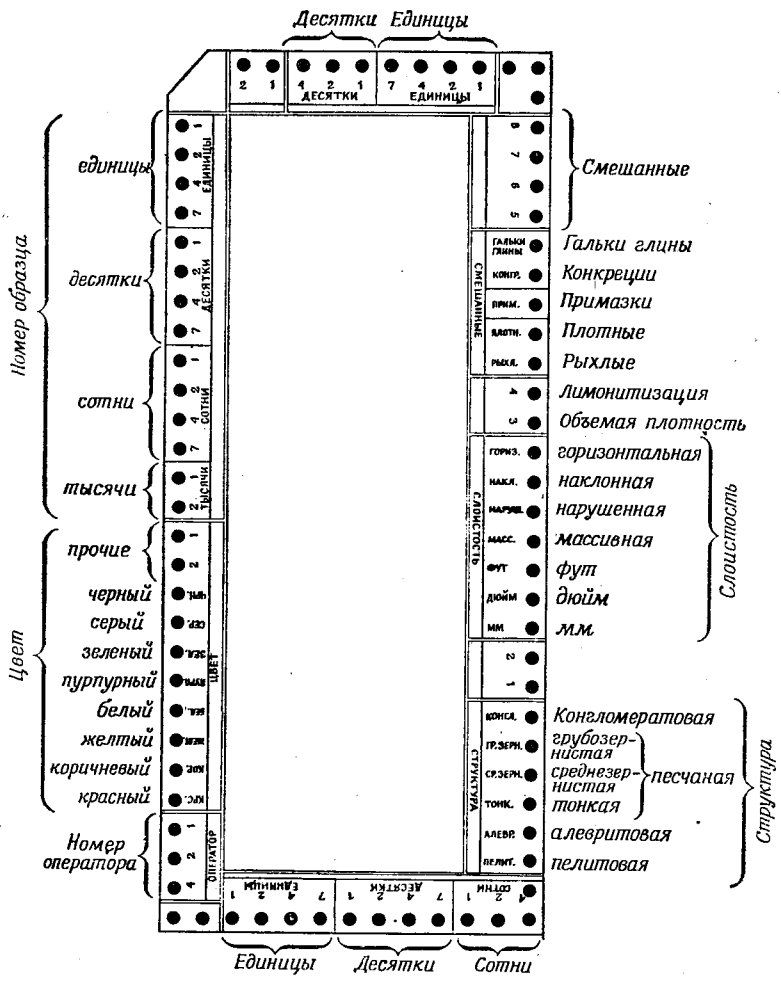
Когда описание всех колонок керна закончено и представлено набором перфокарт, наблюдения можно довольно просто классифицировать. Прежде

---

[1] В СССР широко используются перфокарты с краевой перфорацией типа К-4, К-5, К-6.—*Прим. ред.*

[2] Изготовлены компанией «Мак-Бе-Кейсорт».

[3] Было предусмотрено, что для данного исследования потребуются первые тысячи номеров, поэтому поле с двумя отверстиями обозначали 1, 2 (фиг. 12.3), что позволило такой картой получить номера до 3999 включительно.



Ф и г. 12.3. Кодирование перфокарт системы Кейсорт для классификации образцов осадочных пород.

всего определяется число карт в каждом классе и для каждого из различающихся классов подсчитывается соответствующее ему относительное количество. Затем карты классифицируются по нескольким признакам и оцениваются связи между признаками. Такую сортировку производить очень легко, надо лишь вставить стержень в отверстия, соответствующие интересующим нас характеристикам; карты, перфорированные по исследуемым свойствам, выпадают, после чего могут быть представлены таблицами с двумя или n входами.

Табл. 12.1 — пример использования перфокарт в литологии при изучении макроскопически определявшихся размеров зерен в керне скважин из пачки Солт-Уош формации Моррисон (Булл-Каньон, Колорадо). Выделено пять классов размерности (грубо-, средне- и мелкозернистые песчаники, алевролиты и аргиллиты) и все возможные комбинации этих пяти классов (всего 2^5-32 комбинаций). Нулевой класс, соответствующий пробам, которые по признаку зернистости не попадают ни в один из перечисленных классов, не рассматривается, так что любая проба из выборки должна быть отнесена к одному из остальных 31 класса. Изученные пробы зерна заняли только 21 класс, и распределение 1331 пробы из трех скважин выражается в про-

Таблица 12.1

Плотность распределения размеров зерен по макроскопическим определениям в трехдюймовом керне из скважин 155 *A*, 155 *B* и 155 *C*. Булл-Каньон, плато Колорадо

Класс	Структура	Скважина, %		
		A	*B*	*C*
1	Грубозернистый песок (Cs)			
2	Среднезернистый песок (Ms)	20,68	16,63	6,8
3	Тонкозернистый песок (Fs)	5,60	6,26	1,5
4	Алевролиты (St)		1,51	1,3
5	Аргиллиты (Mst)	32,85	22,03	33,9
6	Cs + Ms	8,76	6,07	1,8
7	Ms + Fs	5,60	14,47	6,4
8	Ms + St			0,2
9	Ms + Mst		0,22	
10	Fs + St	11,92	5,40	16,5
11	Fs + Mst	3,89	4,32	2,2
12	St + Mst	7,54	15,12	5,7
13	Cs + Ms + Fs		0,43	0,2
14	Cs + Ms + Mst	1,46	0,65	0,2
15	Ms + Fs + St	0,78		18,8
16	Ms + Fs + Mst			0,2
17	Ms + St + Mst		1,30	
18	Fs + St + Mst	0,97	1,94	4,2
19	Cs + Ms + Fs + St			0,2
20	Cs + Ms + Fs + Mst		0,22	
21	Cs + Ms + St + Mst		0,22	
22	Ms + Fs + St + Mst		0,22	
	Сумма	1 000,00	100,01	100,01

центах на таблице (более детальное описание см. в работе [57]). По распределению этих классов размерности можно сделать заключение, что градиент размеров зерен от скважины *A* (в урановой руде) через скважину *B* в скважину *C* (в 100 футах от скважины *A*) весьма изменчив и что наиболее распространены классы среднезернистых песчаников, аргиллитов, алевролитов и тонкозернистых песчаников или алевролитов, перемежающихся с аргиллитами.

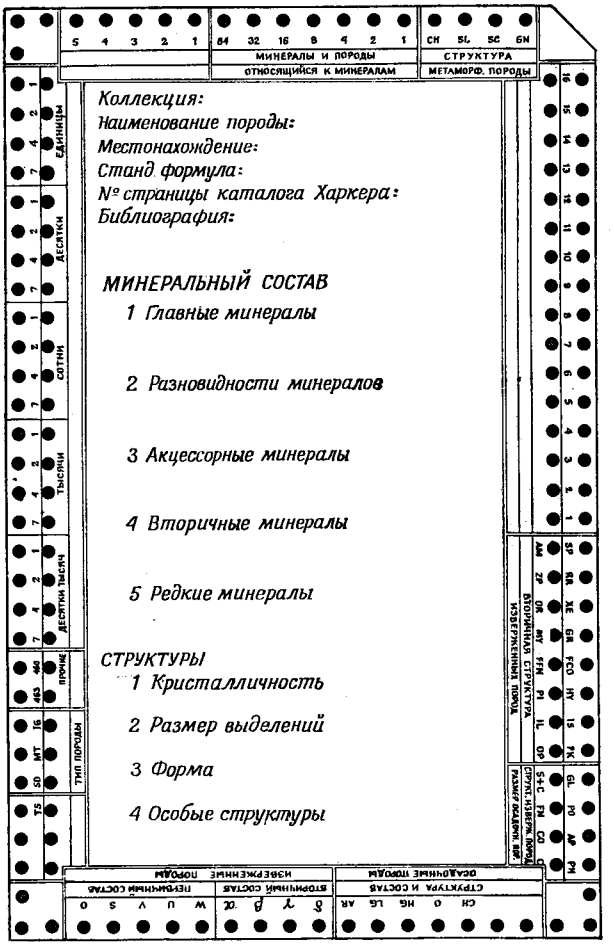
Таблица 12.2

Связь между цветом и размерами зерен в трехдюймовом керне из пачки Солт-Уош формации Моррисон, Булл-Каньон, плато Колорадо ([157], табл. 7)

Цвет	Структура						
	Cs	Ms	MsA [1]	Fs	FsA [1]	St и Ms	Сумма
Красный						38	38
Красный и зеленый					16	116	132
Зеленый			5	21	4	25	55
Красный, белый и зеленый	10	22	1	1	6		40
Белый и зеленый	1	116	2	30	2		151
Белый	38	6	2	1			47
Сумма	49	144	10	53	28	179	463

[1] A — все прочие классы.

Табл. 12.2 представляет собой двупорядковую таблицу признаков. В ней интересны взаимоотношения между цветом и размером зерен. Легко



Ф и г. 12.4. Каталожная карточка образцов из коллекции отдела геохимии и минералогии Пенсильванского университета.

заметить из расположения цифр, что красный цвет обычно соответствует аргиллитам, в то время как белый — песчаникам от средне- до грубозернистых. Чтобы установить значение этой связи, можно использовать критерий χ^2 (здесь $\chi^2 = 771{,}8$ с числом степеней свободы 20; следовательно, $P < 0{,}001$), и сила связи будет выражаться коэффициентом связи $C = 0{,}79$ (см. [233, 1] и раздел 17.5, где объясняется использование критерия χ^2 и этого коэффициента).

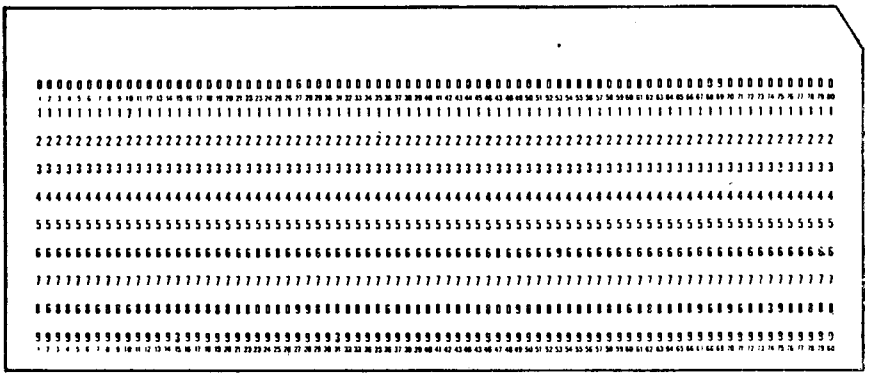
Можно применить разработанный анализ многократной иерархической дихотомии [464]; проверка на наличие связи с оценкой ее силы существенно упрощена путем применения аналогичной систематической процедуры (см. также раздел 17.5).

Перфокарты весьма удобны и для непрерывной фиксации данных, которые при такой форме легко сохранять. Кроме того, они значительно сокращают время при поиске информации; стоимость организации и содержания всей этой системы невелика, а процедуре работы с перфокартами легко научить. Пример перфокарты, взятой из каталога всей коллекции образцов отдела геохимии и минералогии Пенсильванского университета, дан на на фиг. 12.4. Описание принципов, процедур составления и назначения перфокарт, так же как и примеры их использования, содержатся в многочисленных книгах и статьях [46, 51, 52, 101, 207, 237, 320, 321].

12.4. АВТОМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Возможности ручных перфокарт с краевой перфорацией ограничиваются количеством отверстий, число которых зависит от размеров карты. При двойных отверстиях [1] число позиций увеличивается, и при хорошо разработанном кодировании система перфокарт облегчает обработку большого количества информации. Особенно удобно представлять таким образом те свойства породы, которые нельзя фиксировать по непрерывной шкале.

Если пункты программы многочисленны, ограниченное количество отверстий на картах снижает их необходимость в этих пунктах. Кроме того, когда



Ф и г. 12.5. Перфокарта для обработки данных на электронно-вычислительных машинах (система Холлерит).

данные выражены количественно, обычно их обрабатывают методами стандартной статистики, так как ручной обработкой перфокарт это сделать практически невозможно.

Следовательно, автоматическая обработка перфокарт вызвана необходимостью. Для этого обычно применяются машинные перфокарты Коллерид, где код несколько сокращен; эти карты (фиг. 12.5) имеют 80 столбиков по 10 позиций — от 0 до 9 в каждом. Первая позиция (номер образца) занимает поле столбика, равное количеству цифр самого большого номера (из рассматриваемой выборки), т. е. 4 столбика включают номера 9999. Для обозначения номера пробы 4763 потребуется четвертая позиция в столбике первом, седьмая — в столбике втором, шестая — в столбике третьем и третья — в столбике четвертом. Последующие столбики предназначаются для регистрации признаков; на первый взгляд 80 столбиков достаточно для любого случая, но допустим, например, что три серии измерений дали цифры типа 3,45; тогда первоначальные данные займут 9 столбиков, что в общем вместе с обозначением номера пробы займет 13 столбиков. В процессе обработки данных, чтобы получить сумму квадратов по каждому пункту программы, потребуется по крайней мере шесть столбиков и для парных произведений самое меньшее еще по шесть на каждый из них, т. е. всего 49 столбиков. Легко понять, что даже для заурядной исследовательской задачи 80 столбиков не так уж много. Конечно, если исходный материал уже один раз был обработан, вычислительная машина может сохранить результаты в своей памяти для дальнейшей обработки, и здесь нет серьезных проблем для исследователя (не считая копирования перфокарт). Пример применения таких перфокарт с последующей их обработкой описан Крамбейном и Слоссом [264].

[1] Каждое отверстие может быть использовано отдельно или же оба отверстия одновременно.

На этой стадии перфокарты представляют собой лишь один из многочисленных способов хранения и обработки информации. Другой способ заключается в кодировании информации для регистрации ее на бумажной или магнитной ленте. Очень большие объемы информации лучше хранить на лентах, чем на перфокартах, тем более что лента более доступна. Однако каждый способ имеет свои преимущества, выбор того или другого часто зависит от характеристик вычислительных устройств, имеющихся в распоряжении исследователя. Некоторые вычислительные машины устроены так, что могут обрабатывать информацию как на перфокартах, так и на лентах, другие же приспособлены только к одному способу регистрации.

Существуют машины для перевода информации с перфокарт на ленты и наоборот, так что сейчас имеется обширнейший выбор процедур для обработки информации и ее хранения (см., например, работу [96]).

Возможно, следует особо подчеркнуть, что, если мы стремимся к наиболее эффективной и вместе с тем наиболее простой процедуре, необходимо заранее планировать всю программу — от точного определения цели действий, способа сбора информации, ее обработки и анализа наблюдений до определения формы ответов на поставленные вопросы. Чем более мощна обрабатывающая установка, тем более становится необходимым, чтобы было заранее известно, как обрабатывать информацию, т. е. надо перевести ее на язык, подходящий для устройства, на котором информация будет обрабатываться. Сейчас достаточно ясно, что, если мы хотим, чтобы исследование было эффективным, приходится исключительно глубоко продумывать проект современного научного исследования, обычно требующего нескольких специалистов разного профиля.

Часто еще можно услышать утверждение, что, мол, исследования в науках о Земле не могут быть выражены количественно из-за сложности проблем и большого количества переменных, которые надо изучить; но современные программы обработки информации предназначены именно для проблем такого рода; на современном этапе развития науки сомнений по этому поводу уже не может быть.

12.5. АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ В НАУКАХ О ЗЕМЛЕ

Попытки выражать результаты наблюдений количественно в общем сводятся к представлению этих результатов в виде цифр. Подобный процесс может быть определен как процедура замены наблюдений некоторыми символами или цифрами по определенным правилам. Множество возможных способов такого замещения зависит от принятых правил; эта сфера науки привлекает к себе все возрастающее внимание [50, 413, 416, 384]. В общем можно сказать, что процесс свертывания информации, начинающийся с классификации и ведущий ко все более и более дробным подразделениям, является процессом количественного представления результатов наблюдений [197]. Из определения этого процесса, как процесса перевода наблюдений на язык символов в соответствии с определенными правилами, следует, что эти правила и будут определять ценность принятых символов. Если правило рассчитано на случайные и бессистемные наблюдения, результирующие символы окажутся не более чем ярлыками, и весь процесс их обработки даст очень немного информации. С другой стороны, если выбранные правила привели к такому отображению наблюдений числами, при котором результирующие числа структурно изоморфны арифметике, проблема свертывания информации упрощается; для анализирования такой информации разработаны весьма эффективные процедуры. Этот непрерывный ряд процедур, предназначенных для выражения информации языком цифр и символов, обычно подразделяется на четыре группы, которые принято называть шкалами: номинальной, порядковой, интервальной и шкалой отношения (табл. 12.3).

Таблица 12.3

Шкалы измерений ([413], данные упрощены)

Шкала [1]	Основные эмпирические операции [1]	Математическая структура	Допустимые статистики	Примеры шкал
Номинальная	Отождествление	Группа подстановок $x' = f(X)$; $f(X)$ означает любую взаимооднозначную подстановку	Множество подсчетов; мода; сопряженность признаков, корреляционная независимость	Подсчеты частоты распространения минералов, типы пород и другие признаки; поверхностные структуры
Ординальная	Определение того, что «больше» или «меньше»	Изотопическая группа $x' = f(X)$, где $f(X)$ — любая монотонно возрастающая функция	Медиана; ранг; процентили; корреляция	Шкала твердости Мооса; содержание тяжелой фракции; упорядоченные данные; стратиграфическая шкала
Интервальная	Определение тождественности или различий поинтервально	Полная линейная группа $x' = BX + a$	Среднее; стандартное отклонение. Ранговые соотношения; корреляция смешанных моментов. ϕ или логарифмическая шкала	Температурная шкала; сферичность, окатанность, шкала по изотопам кислорода; шкала «абсолютного» времени
Отношений	Отождествление отношений	Однородная группа $x' = ax$	Коэффициенты изменчивости. Среднее геометрическое	Миллиметры, граммы, миллилитры, градусы по Кельвину

[1] Эти шкалы не имеют между собой резких границ и операции по ним совмещаются.

При номинальной системе исчисления наблюдения фиксируются в виде символов, каждый из которых обозначает класс; при этом требуется, чтобы правила классифицирования давали классы неотличимости, взаимно исключающие друг друга, т. е. чтобы каждое наблюдение могло быть отнесено к какому-то одному классу. Следует помнить требование эквивалентности: критерии отнесения каждого наблюдения к некоторому классу должны быть в равной мере применимыми к наблюдениям любого другого класса. Например, если каждый член некоторого коллектива исследователей написал письмо и каждое письмо приписывается одному и только одному члену этого коллектива, исчисление является номинальным. Каждый класс состоит только из одного элемента и все классы эквивалентны; никакого упорядочения здесь нет. Многие классификации в области наук о Земле выполнены именно на этом уровне, например, разделение изверженных горных пород на граниты, сиениты, диориты и т. д. Классификация ископаемых организмов на виды также является примером номинального исчисления (см. также табл. 9.1.).

Требование эквивалентности для номинального исчисления может быть сведено к рефлексивности ($a = a$ для всех a), симметричности (если $a = b$, то $b = a$) и транзитивности (если $a = b$, $b = c$, то $a = c$). Надо отметить, что критерии, удовлетворяющие этим требованиям, могут быть простыми, например, при классификации штуфов пород при макроскопическом их исследовании; или сложными — при определении глинистых минералов с помощью полных оптических, рентгеноструктурных и химических анализов. Процедуры, которые приводят к номинальному исчислению, представляют собой процедуры диагноза классов и издавна применяются в практике естественнонаучных исследований. Один из примеров, приведенный в разделе 9.1, иллюстрирует образование классов элементов при количественно-минералогическом анализе с точечным подсчетом.

В общем процедуры идентификации, или диагноза, связаны с подсчетом частот в каждом классе. Эти процедуры подсчета, которые во многих случаях оказываются весьма сходными, в поле зрения естествоиспытателей попали относительно поздно.

Классы можно образовывать также и в том случае, если отображением наблюдений в виде символов помимо свойства эквивалентности удается достичь и таких свойств, как иррефлексивность, асимметричность и транзитивность. Иррефлексивность: $a \neq a$ для всех a; асимметричность: если $a > b$, то $b \not> a$; транзитивность: если $a > b$, а $b > c$, то $a > c$. Символу $>$ можно придавать такие значения, как «крупнее, чем...», «грубее, чем...», «тверже, чем...», «предпочтительнее...» и т. п. Выполнение этих требований приводит к отображению в порядковой шкале.

Полевые наблюдения часто представляются именно в символах порядковой шкалы; например, когда породы разделяются на фенеритовые, афанитовые, стекловатые или на гравийные, песчаные и глинистые. Важно отметить, что песчаники, известняки и глинистые сланцы представлены как совершенно неупорядоченные или лишь частично упорядоченные классы номинальной шкалы.

Типичные примеры порядкового расчленения — шкала твердости Мооса и номограммы по сравнительному определению частот распределения акцессорных материалов.

Использование оптического рельефа поверхности минералов вместо показателя преломления при изучении шлифов является примером замены шкалы более высокого уровня порядковыми измерениями. Порядковой шкалой мы действуем при визуальном сравнении свойств пород и окаменелостей с эталонными таблицами; сами же эталоны устанавливаются по шкале более высокого уровня. Визуальное определение сферичности и окатанности — примеры таких процедур; другие примеры порядковых измерений — сравнение осадочных пород по размерам их зерен или по цвету.

В порядковой шкале интервалы между классами не фиксируются; например, нельзя считать, что алмаз, твердость которого по шкале Мооса 10, вдвое тверже апатита, имеющего твердость 5, и т. п. В результате анализ по таким данным ограничен процедурами упорядочения, ранжирования. В частности, так называемые порядковые статистики — квартили и квантили — являются подходящими результирующими статистиками для обработки измерений именно порядкового типа. Следовало бы, пожалуй, подчеркнуть и то, что, если информация имеет порядковый характер, использование параметрической статистики не оправдано, ибо параметрические процедуры требуют данных, полученных при измерениях более высокого уровня. Возможно и обратное: если уровень метрики выше порядкового, применение порядковых статистических процедур ведет к потере информации.

Если данные получены на порядковом уровне и интервалы шкалы определены, шкала относится к интервальному рангу; место нуля и единица шкалы при этом произвольны. Трансформация одной шкалы в другую может быть выполнена как увеличением количества измерений, так и добавлением новых констант. Типичный пример интервального уровня измерений — температурные шкалы Фаренгейта и Цельсия. Переход от одной к другой осуществляется путем умножения с добавлением постоянной, т. е.

$$^{\circ}F = \frac{9}{5}\,^{\circ}C + 32.$$

Для интервальной шкалы характерно, что различия между единицами шкалы постоянны. Когда, например, измеряются сферичность и окатанность по Уоделлу, измерения осуществляются по интервальной шкале, но при визуальной оценке этих параметров с помощью стандартов мы применяем порядковую шкалу (гл. 6). Польза от повышения информационного уровня

при переходе от порядковой шкалы к интервальной состоит в возможности применить параметрический статистический анализ.

Содержание элементов-примесей, определенных спектральным анализом, и содержание изотопов с произвольным положением точки отсчета [1] на шкале [4] и фиксированными интервалами измерений, возможно, даются на интервальной шкале.

Наконец, если применяемая шкала обладает всеми качествами интервальной и вместе с тем имеет фиксированную точку отсчета, ее информационный уровень можно рассматривать как уровень шкалы отношений. Перейти к ней без изменения информационного уровня можно только путем умножения на постоянную величину. Измерения размеров зерен, объемной плотности, емкостей и т. д., т. е. измерения, проводимые непосредственным способом, приводят к уровню шкалы отношений.

Интересно заметить, что переход к логарифмической шкале, определяемый как взаимно однозначное преобразование шкалы отношений в ее логарифмический эквивалент, по-видимому, совершается с потерей информации, ибо простым умножением осуществить такую трансформацию нельзя и место нуля здесь отчасти произвольно.

В качестве представительных статистических критериев с данными шкалы отношений могут быть использованы как геометрическое среднее, так и коэффициент изменчивости; однако при переводе шкалы отношений в шкалу логарифмическую, надо учитывать, что среднее арифметическое логарифмов соответствует среднему геометрическому исходных данных. Коэффициент изменчивости (CV), который выражает отношение стандартного отклонения к среднему в процентах, представляется в виде

$$CV\% = \frac{\hat{\sigma}}{\bar{X}} 100;$$

и если первичные наблюдения дают среднее в диапазоне единицы, то значение CV на логарифмической шкале будет стремиться к бесконечности (см., например, сортировку по размерам на фиг. 15.3 и работу [122]). При работе с трансформированными данными необходимы некоторые навыки для проверки возможных искажений информации.

Кемпбелл [50] подразделил измерения, выполненные на шкале отношений, на основные и производные. Для определения последних требуется знать основные определения. Так, если определена мощность каждого из двух пластов, их суммарную мощность получают сложением двух цифр; сумма от сложения будет точно соответствовать мощности обоих пластов. Если же слить в один сосуд два объема жидкостей с плотностью 3,00, будет двойной объем, но плотность останется 3,00; получается, что $3 + 3 = 3$. Таким образом, непосредственные измерения основных свойств производятся по шкале отношений и отображение наблюдений числами структурно изоморфно арифметике, т. е. сохраняется свойство аддитивности. Измерения же производных свойств, несмотря на то что они тоже выполняются по шкале отношений, могут тем не менее быть ограниченными в отношении действий с ними. Если при изучении формы зерен используются факторы производного типа, такие, как сферичность и величина Зинга, то результаты получаются менее информативными, чем при непосредственных «сырых» измерениях осей зерен. Даже ϕ-преобразования могут привести к некоторой потере информации, так что применять подобные преобразования надо осторожно, с учетом их преимуществ и слабых сторон.

Теория измерений в какой-то степени сходна для всех экспериментов; с ее основами можно ознакомиться по работам [50, 70, 173, 398, 413].

---

[1] Что эквивалентно положению «не обнаружено».

12.6. ВЫБОР СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

Мы проводим эксперименты с целью увеличить информацию о некотором определенном объекте. При этом обычно бывает собрано относительно небольшое количество наблюдений, рассматриваемых в качестве представителей гораздо большей выборки, чем можно было бы собрать. Иными словами, эта *выборка* собранной информации обычно используется для отражения характеристик более обширной *совокупности*, которую, как это предполагается, данная выборка некоторым образом представляет. Статистическим анализом в общем пользуются для достижения именно этой цели; среднее арифметическое, например, может быть найдено по любому набору данных; но оно может быть использовано и в качестве основы для логической индукции от выборки к генеральной совокупности, если только это среднее действительно является представительным. Если распределение данных представлено в виде двух симметричных частотных кривых — колоколообразной унимодальной и U-образной, то среднее арифметическое может быть подсчитано по любой из них; но когда это же среднее используется в физическом смысле, следует хорошенько убедиться, что распределение выражено колоколообразной, а не U-образной кривой. Другими словами, очень важно знать характер функции распределения случайной величины. Не все статистики подходят для того или иного вида анализа, поэтому необходимо получить такие критерии, которые бы могли внушить уверенность в разумных результатах последующих аналитических операций.

Описание характеристик некоторых наиболее распространенных функций распределения дается в гл. 13 и 14, выбору же наиболее подходящих из этих функций могут помочь некоторые рекомендации по статистическим критериям. Вполне понятно, что новичок в статистике теряется в обилии «статистик», которые предстают перед его выбором [133, 214, 248, 250]. Вот тут руководство для отыскания наиболее эффективных процедур и может помочь ему отбросить наименее подходящие. Во многих случаях уже по самому характеру наблюдений, выражаемому, в частности, уровнем измерений, можно определить тип аналитических процедур, что упрощает их выбор. Часто, однако, мы не знаем заранее, какие измерения будут получены. Поэтому крайне необходимо хорошо представить, сколько ловушек может встретиться на пути применения некоторых внешне безобидных процедур, которые могут привести даже к противоречивым результатам. Надо сказать, что в лучших руководствах по статистике уделяется значительное внимание тем правилам и процедурам, которые позволяют сравнивать между собой различные статистические операции. Не приходится сомневаться в том, что сведения о функциях распределения представляют наибольшую ценность, а предположение о нормальности распределения или о непосредственном или последующем преобразовании случайной переменной является одним из наиболее распространенных и наиболее важных этапов анализа. Действительно, согласен или не согласен исследователь с данной процедурой, основания для любой оценки определяются путем сравнения именно с нормальным распределением.

Термин *наилучший статистический показатель* можно определить через характеристики несмещенности, состоятельности, эффективности и достаточности. Если статистики предназначаются для индуктивного заключения о свойствах совокупности по свойствам выборки, то должна быть и формула оценки их соответствия параметрам совокупности. Если критерий выборки с той или иной вероятностью сходится [27] к подходящему параметру популяции, он в общем оказывается несмещенным и состоятельным. Статистическая оценка может в пределе стремиться к некоторому фиксированному значению, которое отличается от истинного значения рассматриваемого параметра; в этом случае статистика является состоятельной, но смещенной.

Рассмотрим дисперсию нормальной совокупности σ^2. Если по ряду небольших выборок вычислены оценки этой дисперсии s^2 по формуле

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}, \tag{12.1}$$

где $\Sigma (X_i - \overline{X}^2)$ — сумма квадратичных отклонений от среднего по выборке $\overline{X}$, а n — количество наблюдений в выборке, то эта оценка состоятельна, т. е. она статистически сходится к некоторому фиксированному значению. Однако это значение не совпадает с дисперсией σ^2, которое находят по формуле

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2}{N}. \tag{12.2}$$

Иначе говоря, величина s^2 состоятельна, но в условиях малых выборок — это смещенная оценка для σ^2. Это смещение (систематическая ошибка) поддается определению (см. раздел 16.9); наилучшая оценка для σ^2, обозначаемая как $\hat{\sigma}^2$, вычисляется по формуле

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}. \tag{12.3}$$

При малых выборках эта оценка $\hat{\sigma}^2$ для σ^2 не смещена и состоятельна. Смещение равно $n/n - 1$, что можно исправить путем умножения значения s^2 на $n/n - 1$, чтобы получить величину $\hat{\sigma}^2$.

По мере того как выборки увеличиваются в объеме, $n - 1$ приближается к n, и в результате величина s^2 становится также практически несмещенной и состоятельной, чем объясняется большое значение малых выборок в вышеописанных оценочных процедурах.

Может быть несколько несмещенных состоятельных оценок, тогда тем более необходимы критерии для отбора «наилучших» из них. Каждая оценка характеризуется своей дисперсией относительно оцениваемого параметра, и «наилучшей» оценкой является та, которая при данном числе наблюдений обладает наименьшей дисперсией. Такая оценка называется *эффективной.*

Таким образом, размах выборки и выборочную дисперсию можно использовать как оценки для неизвестной дисперсии нормальной совокупности, но размах значительно менее пригоден.

Почему же используют выборочную дисперсию?

Установлено, что по мере возрастания объема выборки дисперсия выборочного размаха быстро стабилизируется, в то время как выборочная дисперсия продолжает улучшаться.

Следовательно, выборочная дисперсия является эффективной оценкой по сравнению с размахом выборки. Простота подсчетов здесь может в какой-то степени возместить потери информации, насколько это позволяет объем выборки. Понятие эффективности иллюстрирует сравнение выборочного среднего с медианой выборки, как оценок среднего значения совокупности с нормальным распределением [96]. Отметим, что, если медиана требует 1000 наблюдений, для равноценной точности оценки по выборочному среднему требуется 640 наблюдений.

В заключение можно сказать, что вообще может иметься множество несмещенных, состоятельных и эффективных статистик и наиболее желательно использовать те, которые, помимо всего, будут достаточными [127]. Итак, при нормальном распределении случайной величины выборочное среднее является достаточной оценкой среднего всей совокупности и никакая

другая статистическая оценка не в состоянии дополнительно осветить параметр сдвига. Наилучшая оценка $\hat{\sigma}^2$ в равной мере достаточна в том отношении, что никакая другая оценка ничего не добавит к информации о дисперсии распределения. К сожалению, оценок, обладающих свойством достаточности, немного; однако среднее арифметическое полностью отвечает требованиям достаточности при нормальном или при пуассоновом распределении. Большинство других оценок, таких, как медиана или квартиль, по сравнению с подходящими оценками при нормальном распределении не эффективно [96, 291]. Разумеется, никакие сравнения делать нельзя, пока функция плотности вероятности точно не определится, так что во многих случаях невозможно решить, какую из предлагаемых статистик можно считать подходящей для оценивания. В общем рекомендуем отбирать те статистики, которые удовлетворяют вышеприведенным требованиям «самой лучшей» или по крайней мере тем требованиям, которые могут быть предъявлены в каком-то данном случае. Возможно, что именно в этом крайнем случае особо потребуются свойства состоятельности и несмещенности.

Общие рекомендации, следующие из сказанного, заключаются в том, что знать вид функции распределения необходимо во всех случаях и что без такой информации делать какие-либо правдоподобные заключения невозможно. Большинство методов, рекомендуемых в этой книге, при соответственном их использовании дает возможность получить достаточные сведения о функции распределения, применить весь набор описанных оценок и уверенно использовать статистический анализ даже в самом сложном виде. Чем меньше известно о функции распределения случайной величины, тем труднее достигнуть надежных выводов и решений геологических проблем: в этом смысле «непараметрические», или «порядковые», статистики следует рассматривать лишь как временные заменители более надежного анализа, и к заключениям, основанным на подобных критериях, следует относиться весьма осторожно.

ГЛАВА 13

Плотность распределения. Нормальное распределение

Говорят, что случайная величина распределена нормально, если она принимает любые значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ с частотами, которые подчиняются определенному математическому закону, а именно: логарифм частоты, соответствующей любому расстоянию от центра распределения, меньше логарифма частоты, соответствующей центру, на величину, пропорциональную величине d^2.

R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, 10ht ed., Oliver and Boyd, Ltd., p. 43, 1948

13.1. ВВЕДЕНИЕ

Функция распределения играет главную роль при статистической обработке данных, полезность которых может рассматриваться с различных точек зрения. Обычно распределение изображается в виде наглядных графиков. При этом статистические результаты, видимо, легче понять, если воспринимать их как «облик» распределения.

Если известно, что некоторый экспериментальный процесс характеризуется определенным типом распределения, то сравнение наблюдаемых данных с данными экспериментального опробования составляет проверку случайности отбора наблюдений.

Помимо аспектов, относящихся к физической интерпретации распределения, последние можно специально использовать и для формулировки основных правил статистического анализа; знание вида распределения позволяет предсказать выборочное распределение определенной оценки, например выборочного среднего и дисперсии при нормальном распределении. Это в свою очередь приводит к задачам проверки гипотез и проблемам оценки неизвестных параметров по статистической выборке.

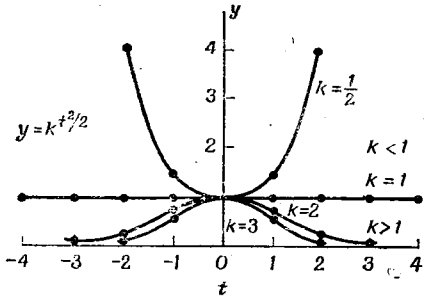
Совокупность наблюдений нельзя использовать для определенных специфических видов анализа без перехода к новой шкале, и в таких случаях для выбора надлежащего способа трансформации данных необходимо знать вид распределения (гл. 15).

Цель последующего изложения — кратко описать некоторые из обычных видов распределений, которые фиксируются экспериментально; без знания свойств этих распределений нельзя описать выборочные ситуации, возникающие как при физических опытах, так и при статистическом анализе. Следует помнить, что одно и то же распределение можно использовать при решении разных задач, поэтому всегда необходимо установить цель анализа, если мы хотим достичь ясности и понимания.

13.2. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Нормальное, или гауссово, распределение случайных величин (*распределение ошибок*) наиболее распространено и широко применяется среди различных видов распределений.

Это одна из наиболее ранних статистических закономерностей, впервые использованная Муавром примерно в 1758 г. [441], играет значительную роль в *теории ошибок* [26]. Нормальное распределение часто используется как физическая модель, оно является главным видом распределения в параметрическом статистическом анализе. Его обычно используют также в качестве эталона при сравнении непараметрических критериев для характеристики мощности и эффективности.



Фиг. 13.1. Графическое изображение функции $y = k^{-t^2/2}$.

Рассмотрим семейство кривых

$$y = \frac{1}{k^{t^2/2}} = k^{-t^2/2}, \qquad (13.1)$$

где k — постоянная, а y и t — переменные. Примем $k = 1$, тогда кривая будет представлять собой прямую, параллельную оси t (фиг. 13.1). При $k < 1$ кривая U-образна с перегибом, находящимся выше уровня $y = 1$. При $k > 1$ она принимает колоколообразную форму, как это показано на фиг. 13.1.

Обычно постоянная k выбирается такой, чтобы получилась кривая, ограничивающая площадь, равную единице; этому условию удовлетворяет $k = 1{,}0872$. Форма постоянной k определяется как $(1/\sqrt{2\pi})\,e$, где e — основание натуральных логарифмов, а π — постоянная.

Формула для кривой распределения, таким образом, приобретает вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}; \qquad (13.2)$$

она называется стандартной нормальной кривой. Этой формулой принято выражать нормальную плотность распределения, но прежде надо произвести замещение, т. е.

$$t = \frac{X - \mu}{\sigma}, \qquad (13.3)$$

откуда

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]. \qquad (13.4)$$

Параметрами нормальных распределений, по которым их можно различать, является среднее μ и стандартное отклонение σ. Если задана некоторая частная нормальная кривая, то μ и σ фиксированы, а изменения y в зависимости от X можно изучать. Площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице. Таким образом, каждое приращение площади представляет некоторое отношение. Очень важны площади, ограниченные разными ординатами. К сожалению, правая часть приведенного выражения не может быть проинтегрирована в данной его форме, и площади, лежащие между заданными ординатами, находят с помощью приближенных методов.

Значения площадей между заданными ординатами нормального распределения табулированы и для удобства приведены в соответствие со стандартной нормальной кривой.

Для примера предположим, что получена некоторая кривая нормального распределения с $\mu = 10$ и $\sigma = 5$. Тогда подстановкой $t = (X - \mu)/\sigma = (X - 10)/5$ функция распределения

$$y = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-10}{5}\right)^2\right] \tag{13.5}$$

приводится к виду

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{t^2}{2}, \tag{13.6}$$

где $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Подобная подстановка применяется для всех нормальных кривых, использующих приближенные значения μ и σ; независимой переменной таблиц соответствуют x/σ, где $x = X - \mu$. Таким образом, одна таблица дает информацию о площадях для всех нормальных кривых (см., например, [15, табл. 10; 323, табл. 1]).

13.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Кривая плотности вероятности нормального распределения симметрична по отношению к среднему (фиг. 13.1); площадь, ограниченная этой кривой и ординатой в точке X, равна частоте, т. е.

$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]. \tag{13.7}$$

В случае стандартного нормального распределения площадь, ограниченная кривой, равна единице.

Формы, или виды, частотных кривых описываются по-разному; одним из наиболее распространенных способов представления этих кривых является метод моментов и переход к бета-статистикам Пирсона [111], которые можно применять к разнообразным частотным кривым.

В случае нормального распределения основными параметрами, базирующимися на моментах, являются следующие:

Таблица 13.1

Параметр		Соответствующий момент, порядок
Площадь	1	Нулевой
Среднее	μ	Первый
Стандартное отклонение	σ	Второй
Асимметрия [1]	$\sqrt{\beta_1} = 0$	Третий
Эксцесс [1]	$\beta_2 = 3$	Четвертый

[1] Существует множество различных мер асимметрии и эксцесса, например, такие, как g-статистика Фишера, базирующаяся на семиинварианте k_i, которая весьма полезна [127].

Площадь, ограниченная кривой нормального распределения, есть момент нулевого порядка.

13.4. УСЛОВИЯ, ПРИВОДЯЩИЕ К НОРМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Использование кривой плотности распределения в качестве физической модели некоторой экспериментальной выборки требует знания тех условий, которые приводят к нормальному распределению.

Проще всего, видимо, начать с требований для симметричного биномиального распределения [1]:

[1] Эти условия детально изучены Смитом и Дунканом [407].

1. Если отсутствуют определенные «причины» изменчивости или же в случае полного взаимного уравновешивания этих причин, в выборке может быть зафиксировано некоторое центральное значение.

2. Отклонения фактических значений случайных величин от этого центрального значения происходят в результате определенных причин; эффект действия какой-либо причины заключается или в определенном увеличении, или в таком же уменьшении значения случайной величины (по сравнению с уже фиксированным центральным значением).

3. Вероятность того, что причина изменчивости даст положительный эффект, равна вероятности появления отрицательного эффекта:

$$P(+ve) = P(-ve) = \frac{1}{2}.$$

4. Причины, содействующие изменениям в одном направлении, в равной мере и с равной интенсивностью действуют во всех направлениях.

5. Причины изменений независимы в своем действии; вероятность $P(+ve)$ или $P(-ve)$ для любого причинного фактора независима от первоначальных условий.

6. Суммарное отклонение любого замера от центрального значения получается как алгебраическая сумма влияния всех положительно и отрицательно действующих отдельных факторов.

Кроме того, следует прибавить, что кривая нормального распределения будет получена, когда:

7. Количество действующих причин очень велико.

8. Положительный или отрицательный эффект действия каждой причины очень мал.

Фактически многие из перечисленных требований можно ослабить, так как нормальное распределение возникает при весьма общих условиях. Наиболее важны условия требований 6, 7, 8 и, видимо, 4. Если будут соблюдены условия 6, 7, 8, то условия 2 и 3 могут оказаться менее существенными. Если изучаемая случайная величина удовлетворяет этим требованиям, плотность ее распределения можно рассматривать как нормальную и в качестве основы для анализа выборок, получаемых при экспериментальном исследовании, использовать нормальную модель.

13.5. СВЯЗЬ ВЫБОРОЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМИ

Одно из первых требований для применения нормальной модели — необходимость испытать, можно ли данный набор наблюдений, представляющий выборку, считать взятым из совокупности, обладающей нормальным распределением. Процедура проверки начинается с определения выборочных статистик среднего $\overline{X}$, стандартного отклонения $\hat{\sigma}$, асимметрии $\sqrt{b}$ или g_1, эксцесса b_2 или g_2.

Если наблюдения составляют случайные выборки из нормально распределенной совокупности, то среднее $\overline{X}$ является оценкой для неизвестного среднего μ всей совокупности, а выборочное стандартное отклонение $\hat{\sigma}$ можно использовать как оценку для σ. Процедура приведения выборочного распределения кривой к стандартной форме заключается в вычитании среднего из значения каждого наблюдения и в нормировании отклонения $X - \mu$ делением его на оценку стандартного отклонения $\hat{\sigma}$. При этом обычно используется нормальное распределение отклонений со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице, и результат выражается переменной Z [96].

На практике наблюдения разносят по интервалам группировки, затем находят площади между границами интервалов, для чего границы центри-

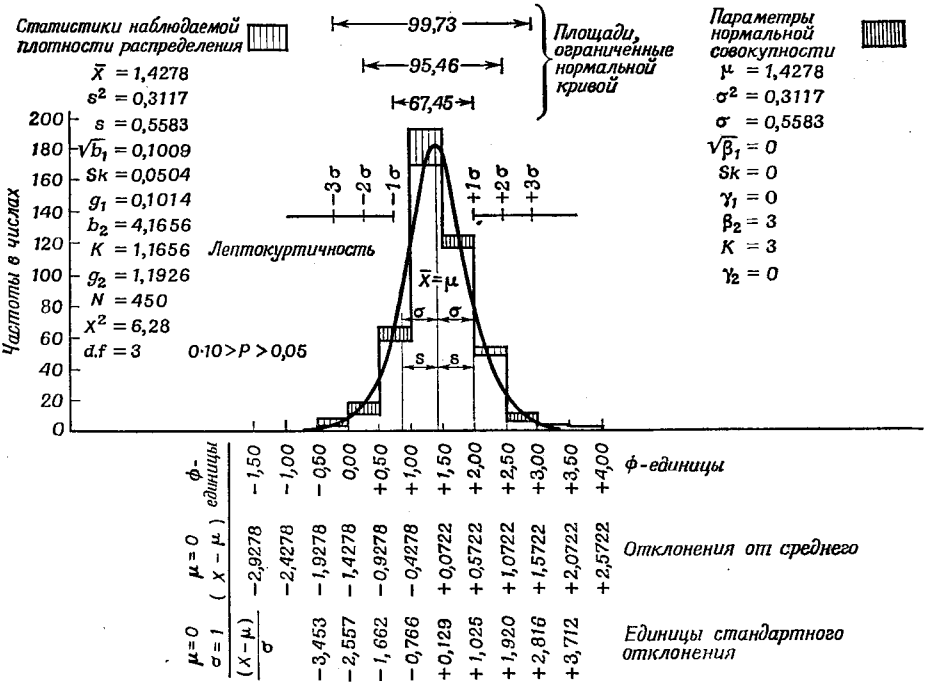
руют средним и нормируют стандартным отклонением, как это показано в столбиках 1—3 табл. 13.2 и на фиг. 13.2.

Таблица 13.2

Согласование нормального распределения с системой замеров коротких осей кварцевых зерен (*c*) из кварцитов Хомвуд

Границы классов (от — до)		$x = X - \mu$	x/σ	Площадь $+\infty - x/\sigma$	Разность	Ожидаемые $\times N = \times 450$	Наблюдаемые
1		2	3	4	5	6	7
$-\infty$	$-0,5$	$-1,9278$	$-3,453$	0,49966	0,00034	0,14	
$-0,50$	0,0	$-1,4278$	$-2,577$	0,4948	0,0049	2,21	6
0,00	0,50	$-0,9278$	$-1,662$	0,4515	0,0433	19,49	12
0,50	1,00	$-0,4278$	$-0,766$	0,2794	0,1721	77,45	59
1,00	1,50	$+0,0722$	$+0,129$	0,0517	0,3311	149,00	191
1,50	2,00	$+0,5722$	$+1,025$	0,3485	0,2968	133,56	117
2,00	2,50	$+1,0722$	$+1,920$	0,4726	0,1241	55,85	55
2,50	3,00	$+1,5722$	$+2,816$	0,4976	0,0250	11,25	7
3,00	3,50	$+2,0722$	$+3,712$	0,4999	0,0023	1,04	2
3,50	$+\infty$				0,0001	0,05	1
Сумма					1,0000	450,04	450

Нормированное отклонение, приведенное в столбике 3, можно затем использовать для отыскания площади, заключенной между соответствующей границей класса и минус или плюс бесконечностью в зависимости от конкретной задачи. Для этого пользуются таблицами площадей нормального распределения [15, 323]. В приведенном случае (табл. 13.2) были использованы

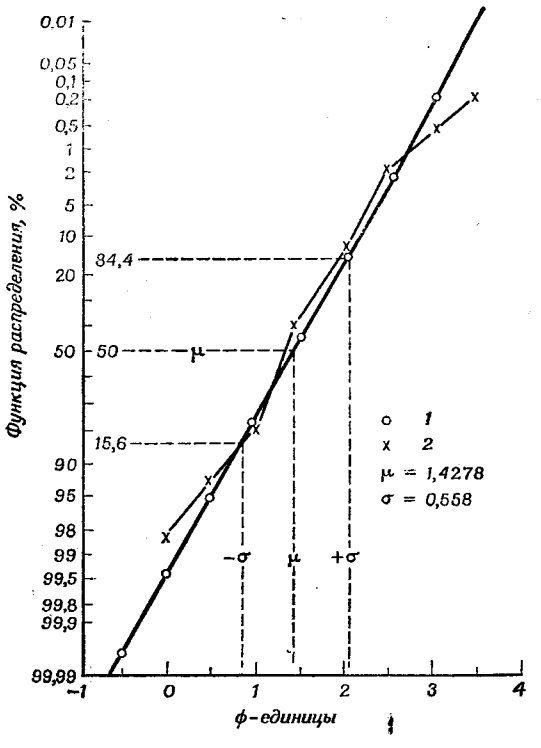


Ф и г. 13.2. Плотность распределения размеров кварцевых зерен в кварцитах Хомвуд; оси *сф*.

таблицы из работы [15], где искомые площади даны в столбике 4. Следует отметить, что вследствие симметричности нормальной кривой в таблицах приводятся значения только половины площадей. Площади находят как разности, перечисляемые в столбике 5; первое значение определяют вычитанием 0,49966 из общей площади (0,5 единицы), ограниченной данной кривой (μ = от 0 до $-\infty$); второе значение — вычитанием, т. е. 0,49966 — 0,4948 = = 0,0049, и т. д., пока не будет достигнуто значение центрального класса, соответствующего значению среднего. Площадь в границах этого класса охватывает площадь от μ до границы отрицательной стороны плюс площадь от μ до границы на положительной стороне, которая равняется 0,2794 + + 0,0517 = 0,3314. Остальные площади находят повторным вычислением разностей.

Общая площадь, представляемая суммой чисел в столбике 5, будет равна единице. Площадь, ограниченную «ожидаемой» кривой, находят затем по столбику 5 умножением на N, равное 450. Наблюдаемые частоты даны в столбике 7 для сравнения. Ожидаемые частоты выражены в виде непрерывной кривой на фиг. 13.2, а выборочные частоты — в виде гистограмм. Показана также избыточность и недостаточность наблюдений сравнительно с ожидаемыми результатами.

Если теоретическое или ожидаемое распределение согласуется с тем, что дали наблюдения, эта непрерывная кривая может рассматриваться и как распределение в совокупности со средним μ и стандартным отклонением σ.



Фиг. 13.3. Функция распределения коротких осей *c* кварцевых зерен кварцита Хомвуд, нанесенная на *ф*-вероятностную бумагу.
1 — ожидаемые; *2* — наблюдаемые.

13.6. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НАБОРА НАБЛЮДЕНИЙ НОРМАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

Качественное сопоставление двух функций распределения может быть сделано с помощью гистограммы, как на фиг. 13.2, но не менее наглядно это можно сделать путем использования вероятностной бумаги. На вероятностной бумаге нормальной кривой эквивалентна прямая линия, а ожидаемая нормальная кривая описывается двумя параметрами — μ и σ. (фиг. 13.3). Тогда наблюдаемое распределение можно наложить на вероятностную бумагу и расхождения между ними легко заметить. На фиг. 13.3 имеется незначительное отклонение от основной тенденции, недостаточность на концах кривой и эксцесс в области больших значений (например, 0ϕ и недостаток в области малых значений, за исключением 2,5ϕ).

Более строгую проверку значимости этих отклонений можно провести с помощью метода моментов или критерия χ^2 (см. раздел 17.4). Эти критерии

не зависят от нормальности распределения; моменты и выводимые из них статистики определяют вид кривой, а критерий χ^2 может быть использован для сравнения отклонений между интервалами группировки. Он пригоден для широкого класса распределений. Использование моментов и критерия χ^2 следует рассматривать как дополнительные процедуры проверки; обе эти процедуры предназначены для изучения отклонений от нормального распределения и каждый вид проверки эффективен только в определенных ситуациях.

Критерий χ^2 описывается в разделе 17.4, а проверка значимости отклонений наблюдаемых значений от ожидаемых (так называемый критерий согласия) для случая измерения распределения длин c-осей (что показано на фиг. 13.2) иллюстрируется на стр. 287 и в табл. 17.2. В общем вычисления, связанные с критерием χ^2, удобно представлять в виде таблицы, в которой должно быть приведено ожидаемое нормальное распределение (табл. 17.1). В рассматриваемом примере будет также использован и метод моментов; при нормальном распределении значения моментов, представленные как меры асимметрии и эксцесса, известны. Для нормального распределения с параметрами $\mu = 1{,}4278$ и $\sigma = 0{,}5583$ они приведены в табл. 13.3 вместе

Таблица 13.3

Теоретические нормальные и наблюдаемые значения параметров и статистик по 450 замерам c-осей кварцевых зерен кварцита Хомвуд (φ-шкала)

Теоретическое	Ожидаемое нормальное	Наблюдаемые выборочные статистики
Среднее	$\mu = 1{,}4278$	$\bar{X} = 1{,}4278$
Дисперсия	$\sigma^2 = 0{,}3117$	$\hat{\sigma}^2 = 0{,}3117$
Стандартное отклонение	$\sigma = 0{,}5583$	$\hat{\sigma} = 0{,}5583$
Асимметрия	$\sqrt{\beta_1} = 0$	$\sqrt{b_1} = 0{,}1009$
Асимметрия	$\gamma_1 = 0$	$g_1 = 0{,}1014$
	$Sk = 0$	$Sk = 0{,}0504$
Эксцесс	$\beta_2 = 3$	$b_2 = 4{,}1656$
	$\gamma_2 = 0$	$g_2 = 1{,}1926$
Эксцесс	$K = 0$	$K = 1{,}1656$

с соответствующими статистическими оценками. Ранее было описано, как находятся выборочные моменты, а затем по моментам можно вычислить g-статистики Фишера относительно предполагаемого среднего n_i, как описано Гриффитсом [176].

Наблюдаемые выборочные значения можно затем проверить по соответствующим им стандартным отклонениям. На практике эту проверку упрощают представлением распределения ожидаемых значений соответствующих параметров по выборке в виде таблиц; например, выборочные распределения b_i относительно соответствующих им значений β_i приводят Пирсон и Хартли [323], а выборочные отклонения g_i от соответствующего им γ_i даны Гриффитсом [176] [1].

В рассматриваемом случае при $n = 450$ 5-процентное значение $\sqrt{b_1}$ равно 0,188, а 1-процентное значение от $\sqrt{b_1}$ равно 0,269 [323]. Так как наблюдаемое значение $\sqrt{b_1}$ равно 0,1009, что менее 5-процентного табличного значения, асимметрия, определенная статистикой $\sqrt{b_1}$, не столь велика, как это можно было бы ожидать в пяти случаях из ста при случайном опробовании некоторого (симметричного) распределения выборкой объемом 450. Следовательно, это значение асимметрии несущественно для отклонений от нор-

[1] См. таблицы, составленные Беннетом и Франклином [27].

мального распределения. Мы можем заключить, что выборочное значение $\sqrt{b_1}$ соответствует оценке $\sqrt{\beta_1} = 0$. Аналогично, если серия из 450 наблюдений является случайной выборкой из нормально распределенной совокупности, в которой $\gamma_1 = 0$, значение g_1, равное 0,22 или больше, может ожидаться в пяти случаях из ста [176]. Здесь также нет данных, которые бы свидетельствовали об отклонениях от симметричного распределения по наблюдаемым g_1.

Теперь можно проверить эксцессивность, используя приближение: если 450 наблюдений представляют собой случайную выборку из нормальной совокупности, то ожидаемые отклонения b_2 от теоретического значения β_2 (или g_2 от γ_2) зафиксированы в соответствующих таблицах. Для такого значения β_2 при $n = 450$, 1-процентный уровень b_2 равен 3,63; наблюдаемое же значение b_2 равно 4,1656, что значительно превышает 3,63. Аналогично ожидаемое по выборке значение g_2 равно 0,45 (приблизительно), в то время как наблюдаемое значение равно 1,193, что опять же значительно. Из этого можно заключить, что выборка имеет распределение, существенно отличающееся от нормального. Если вновь обратиться к фиг. 13.2, где ожидаемые и наблюдаемые значения изображены графически, можно сказать, что здесь действительно имеется существенное отклонение наблюдаемых значений от ожидаемых в центральном классе и по краям кривой, но в целом кривая достаточно симметрична относительно среднего значения.

Небезынтересно заметить, что при сравнении классов и судя по значению критерия χ^2 (см. табл. 17.1) такое отклонение можно ожидать реже, чем один раз на 1000 таких выборок, и что это отклонение отражает влияние эксцесса, превышающего эксцесс теоретического распределения.

Практически пришлось бы определить причину такого отклонения. Можно полагать, что она отражает неслучайность отбора. Неясно, однако, является ли эта неслучайность «естественной» или она вызвана действиями исследователя при отборе зерен для измерений. Такую дилемму следует решить до попытки сделать заключение о геологическом значении наблюдаемого отклонения от нормального распределения.

При относительно небольшом n возможна приближенная проверка g-критерием. Так как ожидаемые значения для γ_1 и γ_2 в нормальном распределении равны нулю, дисперсия выборочных значений g_i относительно соответственных γ_i зависит исключительно от n [127, стр. 75]:

$$\hat{\sigma}_{g_1} = \frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \approx \frac{6}{n};$$

$$\sigma^2_{g_2} = \frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)} \approx \frac{24}{n},$$

где n велико, скажем, более 1000.

Например, значения дисперсий в данном случае будут $\hat{\sigma}_{g_1} = 6/n = 6/450 = 0{,}0133$, $\hat{\sigma}^2_{g_2} = 24/n = 24/450 = 0{,}0533$; тогда $\hat{\sigma}_{g_1} = 0{,}115$ и $\sigma^2_{g_2} = 0{,}231$. Используя отношения $t = (X - \mu)/\sigma$, где $(X - \mu)$ — наблюдаемое значение g, а σ — стандартное отклонение, получаем

$$g_1 = \frac{0{,}1014}{0{,}115} = 0{,}882;$$

$$g_2 = \frac{1{,}1926}{0{,}231} = 5{,}163,$$

из чего следует, что эксцесс является существенным, так как $g_2 = 5{,}2$.

Очевидно, что g_1 незначительно превышает (скажем, в два раза) свое стандартное отклонение, тогда как g_2 значительно больше, чем удвоенное стандартное отклонение. Одно из преимуществ g-критериев в том, что при больших выборках они нормально распределены с соответствующими значениями γ, а площади, ограниченные нормальными кривыми, можно использовать для приближенной оценки их значения [27].

13.7. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальное распределение имеет множество свойств, которые чрезвычайно ценны для экспериментатора, так что во многих случаях стоит потратить время на выбор приемов, приводящих к функции распределения именно такого вида. В дополнение к сказанному о полезности строго определенной процедуры нормальное распределение, установленное однажды, можно использовать следующим образом.

Средние арифметические, полученные по случайным выборкам из нормальной совокупности со средним μ и стандартным отклонением σ, нормально распределены со средним μ и стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{n}$, где n — объем выборки. Это свойство может быть обобщено и строгое требование нормальности распределения может быть несколько ослаблено.

Если случайная величина X распределена со средним μ и стандартным отклонением σ, для которого существует производящая функция моментов, то величина $t = (\bar{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$ распределена приблизительно нормально со средним 0 и дисперсией, равной 1 при бесконечно большом n [198]. Другая форма этого утверждения приводит к неравенству Чебышева и также дает возможность существенно ослабить требования нормальности. Таким образом, если распределение произвольной совокупности имеет среднее μ и конечную дисперсию σ^2, распределение выборочного среднего приближается к нормальному со средним μ и дисперсией σ^2/n по мере возрастания объема выборки [13]. Эта теорема [1] может быть выражена в форме вероятностного утверждения:

$$P(|X-\mu|>\delta\sigma)\leqslant\frac{1}{\delta^2}$$

Иначе говоря, вероятность того, что абсолютное значение отклонения $X - \mu$ превысит в δ раз (δ — некоторая постоянная) стандартное отклонение σ, менее или равна $\frac{1}{\delta^2}$; уменьшая δ, можно контролировать вероятность отклонения.

Таким образом, при нормальном распределении со средним μ и дисперсией σ^2

$$P(|X-\mu|>2\sigma)=0{,}05,$$

поскольку при снижении требований к нормальности и требований к строго ограниченной дисперсии эта формула принимает вид

$$P(|X-\mu|>2\sigma)=\frac{1}{2^2}=0{,}25.$$

Потеря эффективности в этом случае значительна, но чем меньше известно о характере наблюдений, тем больше цена, которой дается их интерпретация.

Упомянутая теорема, приводящая к неравенству Чебышева, практически означает следующее: несмотря на то что случайная величина может быть распределена и не нормально, если она не особо специфический тип, в котором второй момент не конечен, случайные выборки из этой совокупности дадут среднее арифметическое, имеющее тенденцию к нормальному распределению по мере возрастания размеров выборки. По выборке, например равной 50 наблюдениям, в ряде случаев будет получена уверенность, что ее среднее распределено почти нормально [198].

Функция нормального распределения дается в табл. 13.4. Если вместо случайной величины X рассматривается выборочное среднее $\bar{X}$, можно использовать μ и $\sigma/\sqrt{n}$; сузив, таким образом, интервал $\mu + k\,(\sigma/\sqrt{n})$, можно уве-

[1] Центральная предельная теорема, или закон больших чисел.

Таблица 13.4

Площади, ограниченные кривой нормального распределения в определенных границах

Предел	Площадь, %
$\mu \pm \sigma$	67,45
$\mu \pm 2\sigma$	95,45
$\mu \pm 3\sigma$	99,73
$\mu \pm 4\sigma$	99,994

личением n уточнить данные об интервале, в котором лежит $\overline{X}$, настолько, насколько нам это нужно, или по крайней мере насколько возможно.

Рассмотрим распределение медиан на фиг. 5.4. Среднее $\overline{X}$, являющееся оценкой для μ, равно $3{,}34\phi$, а выборочное стандартное отклонение $\hat{\sigma} = 2{,}44$. Тогда, замещая $\overline{X}$ на μ и $\hat{\sigma}$ на σ, можно заключить, что большая часть значений попадает в интервалы, данные в табл. 13.5.

Таблица 13.5

k	$\mu \pm k\sigma$	Медиана, %
1	0,90—5,78	67,45
2	—1,54—8,22	95,45
3	—3,98—10,66	99,994

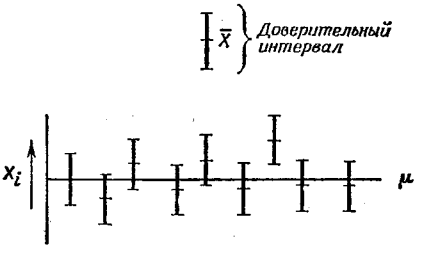
Если мы возьмем выборки и подсчитаем среднее для каждых четырех образцов, то область значений можно будет выразить как $\mu + k\sigma/\sqrt{n}$, что, как известно, позволяет сузить интервал наполовину; увеличением же количества наблюдений, по которым вычисляется среднее, можно будет эффективно уменьшить этот интервал до любых пределов. Стоимость такой процедуры быстро возрастет с увеличением n; так, среднее, вычисленное по выборке объемом $n = 16$, уменьшает интервал только до $^1/_4$ его первоначального значения.

Из другого примера известно, что функция распределения случайной величины X_i, где X_i — сферичность, по Крамбейну, близка к нормальной со средним $\mu = 0{,}75$ и стандартным отклонением $\sigma = 0{,}08$ (см. фиг. 6.13 и соответствующий текст), и мы измеряем сферичность по небольшой выборке, равной всего 16 кварцевым зернам, дающей $\overline{X} = 0{,}68$; когда эта выборка случайна, можно предсказать, что три из 1000 таких проб окажутся в среднем за пределами границ $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$, или $0{,}75 \pm 0{,}06$, или от 0,69 до 0,81. Предыдущие опыты не оставляют сомнений в нормальности распределения, так что неверно именно предположение о случайности распределения. Действительно, мы ожидаем, что естественные процессы сортировки зерен по их форме скорее всего не случайны, так что процесс, обусловивший среднюю сферичность данной выборки, равную 0,68, привел также к скоплению зерен с необычайно низкой сферичностью. Средняя сферичность аркозов равна 0,733 по выборке в 900 проб ($\sqrt{n} = 30$); тогда, используя оценки по большой выборке в качестве параметров совокупности, мы вправе ожидать, что три из 1000 проб будут иметь сферичность за пределами интервала $0{,}75 \pm$ $\pm$ 0,008, или за пределами интервала 0,742—0,758. Следовательно, аркозы

обладают меньшей сферичностью по сравнению с тем, что можно было бы предположить по случайным выборкам такого же объема, отобранным из определенной совокупности проб.

13.8. ПОНЯТИЕ О ДОВЕРИТЕЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Теперь можно использовать характеристики нормального распределения с целью выработать вероятностные суждения о случайной величине в предположении, что она непрерывна. Вероятно, следует подчеркнуть, что по одному эксперименту нельзя ничего утверждать. На последнее мы имеем право только в том случае, когда эксперимент повторен множество раз. Можно использовать следующее свойство нормального распределения: средние значения, полученные по случайным выборкам из нормальной совокупности со средним μ и стандартным отклонением σ, могут сами быть распределены нормально со средним μ и стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{n}$.



Фиг. 13.4. Доверительный интервал и его взаимоотношение с «истинным средним» μ.

По данным таблицы нормального распределения можно утверждать, что 95% этой площади соответствует интервалу $\mu \pm 1{,}96\sigma$; отсюда $\bar{X} - \mu$ попадет в интервал $\mu \pm 1{,}96\sigma/\sqrt{n}$ в среднем в 95% случаев. Выразив это неравенством, получим

$$-\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} < +\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}},$$

или, прибавив $\bar{X}$ к каждой части неравенства,

$$\bar{X} - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Предположим, например, что мы работаем со случайной величиной X_i, которая представляет собой замеры длинных осей кварцевых зерен и выражается их логарифмом. Допустим, что на базе очень большой выборки мы получили практически точную оценку $\sigma = 0{,}5\,\phi$. Выборка в $n = 25$ замеров дала значение среднего, равное $3{,}0\,\phi$. 95-процентный предел доверительной вероятности будет

$$\bar{X} - 1{,}96\,\frac{0{,}5}{5} < \mu < \bar{X} + 1{,}96\,\frac{0{,}5}{5},$$

или

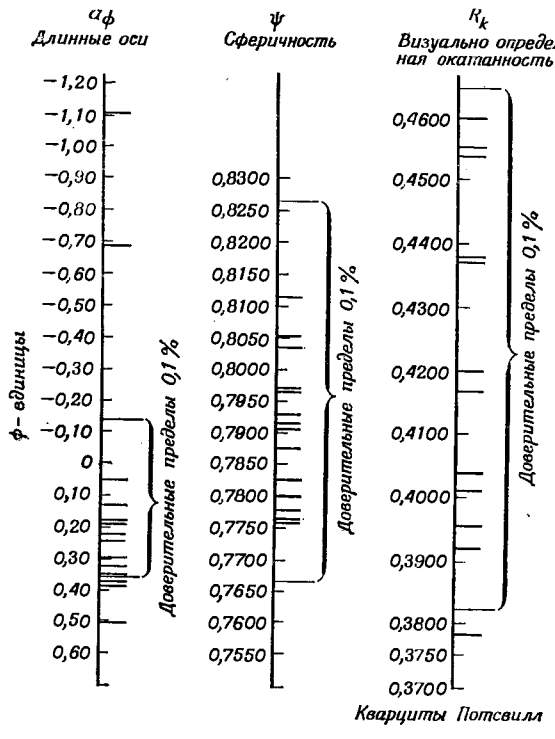
$$3{,}0 - 0{,}1 \times 1{,}96 < \mu < 3{,}0 + 0{,}1 \times 1{,}96;$$

$$2{,}804 < \mu < 3{,}196.$$

Теперь мы ожидаем, что случайная выборка, равная 25 замерам, даст средние, которые окажутся в данном интервале в 95% случаев. Альтернативная форма этого утверждения о доверительном интервале несколько шире раскрывает сущность получаемого вывода. Если взяты случайные выборки по 25 наблюдений каждая и если всякий раз доверительный интервал определяется как указано выше, то в среднем в 95 случаях из 100 этот интервал накроет истинное среднее μ (фиг. 13.4). Любой отдельный доверительный интервал или будет, или не будет содержать истинное значение μ, и вышеприведенное утверждение не будет относиться к какому-либо единичному интервалу; но, если это утверждение сделано по каждому интервалу в отдельности, требования к нему окажутся несостоятельными в среднем в пяти случаях из ста.

13.9. ПРИМЕНЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

Интересный пример использования доверительного интервала дан на фиг. 13.5. Были проведены обширные исследования с целью определения наиболее эффективного способа отбора, что должно было позволить в дальнейшем использовать данные об изменениях размеров и формы кварцевых зерен в кварцитах. Было изучено около 1500 кварцевых зерен из пяти проб, взятых из трех равных частей трех обнажений [169]. Длинные оси зерен измеряли методом Халба [203], и оказалось, что эти величины распределены нормально, или по крайней мере функция их распределения удовлетворяла центральную предельную теорему; следовательно, можно было ожидать, что случайная выборка объемом n окажется в определенных доверительных границах. Так как было взято пять проб из двух обнажений и четыре — из третьего, всего имелось четырнадцать выборок объемом $n = 100$. Наибольшее среднее $0{,}111\,\phi$ являлось оценкой для μ, а доверительный интервал $\bar{X} \pm \hat{\sigma}/\sqrt{n} = \pm 0{,}24$. Когда выборочные средние были нанесены на эту шкалу (фиг. 13.5), пять из четырнадцати попали за пределы этого интервала. Таким образом, предположение о нормальности и (или) о случайности отбора не подтвердились. При более подробном анализе этого эксперимента оказалось, что и пробы были взяты не случайным способом и что функция распределения не являлась нормальной. В том же случае, когда на тех же зернах сферичность устанавливали по Крамбейну, явных противоречий гипотезе случайности отбора и нормальности распределения не было. И еще: несмотря на то что функция распределения визуальных определений окатанности не похожа на нормальную, окатанность тех же кварцевых зерен, выраженная на основании доверительных пределов по отношению к среднему, дает один выход из четырнадцати возможных за пределы этого интервала. Скорее всего такие довольно серьезные отклонения от нормальности опровергнут подобные проблематичные утверждения.



Фиг. 13.5. 99,9-процентный доверительный интервал для выборочных средних кварцевых зерен кварцита Хомвуд.

Другие примеры, в которых основные требования о знании значения величины σ совокупности не столь строги, описаны в разделе 16.3.

13.10. СРАВНЕНИЕ ДВУХ ВЫБОРОЧНЫХ СРЕДНИХ

Единственное значение случайной переменной и среднее по выборке из нормальной совокупности с известными значениями μ и σ уже рассматривались; теперь перейдем к процедуре сравнения двух выборочных средних.

Примем снова, что функция распределения нормальна и что значения μ и σ известны. Пока эти требования ограничены некоторыми пределами, они, во всяком случае приблизительно, выполняются и, вероятно, будут встречаться тем чаще, чем больше новых данных мы будем получать о функции распределения для применения ее при изучении осадочных пород. Эти требования можно ослабить (с незначительной потерей эффективности) за счет использования различных приближений (см. о t-распределении Стьюдента в разделе 16.4).

Итак, предположим, что, проанализировав две выборки, взятые (опять по предположению) из нормальной совокупности, мы хотим найти отличия между двумя полученными средними значениями. Можно рассматривать реальную ситуацию, при которой длинные оси белых кварцевых галек (выраженные в ϕ-единицах) представляют собой случайную величину X_i и два средних значения получены при опробовании обнажения двумя различными способами. Функция распределения величины X_i приближается к нормальной, а соответственными статистическими показателями будут: $\bar{X}_1 = -4{,}887$, $\hat{\sigma}_1 = 0{,}8516$, $n_1 = 336$ — по пробам, взятым послойно, и $\bar{X}_2 = -5{,}682$, $\hat{\sigma}_2 = 0{,}8070$, $n_2 = 300$ — по пробам, взятым беспорядочно. Теперь надо узнать, действительно ли это случайные выборки из некоторой нормальной совокупности.

Сначала выразим среднее как отклонение от среднего по совокупности, т. е. разность между средними $(\bar{X}_1 - \mu) - (\bar{X}_2 - \mu)$. Можно видеть, что μ в данном выражении исчезает, остается $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Если эти средние не различаются, то $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ будет незначимо отличаться от 0; получается, что мы хотим выразить доверительные границы, которые равно удалены от нуля и которые показывают, насколько большим может оказаться различие между случайной величиной из выборки и из нормальной совокупности при $\mu = 0$. Необходимо получить подходящую оценку для стандартного отклонения σ из двух оценок, которыми мы располагаем, а затем преобразовать ее в стандартное отклонение.

Дисперсия этой суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий и ковариации (смешанный второй центральный момент):

$$\sigma^2_{\bar{X}+\bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} \pm 2\rho\sigma_{\bar{X}_1,\,\bar{X}_2}.$$

Если случайный отбор каждой пробы проводился независимо, то $\rho = 0$, а выражение принимает вид

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2},$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1} = \frac{\sigma^2_{X_1}}{n_1} \quad \text{и} \quad \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_2},$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \frac{\sigma^2_{X_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_2},$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \left(\frac{\sigma^2_{X_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{X_2}}{n_2}\right)^{1/2}.$$

Тогда практически мы можем написать, что проверка на различие между двумя средними из одной и той же нормальной совокупности может быть выполнена путем подсчета оценочного критерия

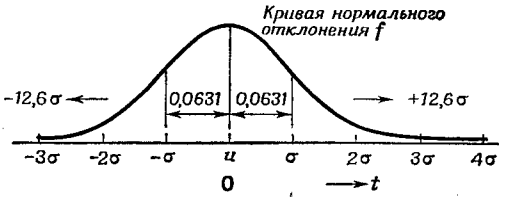
$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{(\sigma^2_{X_1}/n_1 + \sigma^2_{X_2}/n_2)^{1/2}}.$$

В нашем примере

$$t = \frac{-4{,}887-(-5{,}682)}{(0{,}7253/336+0{,}6510/300)^{1/2}} = \frac{0{,}795}{(0{,}002159+0{,}001822)^{1/2}} = \frac{0{,}795}{0{,}0631} = 12{,}6.$$

Если это действительно две случайные выборки из одной и той же нормальной совокупности, такое различие будет в 12,6 раза превышать ее стандартное отклонение, и мы оценим это значение соответственно с данными фиг. 13.6.

Совершенно очевидно, такое значение встречается редко, что мы можем заключить, исходя из наших предположений; действительно, площадь ограничения кривой между $\mu + 12{,}6\sigma_{\bar{X}}$ и $\mu - 12{,}6\sigma_{\bar{X}}$ равна 99,99999999, а вне $\mu \pm 12{,}6\sigma_{\bar{X}}$ — 0,0000000001. Следовательно, можно ожидать, что значения будут выпадать из границ $\pm 12{,}6\sigma_{\bar{X}}$ реже одного раза на каждые 10^{10} испытаний. Одно из двух — либо такое редкое событие весьма необычно, либо



Ф и г. 13.6. График, поясняющий значение $t = 12{,}6$.

мы должны отвергнуть некоторые или даже все наши предположения о случайности данных выборок из нормальной совокупности. Так как известно, что эти выборки образуют одну и ту же генеральную совокупность, а нормальность является адекватной аппроксимацией и что даже значительные отклонения от нее дадут лишь слабый эффект, то опять приходится ставить вопрос о случайности отбора. Более подробно ознакомиться с этой темой читатель может по первоисточнику [169].

Прежде чем мы перейдем к рассмотрению критериев значимости, необходимо сформулировать нулевую гипотезу H_0 и затем определить те следствия, которые возникнут при проведении описанного эксперимента. Затем надо произвести эксперимент и совокупность наблюдения сравнить с теми данными, которые будут продиктованы нулевой гипотезой. Если экспериментальные поиски дадут результат, не сходящийся с гипотезой, мы должны решить — верить ли этому расхождению или отвергнуть гипотезу. Такое решение связано с определенным риском, поэтому результат следует сформулировать в виде вероятностного высказывания. Далее, при экспериментальной проверке гипотеза может быть отвергнута, но, если этого и не произойдет, обратное утверждение будет заключаться лишь в том, что против гипотезы нет возражений. Нулевая гипотеза всегда допускает отклонение, но с некоторыми натяжками. Эксперимент можно считать удачным, если мы можем произвести строгую проверку нулевой гипотезы и в то же время отвергнуть разнообразие обстоятельства.

Планирование эффективных экспериментов, которыми можно действительно испытать любую нулевую гипотезу, требует известного искусства, и, кроме того, оно является довольно спорной процедурой (см. гл. 22). Когда в гипотезе что-нибудь неясно, эта неясность останется и в заключениях, основанных на проверке гипотезы. Одно из наиболее важных требований при использовании статистики заключается в возможности выбрать самый подходящий аналитический аппарат для проверки любой гипотезы; широкая же, общая постановка вопросов приводит к неопределенным, неясным ответам и оказывает весьма плохую услугу там, где требуется точность и строгость формулировки.

13.11. ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если наблюдение X включает суммарный эффект большего количества незначительных причин, действующих случайно, и если каждый эффект независим от X, распределение, вероятно, будет нормальным. Если оно отличается от нормального, мы вправе предполагать неверно замеренное X. Находим, что функция $f(X)$ нормально распределена, и поэтому трансформируем наши наблюдения над X, преобразуя их в наблюдения над $f(X)$ [138].

Логнормальная плотность распределения была предложена в качестве модели множества случайных переменных в науках о Земле для случаев исследований размеров зерен [247, 259, 433], элементов-примесей [5, гл. 4] и полутораграммовых (24 грана) навесок золотой руды [238, 368, 396, 402]; имеется также много примеров, взятых из других областей [6, 138, 227]. В каждом случае можно привести цитату из критических замечаний по поводу этих предложений. Действительно, невозможно доказать без того, чтобы не остались сомнения, что распределение некоторой случайной величины задано в форме некоторой точно определенной функции. Например, когда оспаривались предложения Стьюдента по модели Пуассона [451], он последовательно объяснил, что до тех пор, пока практически невозможно точно отобразить кривую по точкам, модель Пуассона хотя и остается приближенной, тем не менее она представляет определенную ценность. Единственно, чем можно логически оправдать принятие какой-либо функции распределения в качестве модели,— это более быстрым достижением цели с помощью рассматриваемой функции. И в этом смысле следует рекомендовать логнормальное распределение для изучения изменений размеров осадочных частиц. Так как это одно из наиболее ценных и обычных применений, нелишне изучить некоторые детали той процедуры, которая называется *применением функции распределения*.

Обоснование применимости модели функции распределения может следовать тремя путями. Во-первых, можно теоретически постулировать физические условия, характеризующие естественный процесс, который приводит именно к данному распределению случайной величины; затем можно показать, что это распределение удовлетворяет требованиям, которые следуют из некоторой определенной функции. (Пример использования модели Пуассона для повышения качества изготовления микроскопических препаратов для исследования акцессорных минералов описан в разделе 14.7.) Во-вторых (альтернативный путь), с помощью той же модели можно изучить плотность распределения данной случайной величины в относительно большой выборке с последующим показом [при помощи подходящей процедуры, какой, например, является анализ моментов, и (или) с помощью критерия согласия χ^2], как эмпирически установленная функция распределения хорошо согласуется с некоторой уже известной функцией. Трудность достижения такого эмпирического согласования заключается в том, что исследуемая выборка должна быть действительно случайной. Если же отбор данных не случаен, функция распределения может не согласоваться с ожидаемым результатом.

В-третьих, с целью окончательного дедуктивного согласования можно использовать оба указанных пути: подходящая теоретическая модель разрабатывается на основе уже известных данных об изменениях случайной величины; затем прогнозируется выборочное распределение статистических характеристик, которое проверяется путем случайного отбора. Конечно, почти всегда есть возможность так подобрать выборочное расположение, чтобы распределение случайной величины удовлетворяло любым определенным требованиям. Поэтому окончательное согласование в значительной мере зависит от того, действительно ли принятая модель и все данные, связанные с ней, соответствуют наблюдениям. Весь ход рассуждений о нормальной

модели, вызванных классической критикой Пуанкаре ([332], цитирован по работе [138]; на эту работу ссылается любой, кто сомневается в существовании нормального распределения, которое стало к настоящему времени общепризнанным; см., например, [18, 98, 99, 215]),свидетельствует о том. что получить это доказательство действительно трудно, а может быть. и невозможно. Мы же, как последователи Стьюдента, будем придерживаться следующего взгляда: то, к чему мы стремимся, заключается в приближении, которое позволит достичь нашей цели. Но если перед нами встанет лучшая альтернатива, она также должна быть рассмотрена, насколько это возможно и без каких-либо предубеждений.

13.12. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПРИМЕНЕНИИ ЛОГНОРМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ

Измеряя размеры зерен осадочных пород, мы обычно преследуем некоторый конечный результат, который в общем является попыткой определить условия образования осадка по данным о функции распределения этих размеров. Например, предполагается, что размеры зерен отражают скорость течения, и, чтобы установить зависимость между размерами зерен и скоростью течения, надо провести многочисленные и обширные исследования (см., например, работы [141, 308]). Описание зависимости между скоростью течения и размерами частиц обычно основано на идеальных «законах», какими являются, например, закон Стокса и закон столкновений; первый описывает это соотношение для частиц в ламинарном потоке, второй — для грубых частиц и в турбулентном потоке [308]. Оба «закона» могут выражаться линейными зависимостями после логарифмического преобразования, как это показано в табл. 13.6.

Таблица 13.6

Связь между скоростью течения и размером частиц, выраженным через радиусы

V — скорость, *см/сек*; C — константа; r — радиус, *см*

Закон	Зависимость	Логарифмическое выражение зависимости
Стокса	$V = Cr^2$	$\log V = \log C + 2\log r$
Столкновений	$V^2 = Cr$	$2\log V = \log C + \log r$

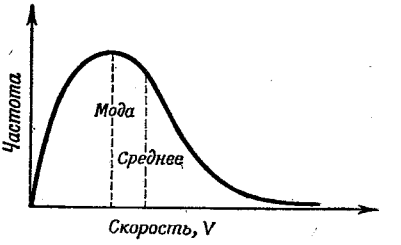
В тех областях, где эти законы действуют, существует прямое взаимно однозначное соответствие между логарифмом скорости и логарифмом радиуса частицы; если радиусы частиц распределены логнормально, так же распределены и их скорости, и наоборот.

Обоснование предположения, согласно которому логнормальная модель зависит от того, насколько реально существование логнормального закона, заключается в описании изменений скорости потока, которые ожидаются в обычных условиях перемещения жидкости. Так как оба закона действуют в ограниченных областях поля возможных взаимоотношений пары «частица — скорость» и так как между этими законами существует переходная область (где частицы сальтируют), данная модель только приблизительно отражает положение дел. Ее ограничения прежде всего зависят от размеров этой переходной области — достаточно ли она узка, чтобы ею можно было пренебречь, при достижении большинства практических целей, т. е. резок ли переход от ламинарного течения к турбулентному в природных условиях

[308]. Если это приемлемо, можно изучать дальнейшие следствия логнормальной модели по данным скоростей и переходить от логарифма скорости обратно к ее значению по первоначальной шкале, наблюдая при этом, что именно «предвещает» результирующая кривая. Пример пользы такой процедуры при изучении размеров зерен приводят Гриффитс и др. [164]. Результирующая кривая для этого случая изображена на фиг. 13.7.

На ней показано, что не существует скорости, равной нулю или менее; разумеется, в естественных условиях иногда прекращается движение потока на какой-то период, но это нельзя рассматривать в качестве обычного состояния движения жидкости. Весьма большие скорости также в природе редки (чем выше скорость, тем реже она встречается).

Когда преобладает скорость меньше средней, кривая сильно скашивается в сторону больших скоростей, что совершенно определенно отражает



Ф и г. 13.7. Гипотетическая плотность распределения скорости в потоке жидкости при естественных условиях.

условия почти всех потоков воды, льда, воздуха, даже условия гравитационного скольжения, и что весьма близко к тем условиям, которые действительно наблюдаются в природе. Для проверки конкретных форм кривой могут быть использованы реальные наблюдения [247, 387].

Таким образом, следует считать, что логнормальная модель распределения скоростей и отсюда логнормальная модель распределения размеров частиц являются достаточно приемлемыми аппроксимациями, исходящими из гипотетических физических условий. Если теперь мы попытаемся исследовать согласованность некоторых видов эмпирического распределения частиц с этими теоретическими предположениями, следует быть осторожными в требованиях к модели. Эти требования необходимо предварительно изучить; к счастью, они исключительно хорошо зафиксированы и ими пользовались во многих ситуациях, аналогичных той, с которой мы имеем дело при изучении размеров частиц (см., например, работы [6, 138, 227]).

Одно из существенных требований заключается в том, что на j-й стадии изменение случайной величины должно выражаться случайной долей от функции $\phi\ (X_{j-1})$, т. е. того значения, которое уже достигнуто; следовательно, следуя Кэптейну [227], Эйтчисону и Брауну [1],

$$X_j - X_{j-1} = \varepsilon_j \phi\ (X_{j-1}), \tag{13.8}$$

где множества $\{\varepsilon_j\}$ взаимно независимы и независимы также от множества $\{X_j\}$. Поэтому изменения на каждой стадии не независимы от достигнутых значений, за исключением тех случаев, когда $\phi\,(X) = 1$ и $\phi\,(X) = 0$. Мы можем выделить характерный случай, когда $\phi\,(X) = X$; изменение этой случайной переменной является случайным соотношением мгновенного (единичного) значения случайной переменной. Закон пропорционального эффекта описывает это взаимоотношение таким образом.

Говорят, что случайная величина, подвергаемая процессу изменений, описывается законом пропорционального эффекта, если ее изменение на любой стадии процесса находится в случайном соотношении с первоначальным значением этой переменной; исходя из сказанного, можно напи-

[1] Нижеприведенные данные взяты из работы [6, стр. 22—23].

сать, что

$$X_j - X_{j-1} = \varepsilon_j X_{j-1}, \tag{13.9}$$

или

$$\frac{X_j - X_{j-1}}{X_{j-1}} = \varepsilon_j. \tag{13.10}$$

Суммировав по всем n значениям данной случайной переменной, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - X_{j-1}}{X_{j-1}} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j; \tag{13.11}$$

предположив, что изменения на каждом шаге достаточно малы,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - X_{j-1}}{X_{j-1}} \approx \int_{X_0}^{X_n} \frac{dX}{X} = [\log X]_{X_0}^{X_n} = \log X_n - \log X_0. \tag{13.12}$$

Возвращаясь к равенству (13.10), имеем

$$\log X_n = \log X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n. \tag{13.13}$$

С учетом дополнительной формы центральной предельной теоремы величина $\log X_n$ распределена приблизительно нормально.

Можно, конечно, обобщив условия, использовать распределения с двумя и более параметрами, но можно также приспособить эту модель для изучения скорости и (что аналогично) плотности распределения размеров частиц. Следовало бы подчеркнуть, что, если мы хотим сделать эту модель достаточно приемлемой, переменная, используемая для измерения размеров частиц, должна отражать только детритные составляющие [1]. Кроме того. почти наверняка придется предположить, что ни состав, ни строение агрегата не оказывают влияния на данные измерений. Иными словами, данная модель применима только к однокомпонентным системам со случайным распределением отклонений. Это помогает улучшить косвенные способы измерений размеров частиц и, возможно, методику изучения шлифов, если материал, подлежащий исследованию, нельзя считать приблизительно мономинеральным и если размеры составляющих однородны. Фактически мы приходим к необходимости фиксировать размеры частиц [и (или) их форму] прямыми способами.

Если мы теперь продолжим изучение способов определять распределение размеров частиц, то найдем, что некоторые распределения являются действительно логнормальными, но что есть много и таких, которые не подчиняются этому правилу. Большое количество последних может появиться из-за неправильного выбора меры частиц вследствие многокомпонентности их материала, как это и бывает в большинстве случаев при изучении осадочных пород. Примеры тому наблюдаются при косвенных измерениях размеров зерен граувакк и аркозов [39, 99]. Но и при почти мономинеральном составе осадков неудача в деле построения нормальной модели может объясняться неслучайностью замеров [215] даже в том случае, когда фактор состава не имеет большого значения, как в этом можно убедиться при изучении многих пляжных и дюнных песков [2].

Если не приняты соответствующие предосторожности для обеспечения случайности выборки, плотность распределения снова существенно отклонится от нормальности [18, 318]. В тех же случаях, когда надлежащий выборочный план определен, а осадок или агрегат монодисперсен, в очень многих видах материала размеры частиц распределены логнормально [188, 189].

[1] Практически закон переноса может быть выражен также в логнормальной форме [116].

[2] Также искусственных смесей [12, 215, 216].

Можно очень просто показать, что даже при всех мерах предосторожности, направленных на сохранение постоянства состава, если выборка не случайна, плотность распределения будет отличаться от логнормальной, в то время как та же совокупность опробования случайным способом при той же процедуре измерения не даст сколько-нибудь заметных отклонений от логнормальности даже при строгом подходе [169, 170].

Некоторые примеры плотности распределения размеров зерен, на которых выполняются требования к рассматриваемой модели, уже описаны (раздел 5.5 и последующие), и пригодность логнормальной модели была доказана. Если мы примем эту модель в качестве подходящей аппроксимации, то можем затем использовать данные о свойствах нормального распределения для предсказания определенных исходов эмпирического анализа и эффективно использовать такие процедуры контроля, как проверка случайности выборки. В действительности, как отмечено выше (стр. 197), мы можем определить заданную модель функции распределения как соответствующую некоторому теоретическому, случайному процессу опробования и определить по смещению, обнаруженному в результате эмпирических измерений, характер изменчивости в данной совокупности, т. е. определить структуру материала путем опробования.

В случайных выборках, имеющих нормальную функцию распределения, среднее не зависит от дисперсии, и можно постулировать на основании этой гипотезы, что не должно быть взаимосвязи между средним и дисперсией, в частности между статистическими критериями оценки этих параметров. Чтобы мы могли охарактеризовать процессы седиментации, исходя из смещений, характерных для среднего и дисперсии (например, размер частиц и их сортировка; см. гл. 15), необходимо изучить взаимоотношения между ними. Ценно то, что в трех областях этих взаимоотношений (см. фиг. 15.1) даже косвенные методы измерений дают нормальное распределение; и в каждом таком случае осадок оказывается близким к однокомпонентной системе: это глины, кварциты (сюда следует включить пляжные и дюнные пески) и некоторые гравеллиты с преобладанием какого-либо одного элемента (частицы). Опять же, когда подвергаются обработке таким же способом измерения в шлифах, найденное среднее почти всегда будет независимым от дисперсии ([164, 167] и раздел 5.7); это приводит к выводу, что в подобных условиях измерения мы скорее всего имеем дело со случайной выборкой из нормально распределенной совокупности.

Окончательно можно сказать, что, когда применяются прямые измерения, может быть использована взаимосвязь между средним и дисперсией для освещения структурного упорядочивания данной совокупности по размерам зерен посредством карт количественного контроля (фиг. 2.5).

Полагаем, что применение логнормальной функции в качестве модели распределения при изучении размеров зерен, если соблюдены соответствующие предосторожности [176], оказывает существенную помощь в деле объективного понимания процессов седиментации. Главные условия, необходимые для получения логнормальной модели, следующие:

1. Выбранная для зерен мера должна интерпретироваться физически просто, например представлять собой определенный отрезок единого однородного минерального составляющего. Для выполнения этого требования выбранную меру надо интерпретировать непосредственно по той величине или понятию, которые она отражает, например по той мере, которая эквивалентна размерам и величине, а эти последние в свою очередь должны быть эквивалентными скорости перемещения частиц.

2. Следует достигнуть случайного опробования, т. е. простой метод случайного опробования требует постоянства вероятности от испытания к испытанию. При стратифицированных совокупностях это означает следующее: или нужны бороздовые пробы, которые удовлетворяли бы требованиям простого случайного опробования путем опробования всей генеральной совокупности в любом случае, или стратифицированное случайное опробование, когда случайные выборки берутся из однородных осадочных подразделений.

Интересно отметить, что, если логарифмы размеров действительно нормально распределены, любая линейная комбинация нормальных случайных величин является также нормально распределенной; например, если предположить, что объем V частиц неправильной формы выражен функцией осей a-, b-, и c-частицы,

$$V = abc,$$

то

$$\log V = \log a + \log b + \log c.$$

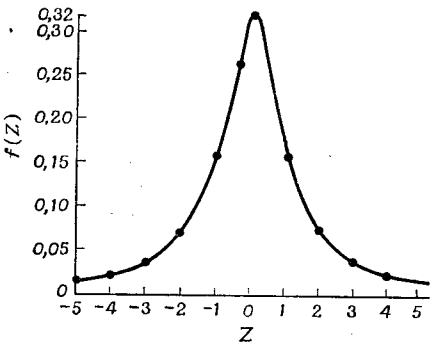
Если $\log a$, $\log b$ и $\log c$ нормально распределены, нормально распределен и $\log V$. Такая зависимость позволяет устанавливать отношения между логарифмом объема и величиной измерений осей частиц в ϕ-единицах; изменения логарифма объема тесно связаны с изменениями осей [181].

Аналогично Сичель [396], Росс [368] и Крайг [238] установили, что логнормальная модель пригодная для характеристики распределения в выборках из небольших навесок золота.

До сих пор, главным образом вследствие недостаточности объемов выборок и должного внимания к проблеме обеспечения случайности отбора, остается не доказанным утверждение, согласно которому логнормальное распределение является наилучшей моделью распределения элементов-примесей в земной коре [4, 62, 297, 299]. В настоящее время можно сказать, что модель распределения, наиболее пригодная для характеристики распределения элементов-примесей, скорее является пуассоновой, нежели логнормальной (см. раздел 14.4 и последующие), и, чтобы решить вопрос, какая из моделей «наилучшая», необходимо всесторонне исследовать распределение немногих представительных элементов с очень тщательным контролем системы отбора для уверенности в полной случайности выбора из «однородных совокупностей». До выполнения этого требования интерпретация характера распределения элементов-примесей будет оставаться объектом неизвестной степени неточности [1] [435].

13.13. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МОДЕЛЬ

Предположим, что распределение размеров частиц оказалось не логнормальным. Тогда можно предположить, что распределение средних значений логарифмов по выборкам не сходится к нормальному, как это требуется согласно центральной предельной теореме. Вполне возможно объяснить эту небходимость тем, что совокупность зерен, которые образуют «естественную» подсовокупность (т. е. пласты и прослойки, или, более точно, седиментационные единицы [14, 317]), была выбрана не случайно: эта совокупность, систематически смещенная от исходной совокупности выборкой, остается тем не менее логнормальной. С другой стороны, рекомендуем изучить также альтернативную модель, которая охватывает и эту ситуацию.



Ф и г. 13.8. Пример плотности распределения Коши.

Предположим, что случайная переменная, представляющая логарифм размера частицы, является отношением двух случайных переменных, рас-

[1] В процедуре изучения характера концентраций элементов-примесей имеется еще одна трудность — определение уровня измерений; шкала измерений может занимать промежуточное положение между ординальной и интервальной, и пользоваться этими данными будет трудно до тех пор, пока эти вопросы не будут решены [274].

пределенных нормально:

$$x=\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \quad \text{и} \quad y=\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}.$$

Тогда, если x и y выбраны случайно, переменная $z=x/y$ обладает распределением Коши:

$$f(z)=\frac{1}{\pi(1+z^2)}, \quad -\infty<z<+\infty.$$

Для этого распределения среднее, подсчитанное по выборке, размером n, не лучше единичного наблюдения для оценки значения среднего всей совокупности μ; медиана служит оценкой максимального правдоподобия центральной тенденции и не существует момента более высокого порядка, чем первый; в частности, случайная величина является неопределенной и центральная предельная теорема неприложима. Кривая распределения частот Коши показана на фиг. 13.8, и ее внешнее сходство с кривой нормального распределения очевидно.

Случайные величины, имеющие распределение, выражаемое функцией Коши, встречаются не так часто, как те, распределение которых приближается к нормальному, биномиальному, пуассоновому и т. д., но они все же существуют. Всякий раз, когда ожидается, что данная переменная выражает отношение двух случайных величин, можно убедиться в том, что если они распределены нормально, то распределение той, которая представляет их отношение, лучше всего описывается функцией Коши.

Одно из главных неудобств применения модели Коши заключается в трудности оценки из-за недостаточной сходимости и неприменимости центральной предельной теоремы.

ГЛАВА 14

Дискретные распределения — биномиальное, Пуассона и т. д.

...будут рассмотрены следующие ситуации:

1. *Рассматривается содержательно воспроизводимый эксперимент, результатом которого может быть или S, или F [S — успех, F — неудача].*
2. *В любом случае проведения эксперимента тот или иной результат получается с некоторой долей вероятности; вероятность получения результата S равна P, т. е. $P(S) = p$, а $P(F) = 1 - p = q$.*
3. *Выполняется n независимых постановок эксперимента и фиксируется количество испытаний с результатом S.*

Таковы три условия, определяющие биномиальную модель.

P. J. McCarthy, Introduction to Statistical Reasoning, McGraw-Hill Book Co., p. 177, 1957

14.1. ВВЕДЕНИЕ

Нормальное распределение является той моделью, которая наиболее часто используется при обработке результатов измерений, главным образом потому, что оно наиболее подходит как модель распределения непрерывных случайных величин. В экспериментах другого типа основная операция состоит в разбивке объектов по дискретным классам, сопровождаемой подсчетом частот отнесения объектов к каждому из классов. Следовательно, здесь пользуются дискретной шкалой, а в таких случаях более подходящими считаются те модели, которые допускают использование такой шкалы.

В нашем распоряжении есть множество моделей распределения, которые могут быть использованы в различных ситуациях; это биномиальная модель, модель Пуассона, отрицательная биномиальная и распределение, а также модели заражения; все они могут рассматриваться в качестве подходящих для пересчета данных наблюдений, разделенных на классы. Эти модели использовались при изучении выборочных распределений минералов при изучении минерального состава методом точечного подсчета в шлифах, при изучении соотношений акцессорных минералов в тяжелой фракции и т. п. [171, 174].

14.2. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Формула разложения бинома хорошо известна и обычно записывается как

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q^1 + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}p^r q^{n-r}. \qquad (14.1)$$

Это выражение, соответственно интерпретированное, удобно для подсчета количества событий определенного рода, и этот подсчет можно произвести чисто алгебраически. Однако в качестве вероятностного распределения его, возможно, лучше выразить в такой экспериментальной ситуации, какую представляет собой описание частоты выпадения сторон подбрасываемой монеты. Обозначим случай выпадения решетки как S. Выпадения

герба или решетки — два единственно возможных исхода эксперимента; вероятности каждого из этих событий равны, поэтому их можно записать в виде бинома $(p + q)^n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$. Вероятность одного из событий, таким образом, будет $p = 0{,}5$, а вероятность противоположного события $1 - p = q = 0{,}5$.

Теперь будем подбрасывать две монеты; соответствующий бином будет $(p + q)^n = (0{,}5 + 0{,}5)^2$, где n — количество бросков. Возможные исходы положения подброшенных монет даны в табл. 14.1; принимая во внимание

Таблица 14.1

Частота выпадения гербов при подбрасывании двух монет
Г — герб; Р — решетка

Исходы		Вероятность	Число выпадений герба	Частота исходов
1	2			
Г	Г	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	2	1
Г	Р	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	1	2
Р	Г	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	1	2
Р	Р	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	0	1

частоту появления решетки, это можно выразить так: частота одновременного выпадения решеток — 1, решетки и герба — 2 (независимо от порядка монет) и двух гербов — 1.

В табл. 14.2 подсчитаны результаты подбрасывания четырех монет, однако для большого количества подбрасываемых монет трудность подсчета быстро возрастает. Разложение соответствующих биномов упрощает расчет:

$$n = 1p + q$$
$$n = 2p^2 + 2pq + q^2$$
$$n = 3p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$
$$n = 4p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

и, если коэффициенты членов разложения представить в форме треугольника Паскаля, правило подсчета становится весьма ясным:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

Возможность применения этой процедуры, однако, ограничена теми случаями, когда вероятность события, скажем выпадения «решетки» при бросании монеты (или в более общем примере «успех»), равна вероятности противоположного события. Так, вероятность выпадения 5 на игральной

Таблица 14.2

Частота выпадений гербов при подбрасывании четырех монет

Г — герб; Р — решетка

Исходы				Вероятность выпадения гербов	Число выпадения гербов	Частота неходов
1	2	3	4			
Г	Г	Г	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$	4	1
Г	Г	Г	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$	3	
Г	Г	Р	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$	3	
Г	Р	Г	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$	3	4
Р	Г	Г	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$	3	
Г	Г	Р	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$	2	
Г	Р	Г	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$	2	
Г	Р	Р	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$	2	6
Р	Г	Р	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$	2	
Р	Р	Г	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$	2	
Р	Г	Г	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$	2	
Г	Р	Р	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$	1	
Р	Г	Р	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$	1	
Р	Р	Г	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$	1	4
Р	Р	Р	Г	$\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$	1	
Р	Р	Р	Р	$\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$	0	1

кости равна 1/6, а вероятность невыпадения — 5/6. Это приводит к несимметричной биномиальной форме, и подсчет вероятностей несколько усложняется. Но разложение соответствующих биномов можно использовать и в данном роде экспериментов, так что правила для нахождения коэффициентов разложения бинома приводят к возможности установления частоты событий. Общая форма разложения —

$$C_r^n p^r q^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\,p^r q^{n-r}, \qquad (14.2)$$

где C_r — количество сочетаний из n по r и представляет собой коэффициент, обозначающий частоту встречаемости события r раз; p^r — вероятность встречи события, а q^{n-r} — вероятность того, что данное событие не произойдет.

Предположим, что цель эксперимента — подсчет количества зерен циркона в тяжелой фракции или количества зерен кварца по заданной линии в шлифе. Известно, что число появлений данного события (зерна циркона или точек, попавших на кварц) распределено биномиально с $p = 0{,}4$ и что по линии расположено 5 зерен (или точек наблюдения) и нам нужно узнать распределение вероятностей встречи того или иного исхода (зерна циркона или кварца). В целом намечается рассмотреть 1000 (N) линий, пересекающих по 5 (n) точек наблюдений (или зерен), и требуется определить теоретическую или предполагаемую плотность распределения числа появления события (кварц или цирконовое зерно) на каждой линии по всем 1000 пересечениям. Подходящий для этой цели бином будет

$$N(p+q)^n = 1000\,(0{,}4+0{,}6)^5.$$

Разложение может быть произведено, как показано в табл. 14.3.

Таблица 14.3

Вычисление бинома $N(p+q)^n = 1000\,(0{,}4+0{,}6)^5$

Число событий	C_r^n	p^r	q^{n-r}	$C_r^n p^r q^{n-r}$	Число событий
1	2	3	4	5	6
0	$\frac{5!}{5!0!}=1$	$0{,}4^0$	$0{,}6^5$	$1\times1\times0{,}07776=0{,}07776$	77,76
1	$\frac{51}{1!4!}=5$	$0{,}4^1$	$0{,}6^4$	$5\times0{,}4\times0{,}1296=0{,}2592$	259,20
2	$\frac{5!}{2!3!}=10$	$0{,}4^2$	$0{,}6^3$	$10\times0{,}16\times0{,}216=0{,}3456$	354,60
3	$\frac{5!}{3!2!}=10$	$0{,}4^3$	$0{,}6^2$	$10\times0{,}064\times0{,}36=0{,}2304$	230,40
4	$\frac{5!}{4!1!}=5$	$0{,}4^4$	$0{,}6^1$	$5\times0{,}025\times0{,}6=0{,}0768$	76,80
5	$\frac{5!}{5!0!}=1$	$0{,}4^5$	$0{,}6^0$	$1\times0{,}01024\times1=0{,}01024$	10,24
Сумма				1 00000	1 000,00

Итак, в условиях данного эксперимента ожидается, что на 77,76 пересечениях с пятью точками наблюдений на каждом кварц встречен не будет; на 259,20 пересечениях встретится по одному кварцевому зерну (или зерну циркона) и т. д. Практически 0 кварцевых зерен встретится целое число раз; так же для одного кварцевого зерна и т. д., но наблюдаемое число по мере возрастания N должно приближаться к теоретическому. Кроме того, практически перед нами поставлена совсем иная задача; у нас есть все основания предполагать, что данный компонент имеет биномиальное распределение, и мы можем фиксировать $n = 5$ и $N = 1000$, но значение p остается неизвестным и его следует определить по этим данным.

В табл. 14.4 приведены в качестве более реального примера наблюдения, полученные при подсчете кварцевых зерен в 25 шлифах из сухих отложений Солт-Уош [164, фиг. 1 стр. 13]. Процесс получения выборки заключался в изучении по каждому шлифу 6 пересечений по 100 точек наблюдения на каждой линии, что дало $n = 100$, $N = 150$. Процедура вычисления оценок моментов приведена в табл. 14.4, а распределение — на фиг. 14.1.

Таблица 14.4

Частота встречаемости кварца в шлифах из «сухих» песчаников Солт-Уош (фиг. 14.1)

Границы классов	Частота f	d	fd	fd^2	fd^3	fd^4	$f(d-1)^4$
40—45	1	−4	−4	16	−64	256	625
45—50	7	−3	−21	63	−189	567	1792
50—55	7	−2	−14	28	−56	112	567
55—60	18	−1	−18	18	−18	18	288
60—65	33	0	0	0	0	0	33
65—70	42	1	42	42	42	42	0
70—75	28	2	56	112	224	448	28
75—80	11	3	33	99	297	891	176
80—85	3	4	12	48	192	768	243
Сумма	150		86	426	428	3102	3752

$$f(d-1)^4 = fd^4 - 4fd^3 + 6fd^2 - 4fd + f,$$

$$3752 = 3102 - 1712 + 2556 - 344 + 150 = 3752;$$

$$n_1 = 0{,}5733,\ n_2 = 2{,}8400,\ n_3 = 2{,}8533,\ n_4 = 20{,}6800;$$

$$\overline{X} = \overline{X}' + cn_1 = 62{,}5 + 5 \times 0{,}5733 = 65{,}365 = np;$$

$$m_2 = c^2(n_2 - n_1^2) = 25\,(2{,}84 - 0{,}3287) = 25 \times 2{,}5113 = 62{,}7825 = npq = \hat{\sigma}^2;$$

$$\hat{\sigma} = npq = 7{,}9235;$$

$$m_3 = c^3(n_3 - 3n_2n_1 + 2n_1^3) = 125\,(2{,}8533 - 4{,}8845 + 0{,}3768)$$
$$= 125\,(-1{,}6544) = -206{,}8000;$$

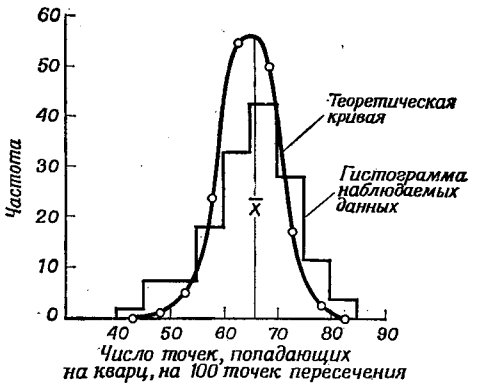
$$\sqrt{b_1} = \frac{m^3}{m_2^{3/2}} = \frac{206{,}8}{497{,}457} = -0{,}4157;$$

$$m_4 = c^4(m_4 - 4n_3n_1 + 6n_1^2n_2 - 3n_1^4) = 625\,(20{,}68 - 6{,}5432 + 5{,}6010 - 0{,}3240)$$
$$= 625 \times 19{,}4138 = 12133{,}6250;$$

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{12133{,}625}{3941{,}6423} = 3{,}0783.$$

Характеристики биномиального распределения, основанные на первых четырех моментах, приведены в табл. 14.5.

Эти статистические оценки и соответствующие им теоретические замечания приведены в табл. 14.6, где можно видеть, что дисперсия наблюдений примерно в 2,8 раза больше, чем это ожидалось при биномиальном распределении; аналогично асимметрия по наблюдениям оказалась почти в 40 раз больше ожидаемой при весьма близком значении эксцесса. Из сравнения статистических оценок и теоретических значений следует, что это распределение значительно отличается от биномиального с таким же средним.



Фиг. 14.1 Плотность распределения кварцевой составляющей в шлифах из «сухих» песчаников Солт-Уош.

$(p+q)^n = (0{,}65 + 0{,}35)^{100}$, $\overline{X} = 65{,}4$.

По ожидаемому значению параметров биномиального распределения, перечисленных в табл. 14.5, можно увидеть, что возрастание значения n для фиксированной величины p ведет к уменьшению асимметрии (меньше β_1), а эксцесс β_2 приближается к 3; в пределе это означает, что даже асимметричное биномиальное распределение приближается по форме к нормальной кривой по мере возрастания n

(или N). Пример с распределением кварцевых зерен в песчаниках Солт-Уош показывает, что даже при $p \neq 0{,}5$, например $p = 0{,}654$ и $N = 150$, ожи-

Таблица 14.5

Сводка статистик и параметров биномиальной плотности распределения

Среднее $= \mu = np$	(14.3)
Дисперсия $= \sigma^2 = npq$	(14.4)
Асимметрия $= \beta_1 = \dfrac{(q-p)^2}{npq}$	(14.5)
Эксцесс $= \beta_2 = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$	(14.6)

даемая асимметрия близка к нулю, а ожидаемый эксцесс близок к трем. В общем по мере возрастания n_i' (и /или N) биномиальное распределение

Таблица 14.6

Наблюдаемые и теоретические сводные статистики для плотности распределения кварца в сухих песчаниках Солт-Уош

Статистики	Теоретические	Наблюдаемые
Среднее $= \mu = np$	65,37	65,37
Дисперсия $= \sigma^2 = npq$	22,6284	62,7825
Асимметрия $= \beta_1 = \dfrac{(q-p)^2}{npq}$	0,0042	0,1728
Эксцесс $= \beta_2 = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$	2,9842	3,0783

будет приближаться к нормальному, и при сопоставлении наблюдаемых частот с ожидаемыми можно использовать, как описывалось выше (см. раздел 13.5), таблицу площадей для нормального распределения [1].

14.3. СОГЛАСОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМЫХ ЧАСТОТ С ФУНКЦИЕЙ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

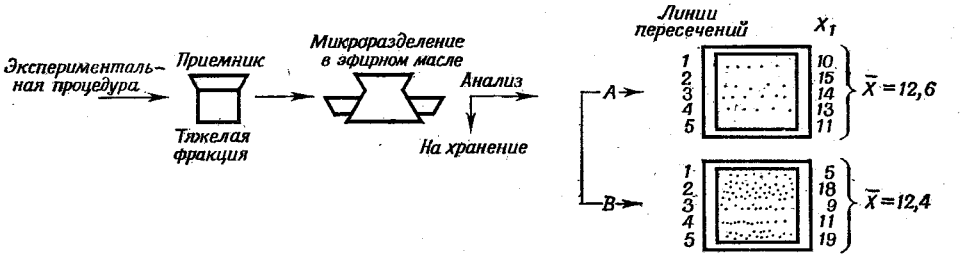
Когда выполнено некоторое количество экспериментальных наблюдений и количество успешных событий разнесено по классам: «нулевой успех», «один успех», «два успеха» и т. д., то наблюдаемое распределение можно аппроксимировать биномиальной функцией. Условия, в которых биномиальное распределение будет подходящей моделью для описания серии наблюдений, следующие:

1. Исход испытаний классифицируется или как успех, или как неудача; например, при подсчете числа зерен циркона в тяжелой фракции исход каждого наблюдения классифицируется как *циркон* (успех) или *не циркон* (неудача).
2. Испытания независимы, т. е. присутствие циркона в каждой следующей точке наблюдения не зависит от того, был ли циркон в предыдущей точке и т. д.
3. Вероятность обнаружения циркона постоянна в каждой точке.

---

[1] В данном случае речь идет не о дискретной случайной величине, а о ее функции $t \dfrac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, где m — число появлений события в серии n_i' испытаний. Распределение t с ростом n будет приближаться к нормальному с параметрами 0,1.— *Прим. ред.*

При исследовании частот обнаружения циркона в тяжелой фракции генеральная совокупность представляет собой все множество зерен в препарате или же по какому-либо пересечению, и, если фракция приготовлена с соблюдением всех правил, циркон в ней будет распределен случайно. Наблюдения, производимые по некоторой линии, пересекающей n зерен, которые классифицируются как «циркон» и «не циркон», будут фиксировать случайное распределение циркона, а вероятность его обнаружения при переходе от зерна к зерну будет постоянной. Допустим, что произведены наблюдения по N таких пересечений. Тогда каждое пересечение даст некоторую оценку p_i вероятности обнаружения циркона в препарате. Наблюдаемые p_i будут группироваться около некоторого центрального значения $\overline{p}$, которое является оценкой истинной пропорции P циркона в препарате. В таких условиях проверка согласованности наблюдаемого распределения с биномиальным



Фиг. 14.2. Модель Пуассона при проверке методики.

Требования к способу отбора: случайный выбор пересечений и зерен. Требования модели: вероятность (равна частоте) минералов $= p = \text{const}$ от пересечения к пересечению. Гипотеза H_0: минеральные компоненты распределены в препарате случайно. Плотность распределения: пуассоновская (значение n — весьма велико; p — очень мало; np — конечно). Критерий: $\chi^2 = Sx_i^2/\overline{X}$; число степеней свободы равно $N - 1 = 4$. Величина χ^2 при H_0 имеет χ^2-распределение.

Случай A	Случай B
$\chi^2 = 1{,}37$	$\chi^2 = 11{,}55$
$P < 90 > 80$	$P < 0{,}05 > 0{,}02$
Принятая гипотеза: распределение однородно. Среднее не смещено.	Отвергнутая гипотеза: распределение неоднородно. Среднее смещено.

соответствует проверке качества препарата, или, что эквивалентно, проверке предположения о случайном распределении циркона в препарате [1]. Если гипотеза биномиального зерна циркона расположена неслучайно, препарат должен быть приведен в надлежащее состояние или заново приготовлен.

С другой стороны, когда такая процедура применяется для точечных подсчетов в шлифах [174], распределение отдельных компонентов, например кварцевых зерен, не случайно, так что сопоставление их распределения с биномиальным может характеризовать распределение составляющих данного препарата. В этом случае также необходимо брать выборку надлежащим образом, без чего нельзя получить устойчивые статистические оценки p_i, не смещенные относительно P. В обоих случаях информация, полученная от сопоставления функций распределения, играет большую роль при определении петрографических данных, необходимых для петрологического анализа [174].

Подбор биномиального распределения, описывающего наблюдаемые частоты, прежде всего необходим для того, чтобы можно было оценить вероятность P; практически получают значения p_i, а их среднее $\overline{p}$ находят по $\overline{X}$, вычисленному по наблюдаемым частотам. Затем определяют подходящий бином $(p + q)^n$, а частоты для различных классов могут быть взяты из таблиц биномиального распределения [306, 360]. В качестве примера можно

[1] Например, на фиг. 14.2, на которой модель распределения является пуассоновой, проверка та же, о которой сказано в тексте; индекс дисперсии для биномиальной модели определяется как $\chi^2 = Sx_i^2/\overline{X}\,(1 - p)$.

взять частоту кварцевых зерен в песчаниках Солт-Уош, приведенную в табл. 14.4. Из $\overline{X} = 65{,}365$ в известной длине линии наблюдения с $n = 100$ имеем $\overline{X} = n\overline{p}$, где $\overline{p} = 0{,}654$; подходящим биномом является $(0{,}654 + 0{,}346)^{100}$, а требующиеся частоты находим в работе Ромига [360]. Получается, что на 100 точек наблюдения по линии приходится 40 или менее кварцевых зерен. Далее проведем преобразование:

$$B(X,\ n,\ p) = 1 - B(n - x - 1,\ n,\ q). \qquad (14.7)$$

В нашем случае $n = 100$, $p = 0{,}65$, $q = 0{,}35$, что дает

$$B(X;\ 100;\ 0{,}65) = 1 - B(100 - x - 1,\ 100,\ 0{,}35).$$

Определив частоты для всех значений X, можно подсчитать и кумулятивные частоты по таблицам Ромига [360]. Работа может быть выполнена по схеме, данной в табл. 14.7. В столбике 1 даются значения X, в столбике 2 — значения $n - x - 1$, в столбике 3 — кумулятивные частоты вплоть до X или менее (фактически $n - x - 1$ или менее) по таблицам Ромига. Дробные

Таблица 14.7

Вычисление теоретических частот для биномиального распределения $(p+q)^n = (0{,}65 + 0{,}35)^{100}$

X или менее	$n - X - 1$	$B(n - X - 1, 100, 0{,}35)$	$B(X, 100, 0{,}65)$	Теоретические частоты 150 × вероятность (4)	Класс	Наблюдаемые
1	2	3	4	5	6	7
40	59	0,999995	0,000005	0,0008	0—40	
45	54	0,999961	0,000034	0,0051	40—45	1
50	49	0,998545	0,001416	0,21	45—50	7
55	44	0,975393	0,023152	3,47	50—55	7
60	39	0,827581	0,147812	22,17	55—60	18
65	34	0,462430	0,365151	54,77	60—65	33
70	29	0,123598	0,338832	50,82	65—70	42
75	24	0,012127	0,111471	16,72	70—75	28
80	19	0,000343	0,011784	1,77	75—80	11
85	14	0,000002	0,000341	0,05	80—85	3
90	0		0,000002	0,0003	85—100	
Сумма			1,000000	149,9862		150

частоты в классах, которые находят по разности, даны в столбике 4. Для получения ожидаемых частот в столбике 5 частоты в столбике 4 умножаются на число испытаний N (в данном примере — 150). Наблюдаемые частоты включены в столбик 7, а соответствующие им интервалы — в столбик 6.

Распределение наблюдаемых и ожидаемых частот показано на фиг. 14.1. Расхождения довольно большие [1]; при сравнении с ожидаемым распределением видно, что они связаны с асимметрией наблюдаемых частот. По-видимому, частоты кварцевых зерен по данной серии линий наблюдения (или) в в данных шлифах распределены не биномиально. Похоже, что главной причиной отмеченного расхождения является неслучайность выборки (см. ниже)

[1] Проверенные критерием χ^2 (см. раздел 17.4), эти расхождения также весьма значительны ($P < 0{,}001$).

14.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Предположим теперь, что мы сохраняем ту же модель распределения, но уменьшаем вероятность успеха p, приближая ее к нулю; тогда, чтобы сохранилось конечное значение для $np = \bar{X}$, n должно возрастать по мере уменьшения p. В этом случае биномиальное распределение аппроксимируется экспоненциальной плотностью распределения Пуассона.

Тогда в биномиальной записи получим

$$\frac{n(n-1)\ldots n-r+1}{r!}\, p^r q^{n-r}; \tag{14.8}$$

при увеличении n одновременно с уменьшением p так, что $np = m$ остается умеренным, а r — ничтожно малым по сравнению с n (тогда q приближается к единице), это выражение можно записать в виде

$$\frac{n^r p^r}{r!}(1-p)^n = \frac{(1-m/n)^n\, m^r}{r!}. \tag{14.9}$$

В пределе это выражение переходит [430, 417а] в

$$C_r^n p^r q^{n-r} = \frac{(1-m/n)^n\, m^r}{r!} = \frac{e^{-m} m^r}{r!}. \tag{14.10}$$

Такая плотность распределения использовалась для аппроксимации биномиального распределения, когда величина p была очень малой; кроме того, ею можно пользоваться при описании частот определенных событий, например при подсчете кровяных телец гемацитометром [417а], следов α-частиц при радиоактивном распаде [380, 403] и в прочих редких случаях, таких, как нахождение редких минералов в несцементированных песках или редких компонентов при точечном подсчете в шлифах при количественно-минералогическом анализе осадков [174]. Стьюдент в своей классической статье [417а] первым предложил использовать этот вид распределения в в качестве модели при подсчете кровяных телец с использованием гематоцитометра; им были последовательно рассмотрены во всех деталях причины отклонения от распределения Пуассона в ряде экспериментальных ситуаций]322, 419].

Обращаясь к ситуациям, возникающим в осадочной петрографии, при которых требуется подсчет, можно следующим образом модифицировать требования, сформулированные Стьюдентом для распределения Пуассона:

1. Вероятность встречи определенного минерала при подсчете постоянна для каждого минерального вида.
2. Вероятность встречи отдельного минерального зерна данного вида постоянна для каждого испытания, например для каждого наблюдаемого пересечения или поля в шлифе.
3. Тот факт, что некоторый минерал данного вида уже обнаружен, не влияет на возможность встретить другой аналогичный минерал в этом же испытании.

Эти условия очень близки к описанным для биномиального распределения (стр. 239); условие 3 для последнего сходно с только что приведенными условиями 1 и 2; сходно также и условие независимости событий от предыдущих наблюдений (условие 2 — для биномиального и условие 3 — для распределения Пуассона).

Распределение Пуассона может быть выражено формулой

$$\frac{e^{-m} m^r}{r!} = e^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots + \frac{m^r}{r!}\right). \tag{14.11}$$

Характеристики распределения Пуассона следующие:

$$\text{Среднее} = \sigma^2 = np = m \tag{14.12}$$

$$\text{Дисперсия} = \mu = np = m \tag{14.13}$$

$$\text{Асимметрия} = \beta_1 = \frac{1}{np} = \frac{1}{m} \tag{14.14}$$

$$\text{Эксцесс} = \beta_2 = 3 + \frac{1}{np} = 3 + \frac{1}{m} \tag{14.15}$$

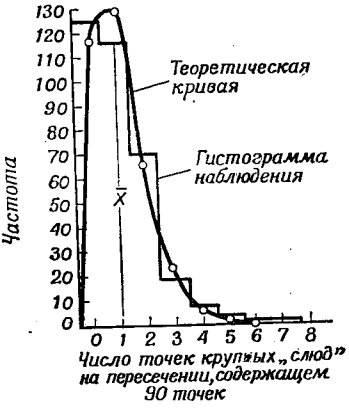
Если величина p становится очень малой, q приближается к единице и $np = m$ остается конечным, то эти параметры очень близки как у биномиального распределения, так и у пуассоновского; а если p фиксировано и m становится весьма большим, то $\frac{1}{m} \approx 0$; $\beta_1 \approx 0$ и $\beta_2 \approx 3$; в этом случае распределение Пуассона близко к нормальному.

14.5. СОГЛАСОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА С НАБЛЮДАЕМЫМИ ЧАСТОТАМИ

Здесь снова необходимо подсчитать оценки моментов и принять $np = m$, чтобы можно было найти соответствующие распределения Пуассона. Эти частоты являются коэффициентами в разложении

$$e^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\right),$$

которые можно умножить на число испытаний с целью уравнивания площадей под рассчитанной кривой распределения Пуассона и наблюдаемой частотной кривой. Ожидаемые частоты могут быть рассчитаны с помощью логарифмирования [409] или получены из таблиц пуассоновского экспоненциального биномиального предела [303].



Ф и г. 14.3. Плотность распределения крупных «слюд» в шлифах из граувакк Поконо, центральная Пенсильвания.

$e^{-m}\frac{m^r}{r!} = e^{-1{,}0676}\frac{(1{,}0676)^r}{r!}$,

$\bar{X} = 1{,}06$, $n = 340$.

Распределение «крупных слюд» (мегаслюд) в пяти шлифах из слабометаморфизованных граувакк Поконо, обнажающихся у шоссе 322 севернее Порт-Матильда (центральная Пенсильвания), изучалось четырьмя операторами, просмотревшими в каждом шлифе 17 пересечений по 90 точек наблюдения на каждом пересечении, что дало $N = 340$. Наблюдаемые частоты даны в табл. 14.10, по ним вычислены итоговые статистики, приведенные в табл. 14.9. Эти статистики значительно отличаются от ожидаемых значений теоретического распределения Пуассона при том же среднем.

Частоты, полученные для распределения Пуассона со средним значением 1,0676, можно найти следующим образом: вначале находим e^{-m} как антилогарифм числа $-m \log e$, равный antilog $(-m\ 0{,}43429)$. В данном случае получаем

$$\text{antilog}\,(-1{,}0676 \times 0{,}43429) = \text{antilog}(-0{,}46365),$$

$$\text{antilog}\,\bar{1}{,}53635 = 0{,}34383 = e^{-m}$$

Разложение

$$Ne^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \frac{m^5}{5!} + \frac{m^6}{6!}\right),$$

где $m = 1{,}0676$, находят затем по табл. 14.8, а ожидаемая кривая и наблюдаемая гистограмма частот даны на фиг. 14.3.

Таблица 14.8

Расчет частот распределения Пуассона со средним $m = 1{,}0676$ и $N = 340 \cdot e^{-m} = \text{antilog} = (-1{,}0676 \times 0{,}43429) = 0{,}34383$

Число слюд r на пересечение	$r!$	m^r	$\frac{m^r}{r!}$	$\frac{e^{-m}m^r}{r!}$	$Ne^{-m}\frac{m^r}{r!}$
1	2	3	4	5	6
0	1	1,0	1,0	0,34383	116,90
1	1	1,0676	1,06760	0,36707	124,80
2	2	1,1398	0,56990	0,19595	66,62
3	6	1,2169	0,20282	0,06974	23,71
4	24	1,2992	0,05413	0,01861	6,33
5	120	1,3870	0,01156	0,00397	1,35
6+	720	1,4808	0,00206	0,00083	0,28
Сумма				1,00000	339,99

Таблица 14.9

Сравнение вычисленных и наблюдаемых значений основных статистик плотности распределения крупных «слюд» из граувакк Поконо

Статистики	Наблюдаемые	Ожидаемые
Среднее $= m = \overline{X}$	1,068	$m = 1{,}068$
Дисперсия $= \sigma^2$	1,2514	$\sigma^2 = 1{,}068$
Асимметрия $= \beta_1$	1,9665	$\frac{1}{m} = 0{,}9363$
Эксцесс $= \beta_2$	6,2105	$3 + \frac{1}{m} = 3{,}9363$

Частоты распределения Пуассона, приведенные в столбике 5 табл. 14.8, могут быть получены непосредственно из таблиц Молина [303] со средним 1,1, а проверка согласованности с помощью критерия при уровне значимости 0,05 не дает существенных различий между рассчитанными частотами (столбик 6, табл. 14.8) и частотами, взятыми по таблицам Молина.

Аналогично, сравнив наблюдаемые частоты с ожидаемыми из распределения Пуассона, как это дано в табл. 14.10, увидим, что расхождение несу-

Таблица 14.10

Сравнение наблюдаемых и ожидаемых частот по критерию χ^2

Число слюд на пересечении	Частоты		$O - E$	$(O - E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
	наблюдаемые, O	ожидаемые, E			
0	125	116,90	+8,10	65,61	0,56
1	115	124,80	+9,80	96,04	0,77
2	70	66,62	+3,38	11,4244	0,17
3	19	23,71	−4,71	22,1841	0,94
4	11	7,96	+3,04	9,2416	1,16
Сумма	340	339,99	0,01		$3{,}60 = \chi^2$

Примечание Число степеней свободы $= e - r = 5 - 2 = 3$; $50 > P > 30$.

щественно ($\chi^2 = 3{,}60$, число степеней свободы 3). Таким образом, «крупные слюды» в изученных шлифах из граувакк Поконо распределены случайно и обладают распределением Пуассона.

14.6. ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛЕЙ БИНОМИАЛЬНОЙ И ПУАССОНА

Сохранить от испытания к испытанию постоянную вероятность события в большинстве «естественных» выборочных ситуаций в общем довольно трудно. Нелегко также получить на практике «простую» случайную выборку. Отклонения от модельных требований в случае, когда мы рассчитываем иметь дело с распределением Пуассона, тщательно рассмотрены Стьюдентом [322, 419], который подчеркивал, что в случае распределения Пуассона, или нормального распределения, частотная модель является приближением к «реальной» ситуации и ее практически можно использовать и без точного соответствия теоретической кривой [322].

Предположим, например, что генеральная совокупность, из которой предполагается сделать выборку, состоит из множества подсовокупностей с постоянным значением в каждой, но которое меняется при переходах от одной подсовокупности к другой. Простая модель может стать подходящей для любой отдельной подсовокупности, но обобщенное выборочное распределение представляет собой гетерогенный набор распределений, который называется *серией Лексиана* (Lexian series) [444; 233, II].

Пусть p_i соответствует i-й выборке ($i = 1, 2, \ldots, N$). Требуется найти стандартное отклонение числа успехов в выборке, если данные по всем выборкам объединены. Пусть p будет средним значением вероятности, так что

$$Np = \sum_{i=1}^{N} p_i. \tag{14.16}$$

Тогда ожидаемое значение [444] числа успехов во всей совокупности выборок равно сумме ожидаемых значений для индивидуальных выборок:

$$\sum_{i=1}^{N} np_i = nNp.$$

Следовательно, ожидаемое значение числа успехов в одной выборке равно np.

Дисперсия ε^2 числа успехов в выборке находится следующим образом [444]. Среднее квадратичное отклонение относительно np в i-й выборке—

$$np_iq_i + (np_i - np)^2,$$

т. е. равно дисперсии i-й выборки (np_iq_i) плюс квадрат n-го количества отклонений выборочного среднего от общего среднего; суммируя по всем значениям N, получим:

$$N\varepsilon^2 = n\sum_{i=1}^{N} p_iq_i + n^2\sum_{i=1}^{N}(p_i - p)^2 = n\sum_{i=1}^{N} p_iq_i + n^2N\sigma_p^2, \tag{14.17}$$

где σ_p^2 — дисперсия величин p_i [1].

Величину p_iq_i в полученном выражении можно записать следующим образом [2]:

$$p_iq_i = \sum p_i(1 - p_i) = \sum p_i - \sum p_i^2 = Np - N(\sigma_p^2 + p^2) = Np - Np^2 - N\sigma_p^2.$$

---

[1] $\sigma_p^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(p_i - p)^2$. — *Прим. ред.*

[2] $N\sigma_p^2 = \sum p_i^2 - \frac{(\sum p_i)^2}{N} = \sum p_i^2 - \frac{N^2p^2}{N} = \sum p_i^2 - Np2.$

Подставив эти значения в равенство (14.17), получим

$$N\varepsilon^2 = Nnpq - nN\sigma_p^2 + n^2N\sigma_p^2;$$
$$\varepsilon^2 = npq + n(n-1)\,\sigma_p^2. \tag{14.18}$$

Можно видеть, что дисперсия числа успехов в серии Лексиана больше на $n(n-1)\,\sigma_p{}^2$, чем дисперсия биномиального распределения.

Аналогично можно показать, что, если данные выборки согласуются с распределением Пуассона, в котором вероятность успеха меняется по мере проведения испытаний, ожидаемое число успехов будет:

$$\sum p_i = np, \tag{14.19}$$

в то время как ожидаемая дисперсия, если каждое испытание независимо [444] —

$$\varepsilon^2 = npq - n\sigma_p^2. \tag{14.20}$$

Значение этих моделей для петрографического анализа возрастает в тех случаях, когда генеральная совокупность представляет собой стратифицированный объект. Тогда, если каждый образец взят в пределах слоя, а каждый слой удовлетворяет требованиям для биномиальной модели или модели Пуассона, но p_i не постоянно от слоя к слою, итоговое распределение будет приближаться к распределению в серии Лексиана. С другой стороны, если взята определенная выборка, скажем перпендикулярно наслоению, так, что каждая проба соответствует отдельному слою, выборочная модель приближается к *серии Пуассона*. В первом случае дисперсия будет больше, чем ожидаемая для биномиальной модели, во втором случае — меньше. В такой ситуации, приводящей к появлению чрезмерной дисперсии, в выработках из осадочных пород более желательным представляется применение модели Лексиана, нежели Пуассона.

14.7. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Стьюдент описал явление отклонения от распределения Пуассона несколько иначе (см. в работе [322]) и показал изменения в параметрах для плотности распределения, возникшей при иных условиях отбора, таких, как положительное биномиальное, Пуассона и отрицательное биномиальное распределения. Он показал, что для характеристики этих трех выборочных моделей могут быть использованы отношения между моментами. Для биномиальной модели Стьюдент определил начальные моменты следующим образом:

$$n_1 = np,$$
$$n_2 = npq + n^2p^2,$$

поскольку дисперсия $m_2 = n_2 + n_1^2 = npq + n^2p^2 - n^2p^2 = npq$. Затем, использовав отношение m_2/n_1, он показал, что для положительного биномиального распределения $m_2/n_1 < 1$, для распределения Пуассона — $m_2/n_1 = 1$ и для отрицательного биномиального $m_2/n_1 > 1$.

Этот критерий связан с субнормальной и супернормальной дисперсией Лексиса [464]; его использовал Аллен [9] для характеристики изменений частот распределения акцессорных минералов. Фишер [127] ввел показатель рассеяния, играющий аналогичную роль. Этот показатель — очень нужный критерий для проверки предположения о биномиальном или пуассоновском распределении в небольших случайных выборках. Предположим, например, что подсчитан некоторый акцессорный минерал (допустим, циркон) и что «успех» определен как встреча его зерен в n зернах по линии наблюдения;

так как распределение зерен в препарате повсеместно случайно (если препарат приготовлен с соблюдением правил), мы можем предположить, что распределение циркона является пуассоновским, если n очень велико, а p очень мало (например, меньше 5 на 100 зерен) и p постоянно от испытания к испытанию. В результате наблюдений по пересечениям было получено 10, 15, 14, 13, 11 ($N = 5$). Если показатель рассеяния χ^2 определен как

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}},$$

то

$$\chi^2 = \frac{17{,}2}{12{,}6} = 1{,}37. \qquad (14.21)$$

При гипотезе пуассоновского распределения, т. е. случайности выборки, χ^2 должно подчиняться χ^2-распределению с числом степеней свободы 4, т. е. на единицу меньше числа пересечений. По таблице χ^2 [15, 128] находим, что величине $\chi^2 = 1{,}37$ при числе степеней свободы 4 соответствует вероятность $90 > P > 80$ и что указанная гипотеза принимается, т. е. эти пять пересечений представляют случайную выборку из распределения Пуассона; тогда устойчивой оценкой количества зерен циркона в данном препарате оказывается среднее $\bar{X} = np = 12{,}6$ (фиг. 14.2).

Предположим, однако, что в данных пяти пересечениях обнаружено соответственно 5, 18, 9, 11 и 19 зерен циркона; тогда

$$\chi^2 = \frac{143{,}2}{12{,}4} = 11{,}5,$$

что при числе степеней свободы 4 дает $0{,}05 > p > 0{,}02$. Следовательно, гипотеза пуассоновского распределения, т. е. случайности выборки, отвергается в связи с тем, что вероятность появления циркона, очевидно, меняется от наблюдения к наблюдению. В частности, здесь дисперсия гораздо больше при том же среднем. Необходимо или приготовить новый препарат, или отрегулировать выборку до получения устойчивой оценки (фиг. 14.2).

Если теперь мы изменим первоначальные условия и предположим, что величина p остается пока постоянной от наблюдения к наблюдению, а объем выборки фиксирован $n = 50$ и что проанализированы два препарата, то получим такие же результаты, как и ранее. В этом случае подходит следующий биномиальный дисперсионный показатель [127]:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}(1-p)}; \qquad (14.22)$$

$\bar{X} = 12{,}6 = np$, и при $n = 50$, $p = 0{,}25$ и $1 - p = 0{,}75$

$$\chi^2 = \frac{17{,}2}{12{,}6 \times 0{,}75} = \frac{17{,}2}{9{,}45} = 1{,}82$$

и $80 > P > 70$ при числе степеней свободы 4. Из этого следует, что гипотеза распределений Пуассона принимается. Но при $np = \bar{X} = 12{,}4$, $p \approx 0{,}25$, $1 - p \approx 0{,}75$ и $\chi^2 = 143{,}2/9{,}3 = 15{,}40$ получим $0{,}01 > P > 0{,}001$, из чего следует, что гипотеза отвергается. Выводы в общем получены те же, что были получены в случае распределения Пуассона.

Биномиальная модель и показатель рассеяния приемлемы при изучении тяжелой фракции песчаников, если при этом использована обычная процедура получения навески и минералы в ней распределены таким образом за счет обогащения, что на линии, пересекающей, скажем, 100 зерен, вероятность встретить определенный минерал находится между 0,05 и 0,95.

Если же, напротив, обогащение не проводилось, то при подсчете первично обломочного материала выборочной единицей становится линия длиной n, которая пересекает много сотен зерен. В таком случае вероятность встретить на ней определенный минерал очень мала, хотя величина np остается конечной величиной за счет большого значения n. При этих условиях распределение данного минерала, вероятнее всего, будет согласовываться с распределением Пуассона, и тогда показатель рассеяния снова станет подходящим критерием для проверки методики. Здесь процедура просеивания, разделения в бромоформе и т. д. приводит к увеличению вероятности появления события и для фракции обеспечивает переход пуассоновского распределения в биномиальное.

При попытке применить эти критерии проверки, когда изучали распределение акцессорных минералов в песчаниках Освего, от гипотезы постоянной вероятности события пришлось отказаться; по-видимому, вероятность встречи циркона здесь менялась от образца к образцу. Действительно, в то время как в большинстве случаев в песчаниках циркона нет, в некоторых образцах он относительно обилен. Такая форма распределения характерна для локальной концентрации минералов в результате «естественного обогащения» при намыве [36]. В этом случае модель распределения будет представлена или моделью заражения, или отрицательным биномиальным распределением, как это установил Барр (из работы [259]). Поэтому перейдем к следующей процедуре соотношения отрицательного биномиального распределения с результатами наблюдений.

На этой стадии следует рассмотреть результаты, полученные после ослабления условий, в которых случайная величина приобрела распределение Пуассона. С этой целью в сокращенном виде приведем условия, сформулированные Стьюдентом [419]:

1. Если вероятности каждого отдельного события при испытании различаются, но малы, распределение остается пуассоновским.
2. Если вероятности некоторых событий имеют большие значения, распределение будет приближаться к положительному биномиальному.
3. Если испытания обладают различными вероятностями появления события (как это обычно и бывает), обобщенное распределение может быть отрицательным биномиальным (кроме тех случаев, когда влияет условие 1).
4. При ослабленных требованиях независимости (вступают в силу следующие условия):
   а) если при появлении некоторого события возрастает вероятность появления другого события, распределение будет отрицательным биномиальным;
   б) если появление некоторого события уменьшает вероятность появления другого события, распределение становится положительным биномиальным.

Все эти пункты представляются потенциально важными для литолога; однако в отдельных случаях, как это отмечено Стьюдентом [419], увеличение вероятности событий, например большое количество циркона в одном из образцов и чрезвычайно малое его количество во всех других образцах, приводит к отрицательному биномиальному распределению. Но, если вступает в силу условие 4, *а*, распределение становится весьма сходным с положительным биномиальным.

Так как условие 3 довольно часто встречается на практике, отрицательное биномиальное распределение наиболее обычно [419].

14.8. СОГЛАСОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ БИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Положительному биномиальному распределению соответствует бином $(p + q)^n$; отрицательному биномиальному [29] —

$$(q - p)^{-k}. \tag{14.23}$$

Член разложения этого бинома с номером k определен выражением

$$P_X = \frac{(k+X-1)!\, R^k}{X!\,(k-1)!\, q^k}, \tag{14.24}$$

где P_X — вероятность того, что испытание будет содержать $X = 0, 1, 2, \ldots$ рассматриваемых событий, или успехов. Это выражение можно сравнить с аналогичной формулой для положительного биномиального распределения

$$P_X = \frac{n!}{X!\,(n-X)!}\, p^X q^{n-X}.$$

В выражении $(q - p)^{-k}$ величина p, как обычно,— вероятность события, q — вероятность противоположного события, и $p = m/k$, а $q = 1 + p$. $R = p/q = m\,(k - m)$. Два параметра m и k оцениваются по результатам наблюдений; среднее арифметическое $\overline{X} = S\,(fX)/n$ является эффективной оценкой для m [29]; а для нахождения k' — статистической оценки параметра k — имеется множество других процедур. Примеры оценочных процедур и их ограничения описаны Блиссом и Фишером [29], а на примере изучения акцессорных минералов — Гриффитсом [171].

Другие примеры отрицательного биномиального распределения возникают при оценивании минерального состава точечным подсчетом в шлифах; установлено, что там, где эти наблюдения удовлетворяют отрицательному биномиальному распределению, распределение компонентов осадка отражает эффект действия двух или более процессов [174, 179]. В частности, если исследуемые составные части осадка входят в состав цемента и их распределение приближается к отрицательному биномиальному, оно, возможно, отражает вторичное перераспределение цементирующего материала [167, 174].

14.9. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В большинстве предыдущих моделей распределения в общем сохранялось условие независимости; однако одной из важных моделей, лежащей в основе системы распределений Пирсона, является такая функция, для которой требование независимости ослаблено. Обычная иллюстрация этой модели — колода игральных карт (или несколько колод), откуда карты (образцы) вытаскиваются без последующих перетасовок. Такая модель соответствует случаю конечной генеральной совокупности, из которой берется выборка без возвращения. Предположим, например, что требуется определить вероятность извлечения карты масти пик; так как имеется 13 таких возможностей из 52, вероятность извлечения карты пик будет $p = 13/52$. Ко второму извлечению совокупность будет состоять уже из 51 элемента и содержать только 12 карт пик; следовательно, искомая вероятность здесь равна 12/51; с другой стороны, если в первом случае была извлечена карта не пиковой масти, то вероятность извлечь карту пик во второй раз будет равной 13/51. Продолжая так рассуждать, можно увидеть, что вероятность меняется от испытания к испытанию, но что, кроме этого, она зависит и от предыдущего события.

Общее выражение для определения этой вероятности следующее [407]:

$$P\,(N_1) = \frac{(p_1 S)!\,(p_2 S)!\,(S-N)!\,N!}{(p_1 S - N_1)!\,(p_2 S - N + N_1)!\,S!\,N_1!\,(N-N_1)!}, \tag{14.25}$$

где число вероятности P сочетания N_1 элементов определенного рода есть $p_1 S$. Имеется N колод карт (конечных совокупностей), каждая из которых содержит S карт (элементов); $p_1 S$ представляет собой число благоприятных исходов (успехов), а $p_2 S$— число неблагоприятных исходов (неудач) [7].

Параметры, характеризующие эту функцию распределения, содержат значения N и S и являются довольно сложными [407]. Они, однако, приближаются к характеристикам биномиального распределения по мере увеличения S до значений, сравнимых со значением N (а также, когда выборка из N элементов мала сравнительно с генеральной совокупностью S). Эта функция имеет сходство с биномиальной, и классы частот можно находить по таблицам (например, в работе [360]). Важность такой функции заключается в том, что она соответствует модели процесса опробования конечной совокупности без возвращения. Чейс [55] предполагает, что выбор пересечений в шлифах при точечном подсчете является примером, аналогичным этой процедуре.

14.10. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Когда изменчивость содержания какого-либо компонента системы описывается биномиальным распределением (или близким к пуассоновскому), при подсчете совокупность довольно часто разбивается на подсовокупности в соответствии с числом изучаемых компонент, и в таком случае исследователю может понадобиться модель с разделением событий на классы, частоты которых меняются одновременно. Подходящей моделью для этого служит полиномиальное распределение.

Предположим, что некоторое наблюдение (событие) может быть отнесено к одной из k категорий A_1, A_2, . . . A_k и что вероятность попадания события в данный класс A_i есть P_i ($i = 1, 2, \ldots, k$); X_1, X_2, . . ., X_k— случайные величины, представляющие собой частоты событий, попадающих в k категории. Тогда для некоторой частной выборки, содержащей n_1 значений X_1, n_2 значений X_2 . . . и n_k значений X_k, вероятности будут

$$p_1^{n_1},\ p_2^{n_2},\ \ldots,\ p_i^{n_i},\ p_k^{n_k},$$

где $p_i^{n_i}$ — вероятность того, что значение X_i будет наблюдаться n_i раз в серии n испытаний. Так как любая последовательность k частот X_1, X_2, . . ., X_n и т. д. равноценна, можно подсчитать число возможных последовательностей, получаемых перестановкой n элементов, из которых n_1 относится к одному роду, n_2— к другому и т. д.:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}.$$

Вероятность появления данной последовательности X_1, X_2, . . ., X_k с частотами n_1, n_2, . . ., n_k будет определена выражением

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\,p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k},$$

где

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n,$$

которое аналогично общему выражению биномиального распределения, где $i = 2$. Предыдущее выражение соответствует членам разложения для

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n;$$

его можно получить точно таким же способом, как и в случае бинома [198, 220].

Параметры полиномиального распределения следующие:

$$\overline{X}_i = E(X_i) = np_i;$$

$$\sigma_i = np_i(1 - p_i) = np_iq_i.$$

Так как $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, различные значения X_iX_j зависимы, и поэтому ковариация (смешанный второй центральный момент) принимает вид

$$\mathrm{Cov}(X_iX_j) = -np_ip_j, \qquad i \neq j.$$

Предположим, в обломочной породе содержится 50% кварца, 30% обломков пород и 20% других составляющих; подсчитано 300 серий наблюдений по 4 наблюдения в каждой. Каковы ожидаемые частоты для сравнения с наблюдаемыми? Подсчет иллюстрируется табл. 14.11, где дается разложение трехчлена

Таблица 14.11

Полиномиальное распределение при $n=4$, $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$; n точек на выборку; подсчитано 300 выборок

p_1	p_2	p_3	$P(p_1, p_2, p_3)$	$300P(p_1, p_2, p_3)=$ = ожидаемая частота
4	0	0	0,0625	18,75
3	1	0	0,1500	45,00
3	0	1	0,1000	30,00
2	2	0	0,1350	40,50
2	1	1	0,1800	54,00
2	0	2	0,0600	16,20
1	2	1	0,1080	32,40
1	1	2	0,0720	21,60
1	0	3	0,0160	4,80
0	4	0	0,0081	2,43
0	3	1	0,0216	6,48
0	2	2	0,0216	6,48
0	1	3	0,0096	2,88
0	0	4	0,0016	0,48
Сумма			1,0000	300,00

$$(p_1+p_2+p_3)^n = (0{,}5+0{,}3+0{,}2)^4 = \frac{4!}{r_1!\,r_2!\,r_3!}\cdot 0{,}5^{r_1}0{,}3^{r_2}0{,}2^{r_3};$$

$$r_1+r_2+r_3=4, \qquad r_i=0, 1, \ldots, 4.$$

Очевидно, что по мере возрастания числа категорий расчеты такого рода становятся очень утомительными; тогда следует использовать приближения, подобные использованным таблицам факториалов (таблицы Барлоу).

14.11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Были представлены модели распределений с описанием возможных исследовательских ситуаций их применения. Все эти примеры или хорошо известны, или их можно представить в качестве тех, которые встречаются при геологических исследованиях; во всяком случае, они не исчерпывают все такие возможности (см., например, работы [7, 318 и 423]). Необходимо подчеркнуть два момента. Первый заключается в том, что почти всегда возможно найти некоторую функцию распределения, описывающую полученный набор наблюдений, например, использовав серии частотных кривых Пирсона или Грама Шарлье [233, 407]. Однако в этом нет необходимости, если такое представление нельзя связать с физической моделью. Но, согласно принципу экономии, некоторая польза будет хотя бы за счет сокращения массива наблюдений, но с достаточно информативными оценками параметров, если эти параметры имеют ясное физическое значение. Иначе говоря,

подбор функции распределения сам по себе еще не обладает большой ценностью, за исключением удобства, получаемого при свертывании информации. Второй момент заключается в том, что иногда следует построить модель, которая аппроксимирует наблюдаемое распределение; и, хотя серия полученных данных может отклоняться от модели, причина этого отклонения объясняется, по-видимому, неслучайностью выборки. Конечно, можно установить такой способ отбора событий, при котором полученная система данных будет согласовываться с предложенной моделью; однако здесь снова возникает неопределенность. Начинаем ли мы с выбора модели и по ней определяем случайность выборки, или же начинаем с регулирования выборки и в предположении ее случайности ищем подходящую модель распределения, все равно дилемма эта возникает. Единственное ее решение, видимо, заключается в следующем требовании: оба приближения должны сойтись на некоторой конечной стадии аппроксимации.

ГЛАВА 15

Связь между средним и дисперсией

Как правило, когда при научных наблюдениях обнаруживают неконтролируемую изменчивость, значительно превышающую основную массу наблюдений, удобно перед вычислением оценок их средних или дисперсий переводить их значения в логарифмические; в результате этого действия повысилась бы точность оценок и изменения характера вытекающих из них выводов.

J. H. Gaddum, Lognormal Distribution, Nature, 156, p. 466 1945

15.1. ВВЕДЕНИЕ

После того как модель распределения результатов некоторого физического (природного) процесса выбрана, необходимо оценить параметры этой модели на основе собранных данных. Наиболее общий подход к проверке пригодности модели обычно базируется на рассмотрении четырех первых моментов (см. раздел 5.4). Затем необходимо изучить оценки параметров с целью выяснить, независимы они или же как-то связаны.

Предположим, выбрана нормальная модель, которая определяется двумя параметрами μ и σ^2; о их значениях можно судить по соответствующим выборочным оценкам — среднему $\overline{X}$ и выборочной дисперсии $\hat{\sigma}^2$. В случайной выборке из нормальной совокупности среднее не зависит от дисперсии, поэтому проверка их независимости является проверкой случайности опробования.

Взаимоотношения между статистическими оценками могут определяться различными причинами; например, в биномиальном распределении среднее np в известной мере зависит от дисперсии npq при использовании как параметров, так и оценочных функций; но, если оценки получены не по данным случайной выборки, взаимоотношения могут отличаться от ожидаемых. Опять же, поскольку ожидаемое поведение параметров может быть постулировано на основании свойств модели, процедура измерения может искусственно вызвать смещение, которое приведет к иным взаимоотношениям рассматриваемых параметров. Поэтому изучение взаимоотношений между оценками представляет существенный интерес в качестве проверки выполнения условий модели. Без этого не обойтись не только вследствие необходимости выявить экспериментальные трудности (определяющие причины), но также вследствие необходимости избрать такую аналитическую процедуру, чтобы ее требования выполнялись в последующем статистическом анализе [1]. Преобразования выбирают так, чтобы можно было получить характеристики с нужными свойствами для проверки гипотез и обеспечить

[1] В частности, например, следует убедиться, что дисперсии однородны, постоянны и аддитивны.

надежность вероятностных утверждений, на основании которых делаются выводы.

В общем процедуру измерений, которая ведет к данным «естественной» шкалы, невозможно выбрать a priori, и поэтому единицы измерения выбирают главным образом из соображений условности и удобства. Преобразования можно затем рассматривать как служащие целям эффективного контроля данных, получаемых в результате измерений. Довольно часто, например, «природа» «оперирует» геометрической шкалой и измерения, выполненные по арифметической шкале, оказываются трудоемкими в работе; если же измерения преобразовать в логарифмическую шкалу, переменные могут подчиняться нормальному закону или какой-либо другой из известных функций распределения [227]. Маловероятно, что шкалы, которые мы избираем для классификации данных, являются ab initio, т. е. «лучшими», так что трансформация представляет собой весьма общую процедуру [138].

Изучение взаимоотношений между оценками представляет, кроме того, интерес как для достижения требований теоретической модели, так и для понимания физического смысла изменений изучаемой величины.

15.2. ВЗАИМООТНОШЕНИЯ СРЕДНЕГО И ДИСПЕРСИИ В МОДЕЛЯХ

Выше упоминалось, что если модель определена, то взаимоотношения между средним μ и дисперсией σ^2 или средним μ и стандартным отклонением σ также в общем должны быть известными. Среднее μ не зависит от дисперсии σ^2 в случайных выборках из нормально распределенной совокупности. При нормальном распределении выборки не случайны, если выборочное среднее $\overline{X}$ связано с выборочной дисперсией $\hat{\sigma}^2$. Для параметрического статистического анализа необходимо повторять и изменять отбор до тех пор, пока не будет достигнута случайность выборки, изменять процедуру так, чтобы исчезло смещение или же применять соответствующее преобразование (см. следующий раздел), чтобы можно было убедиться в независимости среднего от дисперсии.

При использовании дискретной шкалы и биномиальной модели среднее μ зависит от σ^2, ибо $\mu = np$, а $\sigma^2 = npq$. Можно видеть, что дисперсия возрастает вместе с возрастанием p от 0 до 50 единиц и затем симметрично убывает от 50 до 100 единиц (см. табл. 10.3); таким образом, максимальное значение дисперсии равно 50. Когда шкала пропорционально изменена путем деления на n или переведена в процентную делением на n и умножением на 100, дисперсия становится минимальной при значении 50 и симметрично возрастает в обе стороны от этого значения. Если по системе выборочных данных станут известны эти взаимоотношения и если мы собираемся использовать, скажем, дисперсионный анализ, то необходима трансформация измерений в такую шкалу, по которой среднее стало бы независимым от дисперсии ([22] и табл. 15.1).

В распределении Пуассона $\mu = np$ и $\sigma^2 = np$; таким образом, дисперсия возрастает вместе со средним; поэтому при параметрическом анализе, выполняемом по данным, согласующимся с функцией распределения Пуассона, требуются преобразования в такую шкалу, в которой среднее независимо от дисперсии ([22] и табл. 15.1).

У большинства функций распределения, обладающих асимметрией, среднее так или иначе связано с дисперсией; аналогично, если эксцесс значителен, в последующих сравнениях среднего и дисперсии отражается влияние «дисперсии дисперсии». Очень часто, когда среднее и дисперсия связаны, выборочные данные имеют дисперсию, существенно зависящую от другой случайной величины; а в тех данных, которые обладают дисперсией, возрастающей вместе с возрастанием среднего или уменьшающейся при возрастании среднего, дисперсия гетерогенна. Это является серьезной причиной неко-

торых неудач статистического анализа, основанного на двухмерных данных (см., например, работы [169, 181]).

Таблица 15.1

Преобразования переменных, полученных при измерении петрографических свойств различными методиками

Свойство	Плотность распределения [1]	Взаимоотношения среднего и дисперсии	Преобразования
1	2	3	4
Данные по составу или вычисленные	(5—95%) биномиального	$\mu = np$; $\sigma^2 = npq$	$\sin^{-1}\sqrt{\bar{X}}$
Шлифы	(< 5 или > 95%) пуассоновского	$\mu > np$; $\sigma^2 = np$	$\sqrt{X}$, или $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$
Акцессорные минералы	Отрицательно биномиального		
Любая классифицируемая случайная переменная	Переменного		Информация H $H = -\sum_i p_i \log p_i$
Размер зерен	Унимодального (?); изменяется по асимметрии и эксцессу	Изменяющиеся	Эмпирическое определение, когда взаимоотношения $\bar{X}$ до $\hat{\sigma}^2$ известны
Косвенные замеры			
Шлифы	Положительно асимметричного	μ пропорционально σ^2	$\log X$, или $X = 2^{-\phi}$
Прямые замеры свободных зерен	То же	То же	То же или эмпирические функции
Форма зерен			
Сферичность и окатанность по Уоделлу	Биномиального или пуассоновского	» »	
Сферичность и окатанность, определенные визуально	Биномиального или пуассоновского (?) или преобразования информации	» »	То же или эмпирические функции
Линейная комбинация осей по ϕ	Нормального	Независимы	Нет
Ориентация	Прямоугольного	$\bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2$ в небольших случайных выборках склонны к независимости	Нет
	Нормального	Независимы	Нет
Упаковка	Биномиального или пуассоновского	»	Нет
Плотность	Биномиального (по мере возрастания n, приближающегося к нормальному)	»	Нет
Пористость	Биномиального (%, по мере возрастания n приближающегося к нормальному)	»	Нет
Проницаемость	Положительно асимметричного	$\bar{X}$ пропорционально $\hat{\sigma}^2$	$\log X$, или $X = 2^{-\phi}$

[1] Все эти плотности распределения обобщены центральной предельной теоремой, так что средние случайных выборок стремятся к нормальному распределению по мере возрастания n.

Как показано в разделах 13.13 и 14.6, могут возникать и различные другие взаимоотношения между средним и дисперсией, которые требуют

некоторых стабилизирующих преобразований. В общем случае, когда это достижимо, определенная экспериментальная процедура может быть приведена в соответствие с подходящей моделью распределения путем модификации процедуры отбора. Когда экспериментальные данные собраны, а функция распределения еще не известна, рекомендуется рассмотреть различные статистические критерии с целью выявить малейшую степень зависимости между средним и дисперсией. Если появляются признаки этой зависимости, следует предпринять меры по изменению экспериментальной процедуры или применить преобразования, чтобы, насколько это возможно, подчинить исходные данные тем требованиям модели, которые входят в используемые статистические оценки. Предположения, лежащие в основе процедуры дисперсионного анализа, детально рассмотрены Эйзенхартом [109]; о влиянии расхождений на результаты оценивания писал Кокран [75], а Бартлетт [22] установил и рассмотрел те преобразования, которые могут быть использованы в случаях, когда собранные данные оказываются выраженными в форме, не подходящей для дисперсионного анализа.

15.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ДОСТИГНУТЬ НЕЗАВИСИМОСТИ СРЕДНЕГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО $\overline{X}$ И ВЫБОРОЧНОЙ ДИСПЕРСИИ $\hat{\sigma}^2$

Если распределение известно, а используемая выборка действительно случайна, взаимоотношения между μ и σ^2 можно выразить в постулированном виде. Для тех видов распределения, в которых взаимоотношения между μ и σ^2 принимают известные формы, нужные преобразования установлены теоретически. Перечень таких преобразований для обычных моделей приводится в табл. 15.1, аналогичный перечень табулирован Крамбейном и Миллером [260], Крамбейном [261], а также Миллером и Каном [299]. Таблицы, облегчающие подобные преобразования, приводятся в работах [128] и [409]. В табл. 15.1 включены такие распределения, которые ожидаются для случайного опробования геологических совокупностей с использованием процедур измерений, описанных в предыдущих главах (см. также работу [261]). Например, если надлежащим способом опробована совокупность стратифицированных образований, скажем слоев обломочных осадочных пород, с использованием таких единиц, как пласт, и если из образцов выбраны зерна кварца с целью определения их устойчивых характеристик, то логарифмы длинных осей кварцевых зерен, замеренных непосредственным способом, как это описано в разделе 4.10, окажутся нормально распределенными. Может, конечно, произойти смещение вследствие различных отклонений от рекомендованной процедуры анализа, и в общем случае, если будет это смещение, частотная функция измерений осей кварцевых зерен также соответственно отклонится от нормальной модели. В частности, заметим, что почти наверняка возникнут некоторые связи между выборочным средним $\overline{X}$ и выборочной дисперсией $\hat{\sigma}^2$. Поэтому проблема проверки утверждения, что данные измерений собраны надлежащим образом, не столь уж тривиальна.

Когда исходный материал собран, а функция распределения еще не известна и при этом появились признаки зависимости между $\overline{X}$ и $\hat{\sigma}^2$, необходимо подобрать форму преобразований для перевода данных в такую шкалу, в которой $\overline{X}$ независимо от $\hat{\sigma}^2$. Бартлетт [22] рекомендует следующую процедуру. Предположим, что дисперсия σ^2 представляет некоторую функцию f от среднего m, т. е. $\sigma^2 = f(m)$; тогда для любой функции $g(x)$ выполняется приближенное равенство: $\sigma_g^2 = \int (dg/dm)^2 f(m)$.

Если дисперсия постоянна, например C^2, то

$$g(m) = \int \frac{C\,dm}{\sqrt{f(m)}}. \qquad (15.1)$$

Предположим далее, что $f(m)$ пропорционально m^2, тогда аппроксимирующее преобразование будет $g(m) = \log m$. Пример применения такой процедуры дан Розенфельдом и Гриффитсом [363]. Если применена эмпирическая процедура такого рода, следует учесть, что данное преобразование, полезное для материалов, на которых оно основано, может оказаться неприменимым за пределами данной ситуации. Так, в приведенном выше примере [363] значение окатанности более чем 0,7 единицы дает отрицательное значение, поэтому данное преобразование нельзя считать подходящим для всех случаев изучения окатанности.

Множество взаимоотношений между средним $\overline{X}$ и дисперсией $\hat{\sigma}^2$ или стандартным отклонением изображено графически в работе [340] с рекомендациями для соответствующих преобразований; этими взаимоотношениями довольно часто (см. ниже) приходится пользоваться для понимания природы изменений случайной переменной и (или) для выяснения причины смещения.

15.4. ПРИМЕРЫ РЕАЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ОЦЕНКАМИ

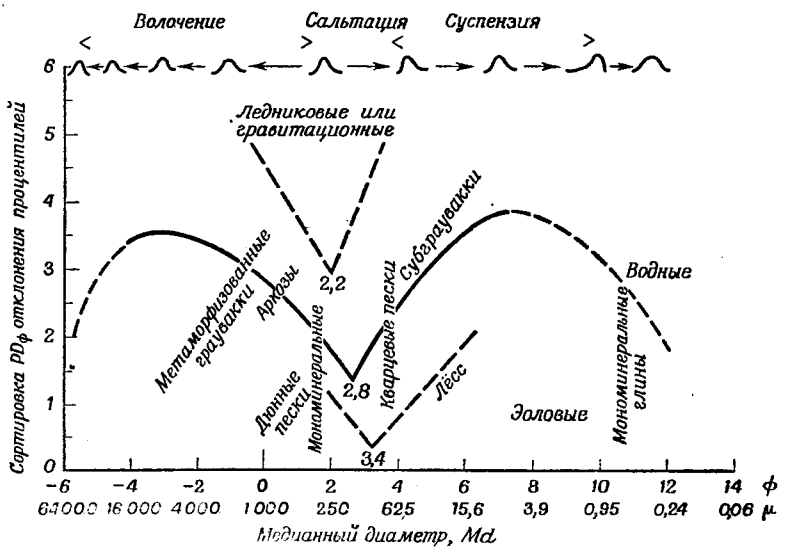
15.4.1. Размеры зерен и сортировка по размерам

Средние размеры зерен и характер распределения (дисперсия) этих размеров представляет значительный интерес для геологических исследований, так как часто полагают, что размер зерен отражает местные условия седиментации, такие, например, как скорость течения (см. раздел 13.12). Дисперсия размеров зерен в общем случае выражает *отсортированность* (мера однородности по размерам зерен) и рассматривается как возможность типизировать определенные геологические процессы; например, эоловые пески хорошо отсортированы, а флювиогляциальные — плохо, что соответственно отражает разницу в характере деятельности ветра и льда и что сказывается на размерности переносимого материала. Если распределение случайной величины, характеризующей размеры зерен, нормально, то среднее $\overline{X}$ и выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2$ или стандартное отклонение $\hat{\sigma}$ отражают средний размер и отсортированность по размерам; но если распределение ненормально, на меру сортировки будут влиять различные другие оценки; в частности, важное значение приобретает эксцесс. У наиболее хорошо отсортированных осадков зерна одинакового размера; в этом случае при любом измерении одновременно получают и среднее значение; дисперсия в этом случае равна нулю. Если же есть хотя бы небольшое различие в размерах зерен, дисперсия становится отличной от нуля, а эксцесс — бесконечно большим. Поэтому в случае отклонения распределения от нормального оценивать отсортированность по размеру зерен надо осторожно.

Другая весьма интересная черта процедуры измерения размеров зерен состоит в том, что различная методика приводит к различным результатам (гл. 3) и, в частности, к различным связям между средним $\overline{X}$ и дисперсией $\hat{\sigma}^2$ или соответственно между размерами и степенью отсортированности.

Связь между размерами зерен и степенью их отсортированности при косвенных измерениях. Если размеры зерен определяются не прямыми измерениями, например путем просеивания или прокапывания, наблюдаемая кривая распределения будет открытой в области крайних значений (см. раздел 5.2); в таких случаях для оценки среднего μ и стандартного отклонения σ,

надо использовать такие статистики, как медиана Md_ϕ, полуразмах квартиля QD_ϕ или полуразмах квантиля PD_ϕ. Обычно обнаруживается, что между медианой и оценкой дисперсии существует связь [150, 213, 394]. Эта тенденция может трактоваться как линейная по отношению к некоторому диапазону размеров зерен (см., например, работу [150]), но она оказывается нелинейной для всего ряда размеров [150, 151]. Этот весь ряд не представляется адекватно, по-видимому, вследствие систематической ошибки опробования (см. раздел 5.6), но по опубликованным данным можно вывести гипотетические связи для ряда от —6 до 14ϕ(от 64 *мм* до 0,06 *мк*), что показано на фиг. 15.1. Если генеральная совокупность рассматривается в целом, то медиана значений размеров зерен окажется независимой от дисперсии



Ф и г. 15.1. Размеры Md_ϕ и отсортированность по размерам PD_ϕ в обломочных осадках; косвенная процедура измерений.

в единицах ϕ, как это можно было бы ожидать по случайному опробованию нормальной совокупности (см. фиг. 5.4 и раздел 5.6). Эту общую закономерность можно выразить двумя горбообразными кривыми на основании характеристик транспортируемой среды; размеры от 4 до 14 ϕ (от 62,5 *мм* до 0,06 *мк*) отражают тонкозернистый обломочный материал, который переносится в виде суспензий, в то время как в интервал от 2 до —6 ϕ (от 250 *мк* до 64 *мм*) входит грубозернистый материал, транспортируемый волочением. Эти два вида переноса перекрываются в области от 2 до 4 ϕ (от 250 *мк* до 62,5 *мм*); частицы такого размера переносятся уже сальтацией. Такую закономерность можно подразделить и далее — на тройные серии при использовании сортирующих характеристик различных сред; наиболее тонкая сортировка материала происходит в результате эоловых процессов (дюнные пески и лёссы), при этом дюнные пески переносятся путем сальтации, а лёссы образуются за счет переноса в виде суспензий. По-видимому, примеров эолового детрита, который отвечал бы по размерам интервалу от 1,5 до 6 ϕ-единиц (от 35 до 15,6 *мк*), наберется не много.

Обломочный материал субаквального происхождения можно классифицировать аналогично. Наиболее плохо отсортированные осадки характеризуют ледниковые и гравитационные процессы седиментации. Не совсем четкий характер этой закономерности в основном объясняется недостаточным количеством информации по распределению размеров частиц в подобных отложениях.

Наиболее хорошо отсортированные осадки соответствуют областям около 3,4 ϕ (95 *мк*), 2,8 ϕ (144 *мк*) и 2,2 ϕ (218 *мк*), т. е. трем различным средам отложения. Как и следовало ожидать, агенты переноса и их транспортирующие характеристики действуют как процессы неслучайного отбора, они приводят к различной степени асимметрии распределения, которая отражает интенсивность селективной сортировки при каждом процессе.

Теперь рассмотрим асимметрию и эксцесс, измеренные надлежащим способом и определенные [250, 248] как

$$Skq_\phi = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\mathrm{Md}}{2} \tag{15.2}$$

и

$$Kq_\phi = \frac{2(P_{90} + P_{10})}{Q_3 - Q_1}\,. \tag{15.3}$$[1]

Можно видеть, что эти линейные функции имеют одни и те же параметры — медианы, квартили и квантили — размеров (медиана) и отсортированности (QD_ϕ и PD_ϕ); поэтому они не могут быть независимыми, и в построении этих статистик более высокого порядка мало смысла вследствие того, что результат их можно предсказать по взаимоотношению между медианой и оценкой дисперсии.

Возвращаясь к графику отсортированности, представленному на фиг. 15.1, и рассматривая плотность распределения выборок, в которых наблюдается приведенная закономерность, заметим, что данная функция при значениях около —6ϕ, от 2 до 4ϕи от 12 до 14ϕ, склонна к симметричности и по крайней мере приближается по форме к нормальной кривой. Во всех этих трех областях значений обломочный материал становится монодисперсным, т. е. мономинеральным; например, галька, при осаждении ведущая себя одинаково, в области —6ϕ, кварцевые зерна в интервале от 2 до 4ϕ и вид глинистых минералов, представляющий интервал от 12 до 14ϕ-единиц. Если начать с типичного песка, сложенного кварцем при среднем размере зерен (медиана), равном 3ϕ, и последовательно и постепенно увеличивать в нем количество глинистых минералов, частотная кривая будет все более отклоняться от симметричного вида, т. е. в первую очередь увеличится асимметрия. В конце же асимметрия уменьшится, кривая снова станет симметричной в области, соответствующей осаждению из воды в виде суспензии; если же продолжать добавлять глинистые минералы, знак асимметрии, которая станет возрастать и затем вновь уменьшаться, изменится и кривая будет опять симметричной (нормальной) близ значения 12ϕ. Аналогичные изменения симметрии кривой происходят в интервале от 2 до —6ϕ-единиц при последовательном увеличении в кварцевом песке содержания «гравия» (обломков пород). Изменения асимметрии кривой с добавлением к песку гравия или глины сопровождаются изменениями минерального состава, размеров зерен, облика породы; следовательно, изменения так называемой размерной частотной функции действительно отражают изменения трех независимых переменных, как и описано в гл. 3.

Нет смысла дальше разъяснять как, используя модель, можно предсказывать взаимоотношения в пределах всего ряда кластических осадков; а попытки интерпретировать «значение» плотности распределения размеров частиц пород не смогут преодолеть путаницу в изменениях, которые зависят от трех различных причин. Действительно, это не будет истинной величиной измерения; изменение описанных статистик отражает лишь ту величину, о которой было сказано в гл. 3 и 4. Размерность зерен в общем не может быть связана исключительно с характеристиками транспортирующей среды

[1] Это отношение взято обратным выражению, которое привел Крамбейн, чтобы возрастающие значения эксцесса отражали возрастание пикообразности.

вследствие полигениости кластического материала, поэтому строгий математический анализ здесь неприменим. Процедура измерения размеров зерен и их обработка в лучшем случае может привести лишь к выводам о порядке полученных данных.

Связь между размерами зерен и их отсортированностью по размерам (наблюдения в шлифах). При измерениях кварцевых зерен в шлифах (*a* — длинная ось, *b* — короткая), как это рекомендовалось в разделе 6.3.1, опять же применяется ϕ-нормальная функция распределения. Следовательно, можно было бы ожидать, что, если выборка случайна, средний размер зерен, представленный в данном случае выборочным средним $\overline{X}_\phi$, и отсортированность, выражаемая выборочным стандартным отклонением $\hat{\sigma}_\phi$, будут независимы друг от друга [1]. Мерой линейной зависимости здесь может быть коэффи-

Таблица 15.2

Взаимоотношения между размером $\overline{X}_\phi$ и размерностью сортировки $\hat{\sigma}_\phi$, определенной как корреляционный коэффициент r; использованы измерения осей кварцевых зерен из песчаника Мэкстон, Западная Виргиния; измерения выполнены по шлифам

Статистики	$\overline{X}_a$	$\overline{X}_b$	$\hat{\sigma}_a$	$\hat{\sigma}_b$
$\overline{X}_a$		+0,993 **	−0,263	−0,255
$\overline{X}_b$			−0,276	−0,280
$\hat{\sigma}_a$				+0,724 **
$\hat{\sigma}_b$				

Примечание. Для *a* — длинная ось, ϕ-единицы; для *b* — короткая ось, ϕ-единицы; n — 33 шлифа; $r > 0{,}349$ *; $r > 0{,}449$ **.

циент корреляции (см. раздел 21.12), пример дан в табл. 15.2, где используются данные измерений осей кварцевых зерен в шлифах из миссисипских песков Мэкстон, Западная Виргиния.

Сходные результаты получены при аналогичной обработке других песчаниковых отложений, например песчаников Солт-Уош [164], Кау-Ран [167], Чипмунк [410, 319], Уэйнсберг и Мидл-Киттаннинг [399] и кварцитов Тускарора, Орискани и Хомвуд [457]. Следовательно, при изучении размеров кварцевых зерен по их осям в шлифах можно убедиться в том, что среднее обычно не зависит от стандартного отклонения. При некоторых таких исследованиях в результате обработки наблюдений слабую зависимость можно принять за значительную, но, если учесть, что коэффициент определенности r^2 (см. раздел 21.2), выраженный в процентах, редко превышает 10% или он не более 10% изменчивости размеров осей кварцевых зерен, что обычно для среднего и стандартного отклонения, этой ошибки не произойдет. В табл. 15.2 перечислены стандартные отклонения для случая, когда коэффициент корреляции для той или другой пары осей значителен, что наблюдается при слабой линейной зависимости между этими парами, вызванной плохой методикой составления выборки (чему подвержены 5% подобных исследований) или же неслучайностью самого процесса отбора проб.

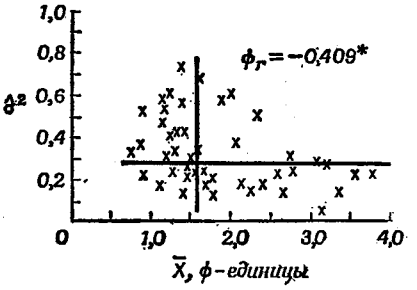
Рассмотрим в качестве примера процедуру измерения осей «кварцевых» зерен в шлифах из образцов кварцитов Потсвилл и Тускарора (восточная Пенсильвания) [273].

[1] Область значений $\hat{\sigma}$ — от 0,25 до 1,5 ϕ-единиц; см. разделы 5.7 и 17.6.

Результаты изучения 54 образцов кварцитов Потсвилл показали, что среднее и дисперсия значений размеров длинных осей кварцевых зерен независимы. По 46 образцам из формации Тускарора был подсчитан порядковый коэффициент корреляции ϕ [341] между средним размером $\overline{X}_\phi$ и стандартным отклонением $\hat{\sigma}_\phi$ длинных осей, что дало значительную величину $\phi_r = -0{,}409$ (для $n = 46$, при 5-процентном уровне значимости) [341]. На этом основании можно допустить, что около 16% изменчивости этих двух критериев общие, а 84% независимы.

Если этот коэффициент корреляции реален, то дисперсия должна возрастать по мере увеличения значения среднего ϕ или увеличения среднего размера зерен (фиг. 15.2); другими словами, тенденция к огрублению зернистости «кварца» значительно сильнее тенденции к уменьшению зернистости. Однако эта зависимость хотя и существенна, но все же мала и может быть отражением пристрастного отбора.

Зависимость между размерами зерен и их отсортированностью при прямых измерениях отдельных зерен. Снова возьмем ϕ-нормальную модель



Фиг. 15.2. Размеры $\hat{X}_\phi$ по отношению к сортировке $\hat{\sigma}_\phi$ по длинным осям кварцевых зерен из кварцитов Тускарора [273].

функции распределения и предположим, что в случайной выборке среднее независимо от дисперсии. Такие предположения подтверждаются на немногочисленных материалах, которыми являются, например, кварц из тяжелых и дюнных песков [204], кварцитовая галька из гравия Нью-Джерси [411, 412], обломки кварцитов из осыпей формации Тускарора, кварцитовая галька конгломератов Олиан и кварцитовые зерна из кварцитов Хомвуд [169, 181]. Детальное изучение изменений размеров и формы зерен кварца, граната и роговой обманки из пляжных, дельтовых и ледниковых отложений плейстоцена Онтарио (Канада) описано Мак-Интайром [295]; здесь нет какой-либо явной закономерности, и для 5-процентного уровня линейная зависимость среднего и дисперсии, оцененная коэффициентом корреляции среднего ϕ ($\phi_r = -0{,}288$, $n = 81$) не очень значительна [341]. Даже если это значение и существенно, общая изменчивость для средней и дисперсии должна была бы быть менее 10%. Здесь стандартное отклонение снова имеет очень ограниченный размах, аналогичный тому, который получается при изучении шлифов, где значение $\hat{\sigma}$ изменяется от 0,2 до 1,0ϕ -единиц.

15.4.2. Форма частиц в осадках и их отсортированность по форме

Взаимоотношения между средним $\overline{X}$ и дисперсией $\hat{\sigma}^2$ сферичности и окатанности кварцевых зерен в обломочных отложениях описаны в гл. 6.1. Если процедуру измерения этих параметров производить визуально, то зависимости по сферичности можно и не заметить, но зависимость по окатанности заметить можно. Набор данных в этой области для какого-либо обобщения очень ограничен; исследователи же области распределения окатанности обычно сильно склоняются к малым ее значениям. Необходимы какие-то преобразования, но предложить общие рекомендации пока трудно.

При измерениях формы зерен в шлифах средние значения длины и ширины зерен в ϕ-единицах независимы от соответствующих ϕ-стандартных отклонений. Если измерения выражены на миллиметровой шкале и форма оценена по двумерным графикам длинных и коротких осей, эти графики имеют дисперсию, сильно зависящую от другой случайной величины [168, 181]. При логарифмическом преобразовании встает дилемма: использовать ли отношение длинной оси к короткой (a/b) или же короткой к длинной (b/a)? Во втором случае интервал будет от 0 до 1, а в первом — от 1 до ∞; оба отношения содержат одну и ту же информацию и чаще всего используется отношение b/a. Распределение обычно приближается к нормальному, хотя иногда возникают различные степени усечения, в частности эксцесс накопления частот в классах, близких значению отношения $b/a = 1$ (сечения круглых зерен).

Для ближайшего будущего подходящим аналитическим аппаратом представляется в ϕ-преобразование для осей, а линейная, регрессионная, модель (фиг. 6.8) — для описания соотношений между осями. При применении этих процедур упорядочение осей на $a > b$, измеренных в миллиметрах ($b < a$ в ϕ-единицах), усекает двухмерный график. Это в свою очередь влияет на коэффициент корреляции и приводит к корреляции, равной 0,66 для двухмерного случя (Smith, личное сообщение). Но так как корреляция средних значений по малой выборке обычно ожидается как $r = 0{,}75$, некоторая связь все же имеется, несмотря на псевдокорреляцию. Возможно, это и хорошо, когда связь между длинными и короткими осями зерен действительно равна нулю, в то время как связь между выборочными средними по мере увеличения количества зерен в выборке или количества выборок возрастает ([164] и раздел 21.15).

Так как измерение осей зерен в шлифах фактически представляет процедуру измерения «кажущихся» длинных и коротких осей, результат такой работы основан на эмпирических данных и в каком-либо простом соотношении с фактическим (реально существующим) изменением формы может не выразиться.

Когда измерения формы выполнены непосредственно на отдельных частицах породы, данные по всем трем осям — длинной a, средней b и короткой c — могут быть преобразованы от миллиметровой или микронной шкалы к ϕ-единицам; тогда распределение размеров любой оси должно быть ϕ-нормальным. Любое линейное сочетание этих данных измерений распределено также нормально, например коэффициент сферичности (эллипсоидальности) ψ, рекомендованный Крамбейном [252], определенный как

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}},$$

а после трансформации

$$\psi' = \frac{1}{3}(b_\phi + c_\phi - 2a_\phi),$$

и значение ψ' тоже будет нормально распределенным, что подтверждается эмпирическими исследованиями [81, 82]. Можно утверждать, что такие выборочные средние, как $\overline{X}$ и дисперсия $\hat{\sigma}^2$, будут независимы, что и видно на фиг. 6.15. Однако, когда образцы группируются по петрографическим свойствам на аркозы, субграувакки и кварциты, полученные средние и дисперсии становятся зависимыми. В трех образцах аркозов, отобранных для изучения источников сноса, расположенных недалеко от места переотложенного материала, выборочные средние очень малы, в то время как дисперсия весьма изменчива. С другой стороны, в трех образцах кварцитов, представляющих обломочный материал, перенесенный с далеко расположенного источника сноса, дисперсии менее изменчивы, а колебания средних более значительны. У субграувакк обнаружены промежуточные значения, в кото-

рых наблюдается связь (в данном случае линейная) между средними и дисперсией. Эта зависимость, положенная в основу выборочной модели, представленной на фиг. 2.3, является отражением степени избирательной сортировки по форме, происходящей при переносе обломочного материала (кварца) от питающей провинции к месту отложения. Что же касается взаимоотношения между средним и дисперсией, то оно отражает различные степени смещения, которое может быть использовано для характеристики различных процессов образования обломочного материала. Иначе говоря, оно характеризует фации.

Измерение степени окатанности тех же кварцевых зерен приводит к аналогичным зависимостям между средними значениями и дисперсиями, что отражает те же процессы селективной сортировки. Вероятно, что данные по окатанности, как это видно по результатам лабораторных экспериментов (см. раздел 6.7), более тонко отражают условия осадкообразования, чем показатели сферичности.

В дальнейшем можно рекомендовать при исследовании формы [1] обломков применять такой способ отбора, который помог бы ликвидировать как различия между средними, так и дисперсионные взаимоотношения в пределах подсовокупностей, если сходимость между подсовокупностями будет значительной. Эта рекомендация равносильна рекомендации пользоваться только случайными выборками, т. е. стремиться к тому, чтобы к выборочным данным могла быть применима равновероятностная модель.

15 4.3. Состав осадков и отсортированность по составу

Правила о взаимозависимости между средним и дисперсией можно рассматривать как вравноценные вообще для любых переменных, так что понятие о взаимосвязи по размерам и отсортированности по размерам не ограничивается областью изучения только размеров зерен. Когда изучают изменение состава, при процедуре подсчета может оказаться, что модель дискретного распределения подходит и в этом случае. Если имеется k ($k = 2$) классов, то подходящим будет биномиальное распределение или распределение Пуассона; когда же классов более 2 ($k > 2$), подходящей моделью можно считать полиномиальные функции. Первый вид моделей, где соотношение между средним и дисперсией довольно определенное, уже рассмотрен, также рассмотрена и полиномиальная модель (см. раздел 14.10), где среднее связано с дисперсией таким же способом, как и в биномиальной (см. стр. 250). Следует, однако, добавить, что ковариационные соотношения возникают между разными классами и это усложняет обработку подобных данных. Чейс [56, 65—67] описал влияние таких зависимостей на сравнения частот распределения состава двух или более классов, и, в частности, он подчеркнул, что возможна ложная корреляция. Допустим, есть три переменные величины, составляющие 100%, т. е. сумма постоянна; при этом условии, если частоты любых двух величин возрастают, частота третьей должна убывать, что приводит к различным степеням отрицательной связи между этими переменными. Из-за этой особенности изучать изменение состава без простейших количественных сопоставлений очень трудно.

Ясно также, что монотонные преобразования эффективными не будут. Сейчас развитие теории информации [390] достигло уровня, допускающего применение статистического анализа [272, 299], и энтропиеподобная функция Шеннона — Винера

$$H = -\sum_i p_i \log p_i \qquad (15.4)$$

[1] Такие же рекомендации по составлению выборок применимы для любых свойств, испытывающих влияние селективной сортировки, так что наши рекомендации являются довольно общими.

может служить приемлемым преобразованием для анализа однотипных данных. В этом преобразовании могут быть использованы различные основания логарифмов: 10, e или 2; последнее, будучи основанием бинарных шкал, образует бинарные отношения, лежащие в основе вычислений на электронно-вычислительных машинах. Кульбак [272] приводит таблицу *plnp*, облегчающую подобные преобразования при статистическом анализе. Применяя логарифмы с основанием 2, для преобразованных данных можно давать непосредственную меру информации в *битах* (недостаточную для двоичной системы); было предложено называть соответственно преобразованные данные *нитами*, если в качестве основания логарифмов используется e, *логитами*, если основанием является 10 [283].

ϕ-преобразование, впервые предложенное Крамбейном [247], можно представить как

$$d = 2^{-\phi},$$

где d — диаметр в миллиметрах; при преобразовании с основанием 2 это выражение превращается в

$$\log_2 d = -\phi, \text{ в битах.}$$

Следовательно, если применяются информационные преобразования на основании логарифмов 2 по отношению к данным, представляющим изменения состава и выраженным в процентах, то результаты преобразований получаются в битах, т. е. в той же шкале, как и данные о размерах (и форме) зерен.

Применение теории информации в геологии впервые предложено Пелто [328]; некоторые примеры рассмотрены Миллером и Каном [299]; пример использования информационных преобразований для процентных данных приведен Гриффитсом.

15.5. КОЭФФИЦИЕНТ ИЗМЕНЧИВОСТИ

Под другим аспектом рассмотрена зависимость между средним и дисперсией, что требует использования коэффициента изменчивости CV, который определяется как

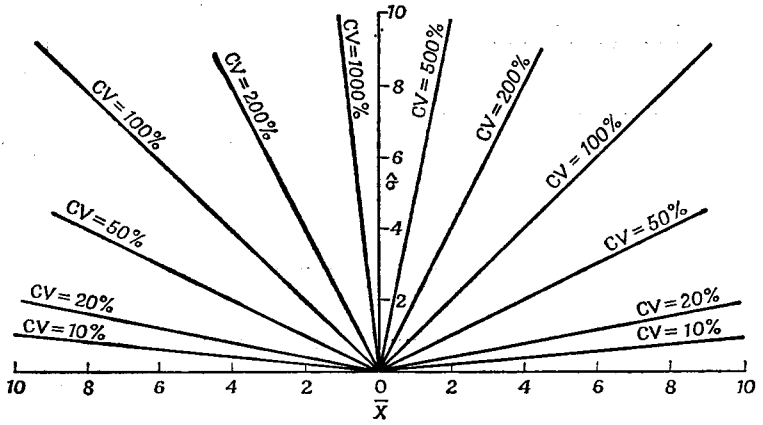
$$\mathrm{CV}\% = 100\frac{\hat{\sigma}}{\overline{X}}; \qquad (15.5)$$

он представляет частное от деления стандартного отклонения $\hat{\sigma}$ на среднее $\overline{X}$ в процентах. Коэффициент изменчивости обладает коварной привлекательностью вследствие кажущейся возможности сравнивать изменения различных переменных независимо от вида применяемой шкалы, иначе говоря, он безразмерен. Им можно пользоваться только в том случае, когда основывающие его данные достигают уровня отношений (см. раздел 12.5), но когда данные не достигают этого информационного уровня, применение его может привести к ошибкам.

На фиг. 15.3 коэффициент изменчивости графически представлен как зависимость стандартного отклонения от среднего. В этой диаграмме применяется только ее правая часть; случайная переменная со значением $\overline{X} = 0$ имеет $\hat{\sigma} = 0$ вследствие того, что нулевой пункт на шкале отклонений обладает физическим смыслом. Но, чтобы достичь нормальности функции распределения в случае, если переменная преобразована (например, в случае использования ϕ-преобразований для изучения размерности зерен), допустимы отрицательные значения X_i и $\overline{X}$, и на фиг. 15.3 эти данные могут быть представлены в виде непрерывного интервала. График зависимости между размерами и размерной отсортированностью на фиг. 15.2 является тому примером, однако коэффициент изменчивости применять к этим данным

не следовало бы. С уменьшением среднего по абсолютному значению при фиксированном стандартном отклонении коэффициент изменчивости в процентах увеличивается до бесконечности с приближением среднего к нулю. Так как часто имеется указание на превышение значения CV (например, если последнее становится равным 30%, значит, изменения достигли неконтролируемого уровня), изменчивость размеров зерен (в ϕ-единицах) быстро возрастает, по мере того как размеры достигают 1000 *мк* (0 ϕ-единиц). При таких данных коэффициентом изменчивости пользоваться не следует.

Аналогично следует поступать с любой переменной, обладающей средним, которое меньше одной единицы, если стандартное отклонение не будет соответственно малым. Например, если изучается выход тяжелой фракции



Фиг. 15.3. Коэффициент изменчивости CV как выражение взаимоотношений между средним и стандартным отклонениями.

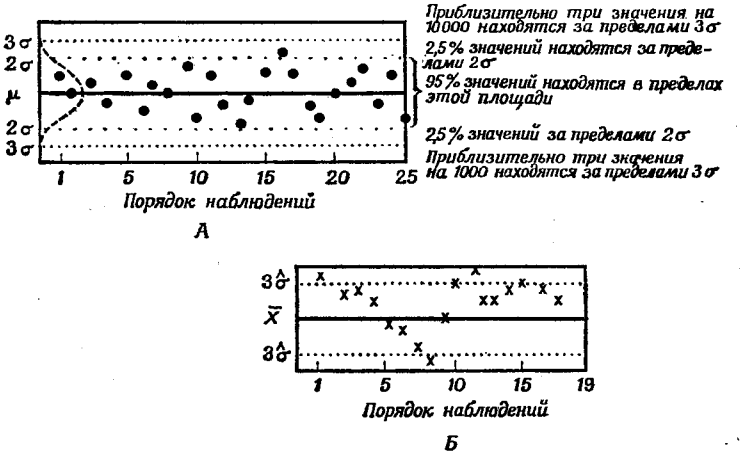
(в весовых процентах) и его изменения, то даже относительно небольшие по шкале изменения дадут очень большой коэффициент изменчивости, так как весовые проценты дробны. Еще хорошо, если это действительно отражает отсутствие контроля над измерениями, но такой результат может быть совершенно искусственным вследствие того, что применяемая шкала не адекватна информационному уровню данного рода сравнений. Сходные обстоятельства возникают во всех случаях, когда данные выражены в процентах, и коэффициент изменчивости применяется только в качестве обобщающего критерия (см., например, работу [122]).

15.6. ПОНЯТИЕ О КОНТРОЛЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ

Развитие технических процессов массового производства опирается на необходимые меры «контроля» с целью обеспечения в определенных пределах стандартности выпускаемой продукции. Процедуры количественного контроля, обеспечивающего основы таких требований, впервые были систематизированы Шуартом [391, 392]. Понятие о контроле может быть расширено до возможности его методологического применения; например, Черчмен [69] предлагает следующее определение контролируемого эксперимента:

> Эксперимент считается контролируемым, если мы установили все формальные условия, в которых математическая функция серий наблюдений стохастически приближается к своей предельной форме. Это определение становится теперь нашим критерием значимости... Ни один из вопросов о действительности чего-либо не может считаться имеющим значение, пока нет контрольного эксперимента для ответа.

Здесь снова аналитические процедуры главным образом заключаются в изучении связи среднего и дисперсии. Понятие же о контроле основано на том, что при нормальном распределении вероятность некоторого события в интервале $\bar{X} + k\hat{\sigma}$ может быть очень точно определена для любого выбранного значения k, причем удобно использовать $k = 2$ или $k = 3$ с вероятностями 95,4 и 99,7 соответственно. При контролируемых исследованиях, однако, выборочные значения упорядочены, а относительно малые выборки обычно усредняются и контрольные диаграммы применяются для изучения изменений среднего путем использования контрольных границ $\bar{X} \pm k\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ (где $k = 2$ или $k = 3$). В промышленности при количественном контроле



Фиг. 15.4. Понятие о контроле.
А — контролируемые наблюдения; *Б* — неконтролируемые набюдения.

наблюдения упорядочиваются по частоте появлений события, но эту процедуру можно расширить до применения ее к любому основанию классификации, позволяющей производить рациональную группировку.

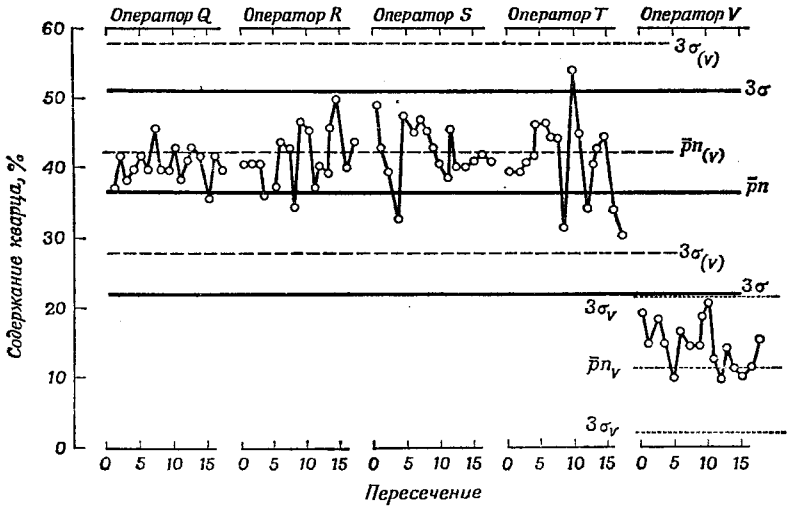
Предположим, что серия наблюдений упорядочена по частоте появления событий; этот порядок определен на основе времени события или глубины, на которой в скважине взят соответствующий образец (керн), или же по принципу географического положения на линии выбранного пересечения; тогда изменения данной случайной величины подчиняются нормальному распределению, среднее и стандартное отклонения могут быть оценены и наблюдения нанесены на контрольную карту, как это показано на фиг. 15.4, *А*. Если наблюдения контролируемы, они будут случайно рассеяны вокруг среднего значения, и лишь около 5 из 100 выйдут за пределы границ, находящихся на расстоянии 2σ от среднего значения, или же можно ожидать, что 3 события из 1000 попадут за пределы границ, отстоящих на 3σ от среднего. Если значительное количество наблюдений перейдет эти границы, наблюдения следует считать неконтролируемыми. Можно полагать, что такие наблюдения принадлежат другой совокупности, а не выбранной нами.

Однако упорядоченность наблюдений позволяет несколько расширить подобное обобщение; если наблюдения стали выходить за намеченные границы, значит, применяемый до этого контроль недостаточен. Например, идет выпуск некоторой промышленной продукции при контролируемом процессе, и, если износ машин при этом происходит постепенно, серия наблюдений покажет систематическое отклонение качества продукции. Иными словами, характеристика случайных изменений будет потеряна. Такие закономерности возникают при систематическом отклонении от нор-

мы, и в этих случаях принято искать «определяющую причину» и удалять источник изменчивости заменой изношенных частей в машине и т. п. Систематическое отклонение от нормы может проявиться и в таком виде, как это показано на фиг. 15.4, *Б*; подобный разрыв сети наблюдений служит предупреждением о неконтролируемости наблюдения.

Пример применения понятия о контроле с целью подразделения выборок описан Отто [316].

Одной из наиболее действенных областей применения понятия о контроле является проверка последовательности постоянства действий оператора при различных процедурах измерений, используемых при сборе материалов для статистического анализа. Подобные примеры приводят Гриффитс и Розенфельд [161]. В частности, они дают пример использования



Ф и г. 15.5. Понятие о контроле в приложении к улучшению работы операторов при подсчетах пропорции кварца в шлифах из кластических осадков [161].

pn — среднее для всех операторов; pn_V — среднее для оператора V, $pn_{\overline{V}}$ — среднее для всех операторов, за исключением оператора V.

графика количественного контроля для выяснения моментов выхода оператора из-под контроля при определении соотношений различных минералов путем точечного подсчета в шлифах (фиг. 15.5, заимствованная из работы [161]). Очень показательны колебания графика в зависимости от времени. Так, большинство наблюдателей склонно к заметным отклонениям вначале, но со временем постепенно все они входят в рамки определенных ограничений вокруг некоторой средней величины. Тогда и только тогда можно сравнивать значения, получаемые разными операторами; если же их данные сильно расходятся, можно отыскать причины такого расхождения и усовершенствовать критерий разнесения наблюдений по классам, пока операторы не начнут работать согласованно. В данном примере (фиг. 15.5) оператор *V* получил оценки содержания кварца значительно выше того предела, который дается трехкратным стандартным отклонением и который входит в оценку работы всех операторов. Его результаты относились к иной генеральной совокупности, чем та, с которой работали все остальные, и эти данные должны были быть отброшены при последующем анализе. Было установлено, что в описанном случае ошибавшийся оператор использовал иную систему критериев распознавания кварца, и, как было отмечено, результаты его подсчетов стали более постоянными.

Однако не менее важные характеристики заметны на графиках других операторов; например, оператор Q весьма постоянен в характере наблюдений, кривая его данных мало меняется. Оператор S представляет более нормальный случай; он начал с широкими отклонениями, а затем постепенно их сузил. Оператор R, вне сомнения, дал ухудшающиеся результаты, отклонения его графика со временем увеличились; ясно, что в таком случае необходимо изменить эту тенденцию. Аналогично действовал и оператор T, показавший необычно широкий размах отклонений; здесь также необходимо было принять меры к улучшению положения. Все подобные наблюдения представляют интерес, однако, судя по контрольному пределу (обозначенному на фиг. 15.5 как $3\sigma_{(V)}$), по показаниям операторов Q, R, S, T (кроме оператора V) видно, что никакое из этих отклонений не выходит за пределы 3σ; таким образом, упорядочивать наблюдения весьма необходимо для того, чтобы можно было обнаружить недостаточность контроля. В гл. 19 и 20 будет отмечено, что любой оператор имеет склонность подсознательно уменьшать чувствительность наблюдений, чем дает основание подразумевать наличие взаимодействия между основными эффектами, что в определенном случае может испортить весь эксперимент. Поэтому настойчиво рекомендуется всякий раз, когда в исследовательской программе принимаются новые методики или появляются новые операторы, применять метод контрольных карт с целью возможности убедиться, что характеристика работы контролируема.

Более общие критерии значимости. Критерий Стьюдента

Несмотря на хорошо известное положение, согласно которому метод использования нормальной кривой лишь тогда заслуживает доверия, когда выборка «большая», до сих пор никто еще не сказал нам ясно, где граница между «большим» и «малым».

Целью настоящей статьи является определение того момента, когда можно использовать таблицы вероятностного интеграла для суждения о значении средней величины из серии экспериментов и выбрать альтернативные таблицы, когда слишком мало количество экспериментов.

Student, The Probable Error of a Mean, *in* E. S. Pearson, J. Wishart (eds.), Student's Collected Papers, Biom. Off., Univ. Coll., London, 1908

16.1. ВВЕДЕНИЕ

До сих пор приготовления к статистическому анализу ограничивались главным образом сокращением множества данных и представлений их некоторой одной функцией распределения. При этом главная цель состояла в подборе подходящей модели; после этого можно было использовать статистические оценки значений неизвестных параметров модели. Таким путем обширный набор данных мог быть обобщен в виде немногих представительных статических оценок. Затем проводилась проверка представительности, иначе говоря, если выбранная модель признавалась подходящей, проверялась представительность выборок, т. е. их случайность. Затем рассматривалась применимость функции распределения для проверки гипотез и выяснялось, какого рода заключения могут быть выведены из набора полученных данных, особенно касающиеся их средних и дисперсий, и как сравнивать значения среднего и дисперсии, полученные по единичной выборке, с полученными по двум или более выборкам.

16.2. *t*-КРИТЕРИИ СТЬЮДЕНТА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ РАВЕНСТВА СРЕДНЕГО ЗАДАННОЙ ВЕЛИЧИНЕ

Эта основная процедура уже рассматривалась, когда выдвигались предположения о нормальности распределения в предположении, что среднее совокупности μ и дисперсия σ^2 известны. В общем эта процедура заключается в получении оценки вероятности встретить некоторое значение случайной величины X_i, попадающее в интервал $X_i + dX_i$; эта вероятность была определена как эквивалентная отношению площади, соответствующей $X_i + dX_i$, ко всей площади под частотной кривой (см. раздел 13.3 и ниже). Необходимость знать значения μ и σ^2 ограничена применением такой проверки к тем необычным случаям, когда модель известна полностью и (или) имеется достаточно обширная выборка для получения хороших оценок параметров. В более общем случае модель адекватно аппроксимирует полученную кривую распределения, и о значении μ можно высказать некоторые правдоподобные предположения, но величина σ^2 должна быть оценена

по небольшому набору выборочных данных. В подобном случае использование преобразования $t = (X - \mu)/\sigma$ или $t = (\bar{X} - \mu)\sqrt{N}/\sigma$ невозможно и его необходимо заменять другим:

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{N}}{\hat{\sigma}}. \tag{16.1}$$

Вывод такой формы t впервые дал Госсетт, который опубликовал свои работы под широко известным псевдонимом «Стьюдент». Считается, что его классической работой, где он вывел равенство 16.1 [322, 418], положено начало развитию статистических процедур с использованием малых выборок. Это t-распределение определим с помощью χ^2.

Теорема 1. Если величина X распределена нормально со средним μ и дисперсией σ^2 а $t = (X - \mu)/\sigma$, то t нормально распределена со средним, равным нулю, и единичной дисперсией. Тогда сумма квадратов n случайных выборочных значений t обладает χ^2-распределением с числом степеней свободы ν [198].

При этих условиях величина

$$\chi^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \ldots + t_\nu^2 \tag{16.2}$$

обладает числом степеней свободы ν.

Теперь рассмотрим критерий

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{N}}{\hat{\sigma}},$$

используемый для проверки гипотезы, согласно которой выборочное множество X_i взято из нормальной совокупности с определенным средним значением.

Выборочные средние $\bar{X}$ и дисперсия $\hat{\sigma}$ вычисляются по случайной выборке объемом n, отобранной из нормальной генеральной совокупности, со средним μ и дисперсией σ^2. Следует отметить два свойства t [13]:

1. t — отношение между нормальным отклонением от среднего и корнем квадратным из несмещенной оценки его дисперсии;

2. t — отношение между квадратом случайной величины $y = \sqrt{n}(x - \mu)/\sigma$, которая нормально распределена с параметрами 0,1 и случайной величиной $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$, которая распределена как χ^2/ν с числом степеней свободы ν.

Тогда

$$t^2 = \frac{n(\bar{X} - \mu)^2/\sigma^2}{\hat{\sigma}^2/\sigma^2} \tag{16.3}$$

и

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\hat{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}},$$

или

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}. \tag{16.4}$$

Этот критерий распределен по закону Стьюдента с $\nu = n = 1$.

Заметим, что σ^2 не входит в это выражение, и требуется только один параметр μ. Следовательно, посредством этого критерия можно, подставив ожидаемое значение μ, определить, является ли набор X_i случайной выборкой из нормальной совокупности с параметром μ и $\hat{\sigma}^2$, вычисленным соответствующим образом по данным наблюдений.

Предположим снова, что в результате некоторого эксперимента получены две серии данных, содержащих n_1 и n_2 наблюдений, по которым соответственно вычислены $\bar{X}_1$ и s_1, и $\bar{X}_2$ и s_2. Тогда эти средние можно сравнить, а различия проверить с помощью оценок дисперсии. Различие в средних

может быть выражено как

$$(\overline{X}_1-\mu)-(\overline{X}_2-\mu)=\overline{X}_1-\overline{X}_2. \tag{16.5}$$

Если выбрана подходящая несмещенная оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2$, других параметров для такого критерия не требуется. Для применения t-критерия Стьюдента необходимо, чтобы переменная была разделена на квадратный корень из *несмещенной оценки* ее (переменной) дисперсии, т. е.

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}.$$

При таком определении X_i — независимые случайные замеры из нормальной совокупности со средним μ, а величина t распределена по закону Стьюдента с $\nu = n - 1$ степенями свободы. Это преобразование названо *стьюдентизацией статистики* и широко применяется при проверке гипотезы о равенстве средних.

Плотность распределения t может быть выражена так [430]:

$$\text{Плотность вероятности}=\left\{\frac{[(\nu-1)/2]!}{[(\nu-2)/2]!}\sqrt{2\pi}\right\}\left(1-\frac{t^2}{\nu}\right)\exp\left(-\frac{\nu+1}{2}\right). \tag{16.6}$$

Здесь есть только две переменные: число степеней свободы ν и аргумент t.

Такое распределение симметрично и приближается к нормальному по мере возрастания ν до бесконечности. В общем эта кривая несколько менее заострена и более растянута, чем эквивалентная нормальная кривая [198]. Для вычисления площадей под этими частотными кривыми опубликованы таблицы; наиболее популярной из них следует считать таблицы Фишера [127], на которые всегда ссылаются в различных руководствах [15, 128]. Значения t приведены в этой таблице в колонках, соответствующих заданным вероятностным уровням, а строки — степеням свободы.

16.3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ t-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Во всех случаях, когда надо применить t-критерий Стьюдента, необходимо получить несмещенную оценку $\hat{\sigma}^2$ для дисперсии σ^2, причем, определяя степень соответствия выбранной процедуры требованиям исследования, необходимо быть особенно внимательным; наилучшей несмещенной оценкой для σ^2, полученной по выборкам, является

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}, \tag{16.7}$$

где n — число наблюдений X_i в выборке (вывод см. в разделе 16.9).

Предположим, что мы располагаем данными измерений размеров девяти кварцевых зерен (их длинных осей) по методу Халбе [203], и что получено

$$\overline{X}=2{,}00\phi, \quad \hat{\sigma}=0{,}6\phi \quad \text{и} \quad n=9.$$

Требуется проверить гипотезу случайного отбора этой выборки из совокупности, где $\mu = 0$. По формуле

$$t=\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}$$

высчитываем

$$t=\frac{(2-0)\sqrt{9}}{0{,}6}=\frac{6}{0{,}6}=10.$$

Среднее $\overline{X}$ вычислено по выборке; следовательно, число степеней свободы ν на 1 меньше числа измерений: $\nu = n - 1 = 8$. По таблицам значений t [15, 128] находим, что для $\nu = 8$ $P_{01} = 3{,}36$ (или $P_{001} = 5{,}041$) значение 10 сильно превышает то и другое; отсюда, если гипотеза верна, такая выборка измерений должна встречаться гораздо реже, чем один раз на 1000. Следовательно, гипотезу случайного выбора из нормальной совокупности с $\mu = 0$ можно отвергнуть.

Если же в ином случае находим, что $\hat{\sigma} = 6{,}0$, где $\overline{X} = 2\ \phi$, а $n = 9$, то

$$t = \frac{(2-0)\sqrt{9}}{6} = 1{,}0.$$

Такое значение $t = 1$ при $\nu = 8$ встречается гораздо чаще, чем десять раз на 100 [15]; если же используем таблицы Фишера и Йетса [128], с большей определенностью сможем сказать, что это значение t в условиях случайности отбора встречается от 30 до 40 раз на каждые 100 случаев. Подобное положение довольно обычно и не противоречит сформулированной гипотезе. В таком случае и равенство $\mu = 0$ весьма вероятно; подобное различие между этими двумя критериями свидетельствует об эффективности меры изменчивости для проверки гипотез.

Несколько более общее утверждение может быть сделано с использованием доверительного интервала; так, при нормальном распределении около 95% измерений заключено в пределах $\mu \pm 1{,}96\ \sigma$, что можно выразить иначе:

$$\overline{X} + 1{,}96\sigma > \mu > \overline{X} - 1{,}96\sigma. \tag{16.8}$$

Интервалу $\mu \pm 1{,}96\sigma$ соответствует около 95% площади нормальной кривой; теперь, использовав вместо этого коэффициента эквивалентное значение t-критерия Стьюдента, мы можем заменить σ на $\hat{\sigma}_{\overline{X}}$ и получить

$$\overline{X} - t\hat{\sigma}_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + t\hat{\sigma}_{\overline{X}}. \tag{16.9}$$

Затем можно подставить из первичного значения $\overline{X} = 2\phi$, $\hat{\sigma}_{\overline{X}} = 0{,}2$ и $n = 9$, тогда

$$2 - 0{,}2t < \mu < 2 + 0{,}2t,$$

и для числа степеней свободы при 8- и 95-процентном уровне вероятности $t = 2{,}31$, откуда

$$2 - 0{,}2 \times 2{,}31 < \mu < 2 + 0{,}2 \times 2{,}31;$$
$$2 - 0{,}462 < \mu < 2 + 0{,}462,$$

или

$$1{,}538 < \mu < 2{,}462.$$

Среднее μ может лежать в пределах этого интервала или за его пределами; если повторить эксперимент и заново вычислить этот интервал по новому $\hat{\sigma}$, то в среднем 95% таких интервалов будут содержать μ. Или же, вероятность того, что любой из интервалов содержит μ, будет равна 95% [293].

Предположим теперь, что вторая случайная выборка из девяти длинных осей кварцевых зерен дает среднее в 3,00 единиц; тогда эта серия наблюдений отличается от первоначальной при 95-процентном уровне значимости.

Во втором случае с $\overline{X} = 2$, $\hat{\sigma} = 6{,}0$ и $k = 9$ доверительный интервал становится

$$2 - 2{,}0 \times 2{,}31 < \mu < 2 + 2,\ 2{,}0 \times 2{,}3,$$
$$-2{,}62 < \mu < 6{,}62.$$

В этом случае значение $\mu = 0$ довольно вероятно; чтобы получить среднее с такой же точностью, по этим доверительным границам надо увеличить размер выборки пропорционально квадрату n. Предположим, мы увеличиваем размер выборки до $n = 81$, оставляя прежнее значение стандартного отклонения и среднего; тогда $\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{6}{9} = 0{,}667$, и при 95-процентном вероятностном уровне значение t для числа степеней свободы $\nu = 80$ будет равным 1,99. Отсюда:

$$\overline{X} - t\hat{\sigma}_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} - t\hat{\sigma}_{\overline{X}};$$
$$2 - 1{,}99 \times 0{,}667 < \mu < 2 + 1{,}99 \times 0{,}667;$$
$$2 - 1{,}327 < \mu < 2 + 1{,}327;$$
$$0{,}673 < \mu < 3{,}327.$$

Теперь мы можем отвергнуть гипотезу, что $\mu = 0$ при 5-процентном уровне значимости; при большей изменчивости затраты по уменьшению доверительного интервала значительно увеличиваются.

16.4. СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ ДВУХ ВЫБОРОК

t-Критерий подходит также и для проверки следующей гипотезы: «эти две выборки случайны и принадлежат одной нормальной совокупности». Вначале мы можем рассмотреть предположение, что эти две выборки объемами n_1 и n_2 независимо взяты из нормальной совокупности со средним μ и дисперсией σ^2 соответственно. Затем различие между средними $(\overline{X}_1 - \mu) - (\overline{X}_2 - \mu)$ сравнивается с наилучшей несмещенной оценкой дисперсии разности $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$; μ исчезает из числителя и различие средних превращается в $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. Тогда

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\hat{\sigma}_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}. \tag{16.10}$$

Теперь надо вычислить несмещенную оценку дисперсии, сделав различия между $\overline{X}_{1i}$ и $\overline{X}_{2i}$. Дисперсию суммы или разности двух нормальных случайных величин можно определить как

$$\mathrm{Var}\,(\overline{X}_{1i} + \overline{X}_{2i}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2; \tag{16.11a}$$
$$\mathrm{Var}\,(\overline{X}_{1i} - \overline{X}_{2i}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2. \tag{16.11b}$$

Тогда, если две случайные выборки независимы, коэффициент корреляции между $\overline{X}_{1i}$ и $\overline{X}_{2i}$ обозначен через $\rho = 0$, дисперсия этой суммы (разности) примет вид

$$\mathrm{Var}\,(\overline{X}_{1i} \pm \overline{X}_{2i}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \tag{16.12}$$

Аналогично дисперсия суммы или разности между средними из независимых выборок, относящихся к нормальной совокупности, будет

$$\mathrm{Var}\,(\overline{X}_1 \pm \overline{X}_2) = \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma^2_{\overline{X}_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{\overline{X}_2}}{n_2}. \tag{16.13}$$

Если верна упомянутая выше гипотеза и эти две случайные выборки действительно взяты из нормальной совокупности, то

$$\sigma^2_{\overline{X}_1} = \sigma^2_{\overline{X}_2} = \sigma^2 \tag{16.14}$$

и

$$\operatorname{Var}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right),$$

или

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\sigma\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}. \tag{16.15}$$

Теперь по выборкам 1 и 2 можем вычислить

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{Sx_1^2}{n_1-1} \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_2^2=\frac{Sx_2^2}{n_2-1},$$

или, комбинируя эти две оценки, получаем, что

$$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2=\frac{Sx_1^2+Sx_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

Но

$$Sx_1^2=n_1s_1^2 \text{ и } Sx_2^2=n_2s_2^2.$$

Тогда

$$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2=\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

(исходя из выборочных дисперсий)[1], или

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

и

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}, \tag{16.16}$$

или

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2}+\frac{s_2^2}{n_1}}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-2}}. \tag{16.17}$$

Теперь вернемся к гипотезе о случайном характере этих двух выборок и их принадлежности некоторой одной нормальной совокупности и вычислим статистику t:

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2/n_2+s_2^2/n_1}\sqrt{(n_1+n_2)/(n_1+n_2-2)}}, \tag{16.18}$$

которая подчиняется t-распределению Стьюдента с $\nu=n_1+n_2-2$ степенями свободы.

Если $n_1=n_2$, то формула сводится к

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{(s_1^2+s_2^2)/n}\sqrt{2n/(2n-2)}}=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{(s_1^2+s_2^2)/(n-1)}}, \tag{16.19}$$

которая распределена по закону Стьюдента с $\nu=2(n-1)$ степенями свободы.

16.5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ t-КРИТЕРИЯ СТЬЮДЕНТА ДЛЯ СРАВНЕНИЯ ДВУХ СРЕДНИХ

В одном из исследований, проведенном с целью сравнить результаты измерений длинных осей кварцевых галек из гравия Монтурсвилл (близ Вильямспорта) при различных способах опробования были получены сле-

[1] Следует отличать выборочные дисперсии s^2 и наилучшую несмещенную оценку дисперсии совокупности от $\hat{\sigma}^2$ (см. раздел 16.9).

дующие статистики (средние выражены в ϕ-единицах):

$$\overline{X}_1 = 4{,}571; \qquad \hat{\sigma}_1^2 = 0{,}6673; \qquad n_1 = 336;$$
$$\overline{X}_2 = 5{,}547; \qquad \hat{\sigma}_2^2 = 0{,}5628; \qquad n_2 = 324.$$

Подлежит проверке нулевая гипотеза H_0: «эти две выборки случайны и относятся к одной нормальной совокупности».

Заметим, что дисперсии s^2 в равенствах (16.18) и (16.19) выборочные, поскольку эти значения, вычисленные для образцов из гравия Монтурсвилл, являются наилучшими оценками. Следовательно, необходимо умножить эти лучшие оценки $\hat{\sigma}^2$ соответственно на $(n_1 - 1)/n_1$ и $(n_2 - 1)/n_2$, что дает $s_1^2 = 0{,}665314$ и $s_2^2 = 0{,}561063$. Тогда

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{s_1^2/n_2 + s_2^2/n_1}\,\sqrt{(n_1+n_2)/(n_1+n_2-2)}} =$$
$$= \frac{5{,}547 - 4{,}571}{\sqrt{0{,}6653/324 + 0{,}5611/336}\,\sqrt{660/658}} =$$
$$= \frac{0{,}976}{\sqrt{405{,}3372/108{,}864}\,\sqrt{1{,}003039}} =$$
$$= \frac{0{,}976}{\sqrt{0{,}003723}\,\sqrt{1{,}003039}} = \frac{0{,}976}{0{,}06111} = 15{,}971$$

при числе степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 324 + 336 - 2 = 658$. Такое значение t очень велико ($P < 0{,}001$). Другими словами, если нулевая гипотеза верна, такое различие может встретиться гораздо реже, чем один раз на 1000. Приходится отвергнуть эту гипотезу, и так как имеется две выборки заведомо из одной и той же совокупности, а в подобном частном случае истинное распределение, вероятнее всего, будет ϕ-нормальным [170], то это приведет к выводу о неслучайности отбора.

16.6. ПРОВЕРКА БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ

Бокман [31], описывая петрографию формаций Стенли и Джэкфорк, пишет:

«В связи с изучением распределения размеров зерен была предпринята попытка определить, обладают ли песчаники Стенли и Джэкфорк градационной зернистостью... Из верхних и нижних частей пластов различной мощности были собраны сколки пород и из них приготовлены шлифы... Было изучено семь пластов мощностью от 9 до 52 дюймов. Результаты измерений представлены в табл. 1... И хотя как будто и наблюдается некоторый градационный эффект от подошвы к кровле пластов, все же встает вопрос, действительно ли это градационная зернистость».

Если мы примем в качестве признака градационной слоистости общее уменьшение зернистости от подошвы к кровле слоя, то можно использовать данные табл. 16.1 для проверки эффективности такого признака. Нулевая гипотеза H_0 получает следующую формулировку: «эти выборочные средние получены по двум независимым случайным выборкам из одной и той же нормальной совокупности».

Подходящей аппроксимацией является нормальное распределение (см. раздел 13.12), но если пласты обладают градационной зернистостью и предложенный признак эффективен, то выборки ни случайны, ни независимы. Для анализа подобной серии наблюдений можно предложить несколько гипотез и процедур. Если данные пласты не градационны, верхние их части могут быть более грубозернисты, чем нижние, и наоборот, в среднем с равной вероятностью того и другого; иными словами, имеется равная вероятность обнаружить позитивное или негативное различие между нижней и верхней частями слоя. Тогда мы можем определить количество позитивных (шесть) и негативных (один) признаков и испытать, представляют ли они

Таблица 16.1

Мощность слоя и размер зерен [31]

Мощность слоя, дюймы	Средний размер зерен, ф-единицы		Разность в размерах частиц кровли и подошвы, ф-единицы
	нижняя часть	верхняя часть	
12	2,81	3,13	+0,32
13	3,95	4,13	+0,18
15	3,75	3,88	+0,13
19	2,68	2,91	+0,23
26	3,25	3,61	+0,36
40	3,90	4,20	+0,30
52	3,30	3,12	−0,18

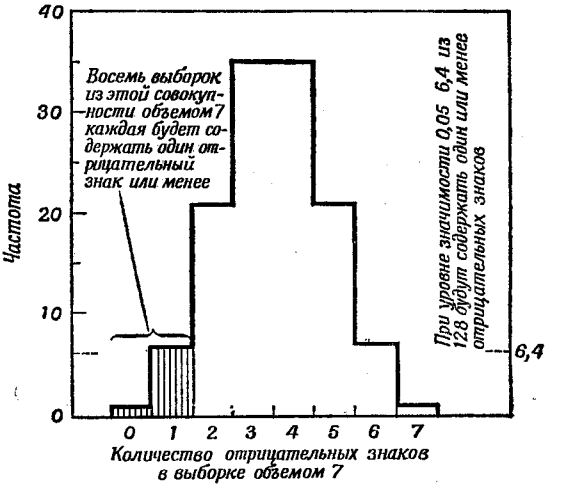
случайную выборку из биномиальной совокупности с $p = 0{,}5$. В этом случае формулировка нулевой гипотезы будет следующей: «эти признаки представляют случайную выборку из биномиальной совокупности с $(p + q)^n = (0{,}5 + 0{,}5)^7$». Частоты, ожидаемые при такой гипотезе, приведены в табл. 16.2 и на фиг. 16.1.

Таблица 16.2

Вероятности успеха (негативные признаки) при биномиальном распределении с $(p+q)^n=(0{,}5+0{,}5)^7$

Количество негативных признаков	Члены разложения бинома $\frac{N!}{X!(N-X)!}p^X q^{N-X}$	Частоты, умноженные на 128
0	$1\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$	1
1	$7\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{128}$	7
2	$21\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{128}$	21
3	$35\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$	35
4	$35\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{128}$	35
5	$21\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{128}$	21
6	$7\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{7}{128}$	7
7	$1\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{128}$	1
Сумма	1,0	128

Так как ожидается, что восемь образцов из каждых 128 будут содержать один негативный признак или не содержать его случайно, а при 95-процентном вероятностном уровне 6,4 из 128 будут содержать один признак или ни одного при 95-процентном вероятностном уровне, выборка из семи образцов с одним негативным признаком не позволяет уверенно отвергнуть гипотезу, что негативные и позитивные признаки распределены в генеральной совокупности с равной вероятностью.



Ф и г. 16.1. Ожидаемая плотность отрицательного биномиального распределения; объем выборки 7, $(p+q)^n = (0{,}5+0{,}5)^7$.

На самом деле для решения требуется выборка большего объема, если данный критерий достаточно чувствителен, чтобы можно было обнаружить различие при 5-процентном уровне значимости. Проверку на такие признаки можно выполнять очень просто с помощью таблиц (см., например, работу [96]).

Так как в этом случае можно определить и величину различий, то более тонкую проверку можно провести по t-критерию Стьюдента. Таким образом, если, согласно нулевой гипотезе, «эти различия (колонка 4, табл. 16.3) получены по случайным выборкам из нормальной совокупности со средним расхождением, равным нулю, т. е. $\mu = 0$», проверочным критерием будет величина

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\hat{\sigma}},$$

где $\mu = 0$, $n = 7$, а $\hat{\sigma} = \sqrt{0{,}03335} = 0{,}1826$ (см. табл. 16.3). Тогда

$$t = \frac{0{,}1914 \times 2{,}646}{0{,}1826} = \frac{0{,}5064}{0{,}1826} = 2{,}773.$$

По таблицам t-критерия Стьюдента, приведенным у Аркина и Колтона [15], это значение t лежит между 2,45 при $p = 0{,}05$ и 3,14 при $p = 0{,}02$. Следовательно, если иногда гипотеза H_0 верна, такая серия наблюдений встретится чаще двух и реже пяти раз на 100 таких испытаний; значит, $t = 2{,}773$ достаточно велико при 5-процентном уровне значимости, и гипотеза отвергается. Среднее, очевидно, значительно отличается от нуля. Другими словами, такие данные, безусловно, свидетельствуют о неслучайности распределения различий средних, и мы можем с уверенностью сказать, что верхние части слоев бывают более тонкозернистыми по сравнению с нижними гораздо чаще, чем это можно было бы приписать случайности, а по использованному критерию — что градационность в слоях действительно имеется.

Этот критерий может быть применен также к средним значениям. В таком случае нулевая гипотеза будет сформулирована следующим образом: «эти две выборки являются случайными и распределены одинаково нормально».

Так как $N_1 = N_2 = N$, можно было бы использовать формулу

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)/(n-1)}}$$

с числом степеней свободы $\nu = 2(n-1) = 2(7-1) = 12$; или, пользуясь данными, приведенными в табл. 16.3,

$$t = \frac{3{,}5685 - 3{,}3771}{\sqrt{0{,}2343 - 0{,}2243/6}} = \frac{0{,}1914}{\sqrt{0{,}4586/6}} = \frac{0{,}1914}{\sqrt{0{,}07643}} = \frac{0{,}1814}{0{,}2765} = 0{,}692$$

с числом степеней свободы $\nu = 2(n-1) = 12$; это значение t приводит к вероятности $60 > P > 50$. Иначе говоря, такое различие можно ожидать

Таблица 16.3

Вычисление средних и дисперсий по данным табл. 16.1

Статистика	Кровля	Подошва	Разность кровля—подошва
1	2	3	4
$\sum X^2$	90,7828	81,4060	0,4566
$\frac{(\sum X)^2}{N}$	89,1429	79,8357	0,2565
Sx_i^2	1,6399	1,5703	0,2001
$Sx_1^2 + Sx_2^2$	3,2102		
$\sum X$	24,98	23,64	1,34
$\frac{\sum X}{n} = \bar{X}$	3,5685	3,37714	0,1914
$\hat{\sigma}^2 = \frac{Sx_i^2}{n-1}$	0,273316	0,261716	0,3335
$s^2 = \frac{Sx_i^2}{n}$	0,2343	0,2243	0,028586

от 50 до 60 раз в каждых ста испытаниях, так что это не может служить основанием для отвержения гипотезы. Таким образом, эти две выборки можно было бы рассматривать в качестве случайных из нормальной совокупности; различие между их средними статистически незначимо.

Два подобных вида проверки представляют собой совершенно различные вопросы; в первом случае задача связана с выявлением различий в структуре верхних и нижних частей слоев безотносительно к абсолютным значениям размеров зерен пород, их слагающих. Во втором случае семь выборок из верхних и нижних частей слоев рассматриваются в качестве двух независимых выборок из одной и той же совокупности, при этом изменчивость в пределах каждой из выборок достаточно велика, чтобы она могла замаскировать различия между средними размерами зерен по выборкам. В данном контексте первый критерий является более подходящим, а выборки из верхней и нижней частей слоя не независимы.

16.7. ПРЕИМУЩЕСТВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Следует подчеркнуть контраст между этими двумя результатами; так, во втором случае среднее различие было сравнимо с комбинированной оценкой дисперсии из обеих выборок, а изменчивость в пределах выборок была достаточно велика, чтобы она могла затушевать различия между средними. Когда, однако, эти выборки были сведены попарно и каждую выборку из верхней части слоя сравнили с соответствующей выборкой из нижней части, мера изменчивости между этими двумя наборами наблюдений в значительной степени понизилась; иначе говоря, внутривыборочная изменчивость по первому критерию стерлась. В общем можно рекомендовать использовать выборки попарно; преимущества этого экспериментального решения над вторым могут оказаться весьма значительными. Следует также заметить, что число степеней свободы заметно возрастает от 6 в первом случае (спаренные выборки) до 12 во втором. Если спаривание эффективно, сопровождающее его сокращение степеней свободы с лихвой компенсируется исчезновением изменчивости; но, если оказалось, что спаривание для ликвидации внутрипластовой изменчивости неэффективно, попарное размещение приводит к уменьшению чувствительности t-критерия. Другой пример такой процедуры описан Милнером [300]. Подобный аппарат известен под названием *спаривание*; это простой пример стратификации или *блокирования*, и если изменчивость между слоями велика, а в пределах слоев мала, когда данные упорядочены (стратификацией), эта классификация становится весьма эффективной для получения более чувствительных статистических критериев.

Другое экспериментальное решение заключается в упорядочении по размерности (зерен). Выборки с равными размерами, даже неспаренные, обладают определенным преимуществом; например, если вернемся к равенству (16.15), $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma\sqrt{(n_1+n_2)/n_1n_2}$, и вспомним, что t выражено формулой

$$t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma\sqrt{(n_1+n_2)/n_1n_2}}, \quad \text{или} \quad t=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}},$$

увидим, что, если $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)/\sigma$ фиксировано, значение будет меняться как

$$\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}.$$

Положим $n_1=n_2=0$; тогда

$$\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}=\sqrt{\frac{10}{20}}=\sqrt{5}=2{,}236.$$

С другой стороны, если $n_1=5$ и $n_2=15$,

$$\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}=\sqrt{\frac{75}{20}}=\sqrt{3{,}75}=1{,}936.$$

Другими словами, умножающий фактор и, следовательно, t будут наибольшими при $n_1=n_2$. Такое различие более заметно для малых выборок. Рассматривая такое экспериментальное упорядочение, Йоден [461] писал: «Этим просто подтверждается установившееся мнение, что нет смысла определять очень точно одну из величин, если другая определяется со значительными ошибками».

Типпетт все же отметил другое преимущество: «Однако Уэлш [445] показал, что, когда $n_1=n_2$, t-критерий не чувствителен к различиям между дисперсиями генеральной совокупности...» [430].

При внимательном подходе к подобному усовершенствованию упорядоченности экспериментов во многих случаях можно получить заметное улучшение критериев как в практическом, так и в теоретическом отношениях.

16.8. ОЦЕНКА ОБЪЕМА ВЫБОРКИ, НЕОБХОДИМОГО ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ СУЩЕСТВЕННОГО РАЗЛИЧИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Другое преимущество t-критерия Стьюдента состоит в том, что его можно использовать для приближенного определения того объема выборки, который необходим при установлении значимого различия между средними при требуемом уровне значимости. Написав, что

$$t^2 = \frac{(\bar{X}^2 - \mu)^2 n}{\hat{\sigma}^2},$$

можно перестроить это выражение в другое:

$$n = \frac{t^2 \hat{\sigma}^2}{(\bar{X} - \mu)^2}.$$

При малой выборке возможно вычислить $\bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2$, а зная число степеней свободы и выбранный уровень значимости, найти t (и, следовательно, t^2); если требуемое значение $\bar{X} - \mu$ подставить в равенство (16.20), можно определить значение n.

В табл. 16.4 приведены данные пористости песчаников, определенной двумя методами по двум выборкам.

Таблица 16.4

Сравнение методов измерения пористости [339]

Образец	Пористость, %		различие
	метод 1	метод 2	
1	17,1	16,92	+0,18
2	20,1	20,68	−0,58
3	19,3	18,05	+1,25
4	10,2	10,39	−0,19
5	25,9	26,00	−0,10
Сумма	92,60	92,04	+0,56
Среднее	18,520	18,408	+0,112

Суммы квадратов $SS_{x_1} = 128{,}808$ и $SS_{x_2} = 129{,}4311$. Различие между ними $SS_d = 1{,}9147$. В последнем случае $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \sqrt{1{,}9147/n\,(n-1)} = \sqrt{1{,}9147/20} = 0{,}3094$.

Положим, что, как и в вышеприведенных примерах, проверяется гипотеза H_0, по которой эти различия получены из совокупности, где среднее отличается от $\mu = 0$. Тогда

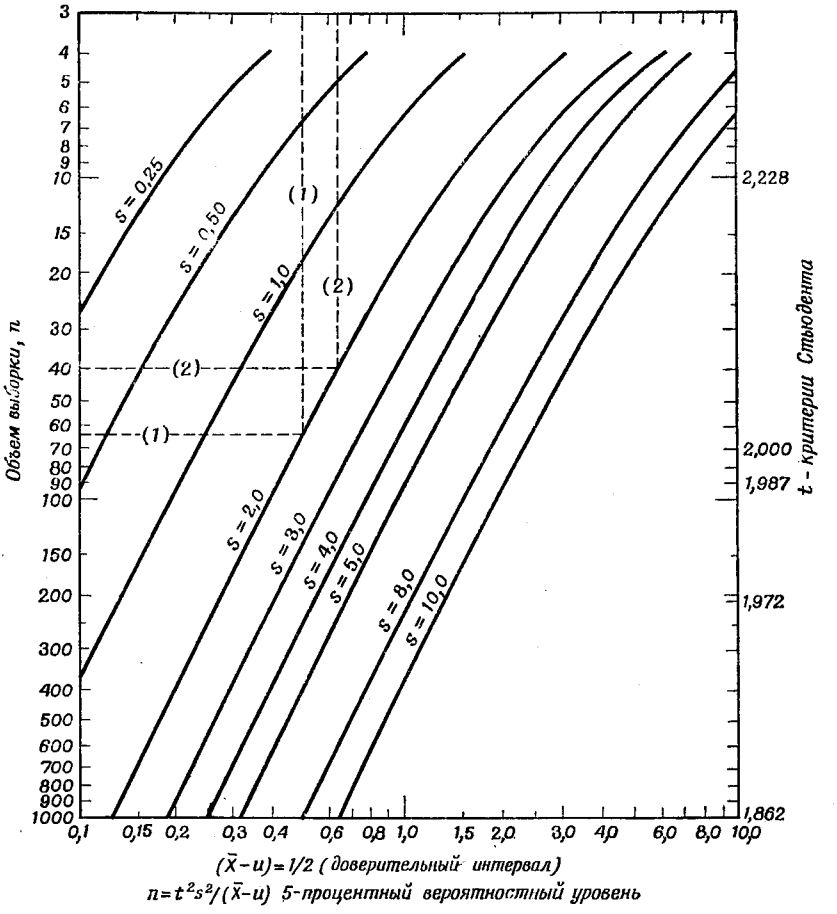
$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}},$$

или

$$t = \frac{0{,}112}{0{,}3094} = 0{,}362$$

с числом степеней свободы $\nu = n - 1 = 4$; тогда $80 > P > 70$, иными словами, для H_0 такое различие встретится от 70 до 80 раз на каждые 100 случаев, и нет оснований отрицать, что эти различия случайны и получены

для выборок из совокупности, в которой $\mu = 0$. Интересно попытаться решить вопрос, сколько образцов потребовалось бы для того, чтобы можно



Ф и г. 16.2. Графический способ оценки объема выборки n по стандартному отклонению s, разности средних $\overline{X} - \mu$ и t-критерию Стьюдента; 5-процентный вероятностный уровень.

было установить значимое различие при 95-процентном вероятностном уровне; при $\nu = 4$, $t_{05} = 2{,}776$

$$n = \frac{t^2 \hat{\sigma}^2}{(\overline{X} - \mu)^2},$$

где $t^2 = 7{,}706$, $\hat{\sigma}^2 = 0{,}4787$, $\hat{\sigma} = 0{,}6919$,

$$(\overline{X} - \mu)^2 = 0{,}112^2 = 0{,}125.$$

Тогда

$$n = \frac{7{,}706 \times 0{,}4787}{0{,}125} = \frac{3{,}688}{0{,}125} = 29{,}5.$$

Такая оценка n может быть улучшена несколькими способами, например повторными испытаниями [300] и так, как это описано Кокраном и Коксом [79]. Эта процедура проводится со многими предположениями, в част-

ности, одно из них — по мере нарастания информации улучшается оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2$. Оценивающая процедура, предложенная выше, проводилась именно в этом предположении.

Подобную информацию можно получить графически — с помощью диаграммы, представленной на фиг. 16.2. Такая графическая процедура, вероятно, является адекватной для приближения к оценке N. Даны несколько примеров: 1) $s = 2{,}0$; $\bar{X} - \mu = 0{,}5$; тогда $n = 64$; 2) $n = 40$, $s = 20$, тогда при 5-процентном уровне значимости величина $\bar{X} - \mu$ должна превышать 0,64, чтобы стать значимой.

16.9. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ОЦЕНКАМИ ДИСПЕРСИЙ

Существуют три оценки дисперсии, имеющие большое значение, и зависимость между ними исключительно важна для понимания роли выборочных статистик при оценке параметров генеральной совокупности.

Мы можем определить дисперсию генеральной совокупности σ^2 как

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \mu)^2}{N}, \tag{16.21}$$

а выборочную дисперсию s^2 как

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}. \tag{16.22}$$

Теперь необходимо определить наилучшую несмещенную оценку дисперсии совокупности, полученной по выборочным данным; для этого можно поступить следующим образом [198].

Ожидаемое значение статистики представляет собой ее среднее значение при очень большом количестве испытаний, что можно записать как $E(X) = \mu$. Отсюда следует, что мы можем определить ожидаемое значение выборочной дисперсии:

$$E(s^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} E \sum [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2$$

$$= \frac{1}{n} E \sum [(X_i - \mu)^2 = 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2]$$

$$E \sum (X_i - \mu)^2 = n\sigma^2 \text{ и } E(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 - 2E \sum (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + \frac{n\sigma^2}{n}\right];$$

но

$$\sum (X - \mu) = \sum X - \sum \mu = n\bar{X} - n\mu = n(\bar{X} - \mu)$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\sigma^2 - 2nE(\bar{X} - \mu)^2 + \frac{n\sigma^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\sigma^2 - \frac{2n\sigma^2}{n} + \frac{n\sigma^2}{n}\right) = \frac{1}{n}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{1}{n}(n-1)\sigma^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2.$$

Тогда $E(s^2) \neq \sigma^2$, но $E(s^2) = [(n-1)/n]\,\sigma^2$, которое уменьшается за счет действия фактора $(n-1)/n$;

$$E\left(\frac{n}{n-1}\right) s^2 = E\left[\frac{n}{n-1}\,\frac{\sum (X-\bar{X})^2}{n}\right]$$

$$= E\left[\frac{\sum (X-\bar{X})^2}{n-1}\right].$$

Следовательно, наилучшей несмещенной оценкой дисперсии совокупности для малых выборок будет

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2}{n-1}.$$

Надо заметить, что по мере возрастания n соотношение смещения $n/(n-1)$ приближается к единице, показывая что для больших выборок выборочная дисперсия s^2 стремится к значению дисперсии всей совокупности σ^2. Выборочная дисперсия является состоятельной оценкой, но для малых выборок она смещена; наилучшая же оценка в малых выборках и состоятельна, и не смещена.

ГЛАВА 17

Более общие критерии значимости — χ^2- и F-критерии

Термин «согласие» некоторые истолковывали ошибочно, полагая, что чем выше значение P, тем удовлетворительнее проверяется гипотеза. Вероятность более 0,999, иногда приводившая к подтверждению правильности гипотез, может встретиться лишь один раз на 1000 испытаний... Но и в этих редких случаях рассматриваемая гипотеза так же может оказаться ошибочной, как если бы значение P равнялось 0,001,

R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, Ltd., 10th ed., pp. 80—81, 1948

17.1. ВВЕДЕНИЕ

Использовать t-критерий Стьюдента можно только при сравнении среднего с некоторым ожидаемым значением или при сравнении двух средних значений, причем используемые данные должны по крайней мере достигать интервального уровня информации (см. раздел 12.5). Критерием [1], который менее ограничен в своем приложении и может быть применен к данным номинального или порядкового уровней, является статистика χ^2 (хи-квадрат). Она применяется гораздо шире, чем критерий Стьюдента, но ей недостает специфичности t-критерия; иначе говоря, эти две статистики приводят к критериям, которые желательно использовать тогда и только тогда, когда они подходят. В общем можно сказать, что t-критерий Стьюдента связан со сравнением средних значений, а показатель χ^2 — более общий, со сравнением сумм квадратов.

Статистика χ^2 может быть определена посредством той же теоремы, что и t-критерий (см. раздел 16.2).

Если величина X_i нормально распределена со средним и дисперсией σ^2, а $t = (X - \mu)/\sigma$, то t нормально распределена со средним значением нуль и дисперсией, равной единице. Тогда сумма квадратов n случайных выборочных значений t будет иметь χ^2-распределение с числом степеней свободы ν, или

$$\chi^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \ldots + t_\nu^2,$$

где ν — число степеней свободы.

Тогда можно записать:

$$\chi^2 = \frac{(X_1-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2-\mu)^2}{\sigma^2} + \ldots + \frac{(X_n-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = \frac{n}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n} = \frac{nS^2}{\sigma^2}. \qquad (17.1)$$

с числом степеней свободы $\nu = n - 1$.

[1] В этой главе часто используется выборочная дисперсия s^2, что для больших выборок, где $n > 30$, адекватно дисперсии совокупности.

17.2. НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

χ^2-Распределение в качестве статистического критерия предложил Пирсон в 1900-х гг., а Фишер [125] расширил его применение, введя понятие степеней свободы. χ^2-Распределение представляет распределение сумм квадратов

$$Sx_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

стандартизированных нормальных отклонений от среднего значения; его можно записать в виде формулы [350]

$$dP = \frac{1}{2^{n/2}\,[(n-2)/2]!} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \chi^{2(n-2)/2}\, d(\chi^2), \qquad (17.2)$$

которая выражает вероятность того, что значение χ^2, определенное по случайной выборке, окажется в интервале $d\chi^2$.

Частотные кривые, построенные по формуле (17.2), изменяются от нуля до бесконечности; обычно считают, что они относятся к типу III кривых Пирсона [198], когда $\nu = 1$, соответствующая функция χ^2-распределения представляет положительную половину нормальной кривой [233]. Таблицы функции распределения χ^2 даются в различной форме, например в таблицах Фишера и Йейтса [128] вероятностные значения (площади, ограниченной этими кривыми) перечислены в головках столбцов, а степени свободы n обозначаются строками, значения же χ^2 составляют массив таблицы. Аналогичную таблицу составили также Аркин и Колтон [15]. Кендалл [233] приводит таблицу Фишера и Йейтса в виде графика. В большинстве случаев таблицы составлены для значений ν вплоть до 30; для величин, превышающих 30, χ^2 необходимо оценивать приближенно; некоторые аспекты такой оценки рассмотрены Кендаллом [233]; при этом, следуя рекомендациям Фишера [127], можно использовать, что величина $\sqrt{2\chi^2}$ нормально распределена со средним $\sqrt{2\nu - 1}$ и дисперсией, равной единице. Значения χ^2 с учетом степеней свободы можно ввести в формулу

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} \qquad (17.3)$$

и полученное значение t сравнить затем со значениями, приведенными в таблице нормального распределения с параметрами 0,1 (см., например, работу [15]). Следует отметить, что данные вероятности относятся только к одной половине стандартной нормальной кривой; пример см. в разделе 17.7.

17.3. ПРИМЕНЕНИЕ χ^2 ПРИ ПОСТРОЕНИИ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ ДИСПЕРСИИ

Определив, что $\chi^2 = ns^2/\sigma^2$, можем найти по соответствующим таблицам [15] при заданном числе степеней свободы ν величину χ_1^2, которая будет меньше ns^2/σ^2, и значение χ_2^2, которое превышает ns^2/σ^2:

$$\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2.$$

Если, например, выбраны 98- и 2-процентные уровни χ^2 для некоторого значения ν, то интервал между двумя значениями χ_1^2 будет включать 96% площади такого χ_2^2-распределения. Вышеприведенное неравенство более удобно переписать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} &\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2, \\ &\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{\sigma^2}{ns^2} < \frac{1}{\chi_1^2}, \\ &\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}. \end{aligned} \qquad (17.4)$$

Если задано некоторое множество выборочных значений, можно оценить s^2 и ν; подставив в это неравенство подходящие значения χ_1^2 и χ_2^2, получим необходимый доверительный интервал, который будет с заданной вероятностью включать значение σ^2.

Предположим, например, что имеем дело с выборкой $n = 20$, что дает значение $s = 0{,}65$, тогда $\nu = n - 1 = 19$; затем выбираем вероятности 0,05 и 0,95 и отыскиваем значения χ^2 [15], где 95-процентное значение $\chi_1^2 = 10,117$, а 5-процентное значение $\chi_2^2 = 30,144$; затем, подставляя табличные значения в неравенство, получаем:

$$\frac{20\times 0{,}65^2}{30{,}144} < \sigma^2 < \frac{20\times 0{,}65^2}{10{,}117}; \quad \frac{8{,}450}{30{,}144} < \sigma^2 < \frac{8{,}450}{10{,}117};$$

$$0{,}280 < \sigma^2 < 0{,}835.$$

Этот интервал будет накрывать истинное значение σ^2 для 90% случаев. Такой интервал в общем довольно широк, что свидетельствует о нестабильности оценок дисперсии, полученных по малым выборкам. Например, если данная выборка была представлена 20 измерениями длины кварцевых зерен в шлифе, то стандартное отклонение 0,65 характеризует умеренно отсортированный осадок; и так как эти значения меняются от ,025 до 1,5 по мере перехода от хорошо отсортированных осадков к плохо отсортированным, полученный доверительный интервал охватывает большую часть этой области.

Этим можно руководствоваться при отборе зерен в шлифах для измерений их размеров, рассматривая шлиф как однородную совокупность с элементом «длина зерна». Тогда при стандартных отклонениях 0,25, 0,50, 0,75, 1,0 и вероятностных уровнях $\alpha = 90$ и 98% для достижения обусловленных доверительных интервалов в пределах этих изменений (и стандартных отклонений) требуются выборки таких размеров, какие показаны в табл. 17.1; видно, что достаточно от 30 до 50 зерен (или измерений их длины)

Таблица 17.1

Доверительные пределы для стандартных отклонений длин кварцевых зерен, измеренных в шлифах; однородная совокупность (значения χ^2 даны по работе [323])

Объем выборки n	$\chi^2_{1-\alpha,\,\nu_1}$	$\chi^2_{\alpha,\,\nu_1}$	$\hat{\sigma}=0{,}25$		$\hat{\sigma}=0{,}50$		$\hat{\sigma}=0{,}75$		$\hat{\sigma}=1{,}00$	
			нижний предел	верхний предел	нижний предел	верхний предел	нижний предел	верхний предел	нижний предел	верхний предел
$\alpha=95\%$	$\nu=n-1$									
5	11,0705	1,1455	0,0282	0,2728	0,1129	1,0912	0,2541	2,4553	0,527	7,035
10	18,3070	3,9403	0,0341	0,1586	0,1366	0,6345	0,3073	1,4276	0,591	3,007
15	24,9958	7,2609	0,0375	0,1291	0,1500	0,5165	0,3376	1,1620	0,633	2,283
20	31,4104	10,8508	0,0398	0,1152	0,1592	0,4608	0,3582	1,0368	0,664	1,977
25	37,6525	14,6114	0,0415	0,1069	0,1660	0,4277	0,3735	0,9624	0,687	1,805
30	43,7729	18,4926	0,0428	0,1014	0,1713	0,4056	0,3855	0,9125	0,705	1,694
40	55,7585	26,5093	0,0448	0,0943	0,1793	0,3772	0,4035	0,8488	0,717	1,509
50	67,5048	34,7642	0,0463	0,0899	0,1852	0,3596	0,4166	0,8090	0,741	1,438
70	90,5312	51,7393	0,0483	0,0846	0,1933	0,3382	0,4349	0,7610	0,773	1,353
100	124,342	77,9295	0,0503	0,0802	0,2011	0,3208	0,4524	0,7218	0,804	1,283
$\alpha=99\%$	$\nu=n-1$									
5	15,0863	0,5543	0,0207	0,5638	0,0829	2,2551	0,1864	5,0740	0,3314	9,0203
10	23,2093	2,5582	0,0269	0,2443	0,1077	0,9777	0,2424	2,1988	0,4309	3,9090
15	30,5779	5,2294	0,0307	0,1793	0,1226	0,7171	0,2759	1,6135	0,4906	2,8684
20	37,5662	8,2604	0,0333	0,1513	0,1331	0,6052	0,2995	1,3619	0,5324	2,4212
25	44,3141	11,5240	0,0353	0,1356	0,1410	0,5423	0,3173	1,2203	0,5642	2,1694
30	50,8922	14,9535	0,0368	0,1254	0,1474	0,5016	0,3316	1,1285	0,5895	2,0062
40	63,6907	22,1643	0,0393	0,1128	0,1570	0,4512	0,3533	1,0150	0,6280	1,8047
50	76,1539	29,7076	0,0410	0,1052	0,1641	0,4208	0,3693	0,9467	0,6566	1,6831
70	100,425	45,4418	0,0436	0,0963	0,1743	0,3851	0,3921	0,8665	0,6970	1,5404
100	135,807	70,8648	0,0460	0,0892	0,1841	0,3568	0,4142	0,8028	0,7363	1,4273

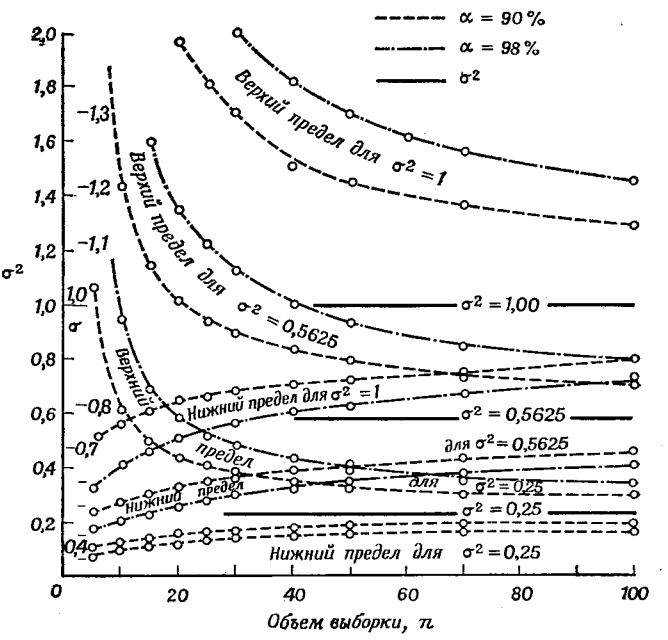
для получения стандартных отклонений ниже $\sigma = 0{,}75$ при 90-процентном вероятностном уровне. Значительно больше измерений потребуется для получения более высоких стандартных отклонений или для более высокого уровня надежности. Например, для приемлемо устойчивых оценок такого значения совокупности, где σ равнялось бы единице, следует замерить длину по крайней мере 1000 зерен.

17.4. χ^2 КАК КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ

Критерий χ^2 был впервые предложен Пирсоном для оценки согласованности наблюдаемых частот распределения с теоретическими; в частности, χ^2-распределение тесно связано с полиномиальным распределением. В этом случае критерий определяется по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E)^2}{E}. \qquad (17.5)$$

Он распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы γ.



Фиг. 17.1. Доверительные пределы для стандартных отклонений длин кварцевых зерен по замерам в шлифах.

В случае биномиального распределения, критерий χ^2 можно представить в следующем виде:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i - np)^2}{npq}$$

или как отношение суммы квадратов отклонений от среднего по каждой наблюдаемой величине к дисперсии, т. е. ns^2/σ^2, что и представляет собой величину χ^2 с числом степеней свободы ν. Число степеней свободы меняется в зависимости от задачи; его впервые ввел Фишер [125].

В качестве примера возьмем частоту распределения осей кварцевых зерен из кварцитов Хомвуд, где ожидаемое нормальное распределение было подсчитано по среднему μ (= 1,2478) и дисперсии σ^2 (= 0,3117), вычисленным по наблюдаемой серии значений (табл. 17.2). Этапы вычисления также показаны в табл. 17.2. Рекомендуем при работе заранее заготовить стандартную форму для подсчета искомого нормального распределения и последующих этапов сравнения и проверки наблюдаемых и ожидаемых распределений по образцу этой таблицы. В столбиках 1—6 отражена процедура вычисления ожидаемой нормальной функции по выборочным значениям среднего и дисперсии, в столбике 7 даны выборочные частоты. Отклонения наблюдавшихся значений от ожидаемых ($O - E$) даны в колонке 8, а их квадраты перечислены в 9; вклад каждой ячейки в χ^2 записывается в колонке 10 как $\frac{(O-E)^2}{E}$; по сумме этих значений и вычисляется соответственно общее значение χ^2.

Таблица 17.2

Вычисление критерия χ^2 для проверки гипотезы нормального распределения при $\mu = 1{,}4278$ и $\sigma^2 = 0{,}3117$

Класс, ϕ-единицы (от — до)		x $X - \overline{X}$	$\frac{x}{\sigma}$	Площадь, $\phi(t)$	Разность	E $N \times$ разность		Наблюдаемое (O)	$O - E$	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
1		2	3	4	5	6		7	8	9	10
$-\infty$	$-0{,}5$	$-1{,}9278$	$-3{,}453$	0,49966	0,00034	0,14	} 2,35	6	+3,65	13,3225	5,67
$-0{,}5$	0,0	$-1{,}4278$	$-2{,}557$	0,4948	0,0049	2,21					
0,0	0,5	$-0{,}9278$	$-1{,}662$	0,4515	0,0433	19,49		12	−7,49	56,1001	2,88
0,5	1,0	$-0{,}4278$	$-0{,}766$	0,2794	0,1721	77,45		59	−18,45	340,4025	4,40
1,0	1,5	$+0{,}0722$	$+0{,}129$	0,0517	0,3311	149,00		191	+42,00	1764,00	11,84
1,5	2,0	$+0{,}5722$	$+1{,}025$	0,3485	0,2968	133,56		117	−16,56	274,2336	2,05
2,0	2,5	$+1.0722$	$+1{,}920$	0,4726	0,1241	55,85		55	−0,85	0,7225	0,01
2,5	3,0	$+1{,}5722$	$+2{,}816$	0,0250	0,0250	11,25		7	−4,25	18,0625	1,61
3,0	3,5	$+2{,}0722$	$+3{,}712$	0,4999	0,0023	1,04	} 1,09	2	} 3 +1,91	3,6481	3,35
3,5	∞				0,0001	0,05		1			
Сумма					1,0000	450,04		450		$\chi^2 = 31{,}81$	

Примечание. Число степеней свободы = (число классов) − 3 = 8 − 3 = 5; одна степень свободы теряется для среднего, σ и итога. $P \leqslant 0{,}001$. Цифры колонки 3 находят путем вычитания из 0,5000 для каждого отрицательного значения $(X - \overline{X})/\sigma$ и прибавлением к 0,5000 для каждого положительного значения $(X - \overline{X})/\sigma$ по таблице нормальной функции.

Теперь необходимо найти число степеней свободы. Оно равно количеству сравниваемых классов за вычетом количества наложенных ограничений. В этом случае среднее, дисперсия и общая площадь кривой фиксированы, и так как имеется восемь сравниваемых классов, получаем 8—3 = 5 степеней свободы. Обращаясь к таблицам χ^2-распределения [128, 15], находим, что в ряду, соответствующем числу степеней свободы $n = 5$ при значении $P = 0{,}001$, χ^2 равен 20,517. Вычисленное же значение (31,81) превышает это число, значит, $P < 0{,}001$. Другими словами, если это распределение значений характеризует случайную выборку из некоторой нормальной совокупности со средним $\mu = 1{,}4278$, $\sigma = 0{,}558$, то такая выборка встретится меньше одного раза на 1000. Это и будет тот необычайный случай, когда мы, по-видимому, справедливо отвергаем гипотезы; но он может встретиться также, когда распределение не нормально или когда выборка не случайна, или же когда перед нами то и другое. Наибольшие слагаемые в сумме χ^2 соответствуют конечным и двум центральным классам, отклонения в конечных классах обычны из-за небольшого количества наблюдений по ним, но недостаточность в классе 0,5—1,00 ϕ и отмеченный эксцесс в модальном классе 1,00—1,5 ϕ являются действительно серьезными расхождениями. В этом случе χ^2-критерий согласуется с результатом анализа моментов за счет положительного эксцесса (фиг. 13.1).

В общем χ^2-критерий согласия часто независим от анализа момента и приводит к иным результатам; моменты лучше характеризуют вид изучаемой кривой, но критерий χ^2 несет информацию о том, где именно есть расхождение между наблюдаемыми и ожидаемыми значениями.

Ожидаемое распределение может быть биномиальным, пуассоновским и т. д., но способ использования критерия согласия остается тем же независимо от числа степеней свободы (см., например, табл. 14.10). Пример использования этого критерия в типичных петрографических задачах для установлений преимущественной ориентации в петрографических структурах дается Чейсом (в работе [120]); в том случае, если структура беспорядочна и в ней

не обнаружено преобладающего направления в ориентации, а в каждом классе ожидается равное количество замеров, ожидаемое распределение, следовательно, должно быть равномерным, или прямоугольным (см. также работу [156]); ожидаемые частоты внутри классов могут быть найдены путем деления общего числа наблюдений на количество классов. Наблюдаемое распределение затем можно сравнить с ожидаемым и использовать χ^2 в качестве критерия согласия. Если гипотеза равномерного распределения отклонена, значит, некоторый класс (или классы) содержит эксцесс наблюдений и в данном образце породы, видимо, преобладает какое-то структурное направление.

Для палеонтолога больший интерес представляет использование в качестве ожидаемых распределений родовых отношений; такое исследование особей по выборке часто применяется для доказательства связей, жизнеспособности и т. д. [127, 289, 409].

17.5. ТАБЛИЦЫ СОПРЯЖЕННОСТИ ПРИЗНАКОВ И χ^2

Использование критерия χ^2 в таблице сопряженности признаков для решения геологических задач было впервые предложено Эйзенхартом [107]. Это очень важная область применения статистических критериев как в лабораторных, так и при полевых геологических исследованиях. По существу, наблюдения классифицируют по определенным признакам, представляющим интерес, и возникает вопрос, являются ли эти признаки независимыми? Предположим, например, что геолог разделил серию образцов из одного или более обнажений на два класса по их окраске (красные и зеленые) и на два же класса по размерности зерен (крупнозернистые и тонкозернистые); эти наблюдения можно было бы представить в виде частот, как это сделано в табл. 17.3.

Таблица 17.3

Таблица распределения 240 образцов пород, классифицированных по цвету и размерам зерен (модельный пример)

Размер зерен	Цвет		Общее количество
	красный	зеленый	
Крупный	120	30	150
Тонкий	40	50	90
Сумма	160	80	240

Возникает вопрос, как на основе такой информации решить —«зависит ли зернистость фракции, представленной данными образцами, от цвета пород»?

Важно понять, что подобную *таблицу сопряженных признаков порядка* 2×2 можно обобщить и обработать в связи с той или иной гипотезой достаточно строго [464]. Обозначим выбранные признаки как A (цвет) и B (размер); тогда серия геологических образцов может быть классифицирована как A и «не A» ($\bar{A}$, пли α) и как B и «не B» ($\bar{B}$, или β). Обозначим частоту встречаемости признака A во всей серии как (A), признака B (как (B). α как (α) и β как (β) (табл. 17.4).

Если между признаками A и B нет связи, следует ожидать, что A среди B распределено в такой же пропорции, как и среди «не B». Мы можем определить два таких несвязанных признака как независимые, тогда в качестве критерия независимости для A и B будем иметь:

$$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)}. \qquad (17.6)$$

Таблица 17.4

Обобщенная таблица сопряженных признаков порядка 2×2

Признак 2	Признак 1		Итог
	B	β	
A	(AB)	$(A\beta)$	(A)
α	(αB)	$(\alpha\beta)$	(α)
Сумма	(B)	(β)	N

Отсюда следует:

$$1-\frac{(AB)}{(B)}=1-\frac{(A\beta)}{(\beta)}=(B)-\frac{(AB)}{(B)}=(\beta)-\frac{(A\beta)}{(\beta)}.$$

Аналогично

$$(\alpha B)/(B)=(\alpha\beta)/(\beta);$$

$$\frac{(AB)}{(B)}=(AB)+\frac{(A\beta)}{(B)}+(\beta)=\frac{(A)}{N}. \qquad (17.7)$$

По этой таблице можно вывести, конечно, и многие другие эквивалентные взаимоотношения между частотами, которые удовлетворяли бы условиям независимости [464]; возможно, наиболее привычным из них явилось бы такое условие: «если признаки A и B независимы, то доля AB в данной совокупности (формации) равна доле A, умноженной на долю B», т. е.

$$\frac{(AB)}{N}=\frac{(A)}{N}\,\frac{(B)}{N}. \qquad (17.8)$$

Это правило — основное для характеристики независимости во всех видах статистического анализа.

Предположим теперь, что характерные признаки A и B каким-то образом связаны; тогда можно написать [464]:

1. Если $(AB)>\frac{(A)\,(B)}{N}$, то A и B коррелируются положительно (17.9a)

2. Если $(AB)<\frac{(A)\,(B)}{N}$, то A и B коррелируются отрицательно (17.9b)

Важно заметить, что такая корреляция основана на независимости; следовательно, A и B сичитаются коррелирующимися тогда и только тогда, когда они встречаются совместно чаще, чем это можно было бы ожидать в случае их независимости.

Связь не может быть обнаружена, когда некоторые A равны некоторым B, как бы ни велики были их количественные соотношения. Следует отметить, что в приведенной таблице классы даются по номинальной шкале (например, «красный, зеленый») или порядковой (например, крупнозернистый > мелкозернистый) и эти количества являются частотами, определяемыми при подсчете; следовательно, такая процедура применима во всех случаях измерения «состава» там, где элементы совокупности классифицированы по характерным признакам, которые могут быть как связанными, так и несвязанными. Разумеется, иногда полезно использовать тот тип классификации для результатов измерений по интервальной шкале и шкале отношений, который используется в критериях согласия.

Возвращаясь к критерию независимости, из равенства (17.8) можем найти (AB) по (A), (B) и (N), если предположим, что характерные признаки независимы. К тому же, так как $(AB)+(A)=(A)$, можем определить (A) и аналогично (αB) и $(\alpha\beta)$; очевидно, что, если одна из клеток в таблице

сопряженных признаков с обозначением частот заполнена и дано общее количество, все остальные клетки также считаются фиксированными при числе степеней свободы 1. Возможно также составить таблицу ожидаемых частот в условиях гипотезы независимых и наблюдаемых частот. По такому набору можно вычислить статистику χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O-E)^2}{E},$$

которая будет иметь χ^2-распределение с заданным числом степеней свободы, если гипотеза независимости верна. Следовательно, можно проверить предположение о независимости набора частот. Ожидаемые значения для примера, заданного табл. 17.3, даны в табл. 17.5.

Таблица 17.5

Ожидаемые частоты для образцов пород, расклассифицированных по цвету и размерности зерен. Гипотеза: признаки взаимонезависимости

Размер зерен	Цвет		Итого
	красный	зеленый	
Крупный	100	50	150
Мелкий	60	30	90
Сумма	160	80	240

Тогда $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O-E)^2}{E}$

дает $\chi^2 = \frac{20^2}{100} + \frac{(-20)^2}{60} + \frac{(-20)^2}{50} + \frac{20^2}{80} = 23{,}66.$

Заметим, что суммы отклонений $(O - E)$ равны нулю для каждого ряда и колонки по всей таблице. Теперь можем использовать таблицы χ^2 для отыскания в них величины, близкой значению $\chi^2 = 23{,}66$ при числе степеней свободы $\nu = 1$. Находим, что при 5-процентном уровне значимости (P_{05}) $\chi^2 = 3{,}841$ а при 0,1-процентном уровне (P_{001}) $\chi^2 = 10{,}827$. Так как вычисленное значение χ^2 превышает последнее, можем сказать, что если гипотеза H_0 независимости цвета и размеров зерен и верна для данной совокупности, то такая выборка встретится случайно или при случайном опробовании этой формации не чаще, чем один раз на 1000. Так как такая частота весьма мала, мы отвергаем гипотезу, рискуя при этом ошибиться в случае повторения испытаний не более одного раза на 1000.

Так как, согласно распределению частот, признаки цвета и размерности не независимы, может возникнуть желание изучить их возможные взаимоотношения путем сравнения (AB) и (A) $(B)/N$, как это дано в приведенных выше неравенствах (17.9a) и (17.9b):

$$120 > 150 \times \frac{160}{240} = 100.$$

Следовательно, A и B связаны положительно, и в нашем примере грубозернистые слои чаще будут иметь красную окраску, а тонкозернистые — зеленую. Возможно, надо подчеркнуть, что «направление» связи действительно имеет смысл, только когда признаки даются по порядковой шкале, однако эта связь является типичной для любой таблицы 2×2.

При использовании χ^2 в качестве критерия проверки гипотезы независимости следует усвоить, что мы обрабатываем частоты в любом одном ряду или колонке, как будто они биномиальны. Убедитесь, что количество наблюдений адекватно: в общем случае ожидаемая частота в любой клетке таблицы может превышать 5; таблицы 2×2 Йейтс [459] разработал на улучшенном базисе оценочных требований, который известен как *поправка Йейтса на непрерывность* [127, 77, 290].

17.6. ПРИМЕНЕНИЕ χ^2-КРИТЕРИЯ ПРИ РЕШЕНИИ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Во многих интересных случаях мы сталкиваемся с более чем двумя классами по одному или обоим признакам, в частности если наблюдения представлены частотами. Предположим, например, что имеем достаточно большой массив данных о частотах встречаемости тяжелых минералов в некоторой формации и что взят образец, который надо сравнить с «параметрами» этой совокупности, как это показано на модельном примере, приводимом в табл. 17.6. Здесь мы рассматриваем значения совокупности как ожидаемые,

Таблица 17.6

Сравнение выборки тяжелых акцессориев с акцессориями предполагаемых материнских пород

Минерал	Циркон	Рутил	Турмалин	Гранат	Хлоритоид	Ставролит	Итого
Формация E	27	7	25	20	8	13	100
Выборка O	55	6	28	18	4	19	100
Разность $O-E$	−2	−1	+3	−2	−4	+6	7
$(O-E)^2$	4	1	9	4	16	36	70
$(O-E)^2/E$	0,15	0,14	2,25	0,20	2,0	2,77	7,51-жиров

Число степеней свободы = (числу сравниваемых классов) — (число ограничений) = 6 — 1 = 5

$20 > P > 10$

основывая это предположение на большом количестве предыдущих оценок. В этом случае можно различать 5 из 6 частотных классов, но коль зафиксированы частоты по 5 классам и зафиксирована общая сумма встреченных частот, то тем самым фиксирован также и 6-й класс; иначе говоря, имеется 6 степеней свободы. Вычисленная статистика χ^2 имеет χ^2-распределение с этим числом степеней свободы, и из таблиц χ^2-распределения [15] получаем, что значение 7,51 лежит между значением χ^2 для $P = 0{,}20$ и значением для $P = 0{,}10$; поэтому можем написать, что $0{,}20 > P > 0{,}10$. Другими словами, мы имеем дело со случайной выборкой из данной совокупности (формации): указанные частоты встречаемости (минералов) могут быть в среднем от 10 до 20 раз на 100 в «случаях опробования». Следовательно, это не дает основания отвергнуть гипотезу. Такой образец может считаться принадлежащим данной формации.

Теперь предположим, что приведенные частоты взяты по двум образцам, и следует узнать, сходны ли они, т. е. взяты ли оба образца из одной и той же совокупности. Вычисление сведено в табл. 17.7. Прежде всего очевидно, что возможностей заметить разницу возникает больше, когда сравнивается один образец с другим, а не образец с совокупностью [1]; поэтому значение χ^2 будет ожидаться большим, однако в данном примере оно фактически меньше, и вероятностное утверждение будет $0{,}80 > P > 0{,}70$. Это тот случай, когда

[1] Так как параметры в последнем случае фиксированы.

Таблица 17.7

Сравнение частоты встречаемости акцессорных минералов по двум выборкам с целью определить, принадлежат ли обе выборки к одной и той же совокупности.

Минерал	Циркон	Рутил	Турмалин	Гранат	Хлоритоид	Ставролит	Итого
Выборка A	27	7	25	20	8	13	100
Выборка B	25	6	28	18	4	19	100
Итого	52	13	53	38	12	32	200
Ожидаемое значение	26	6,5	26,5	19	6	16	100
$O-E$ (A)	+1	+0,5	−1,5	+1	+2	−3	0
$O-E$ (B)	−1	−0,5	1,5	−1	−2	+3	0
Итого	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{(O-E)^2}{E}$ (A)	$\frac{1}{26}$	$\frac{0,25}{6,5}$	$\frac{2,25}{26,5}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{16}$	
То же (B)	$\frac{1}{26}$	$\frac{0,25}{6,5}$	$\frac{2,25}{26,5}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{16}$	
	0,038	0,038	0,085	0,053	0,667	0,563	
	0,038	0,038	0,085	0,053	0,667	0,563	
Сумма	0,076	0,076	0,170	0,106	1,334	1,126	$\chi^2=2,888$

Число степеней свободы = (числу сравниваемых классов) — (число ограничений) =
$=(c-1)(r-1)=5$
$80>P>70$

иа основании упомянутой гипотезы данные два образца могут встретиться в одной и той же совокупности от 70 до 80 раз в среднем на каждые 100 испытаний. Следовательно, эти два образца, вероятно, взяты из одной совокупности (формации).

Число степеней свободы вычисляют по общей формуле, которая пригодна для таблиц любой сложности. На практике часто бывает удобно подсчитать число переменных в выборках, что не служит препятствием для применения χ^2. Фактически же использование процентных отношений или пропорций вместо прямых подсчетов может привести к потере информации и к снижению чувствительности критерия, когда количество подсчетов гораздо больше ста, а данные фиксированы в процентах. Когда же подсчет содержит менее ста индексов, вычисление соотношения в расчете на сто ведет к «ошибке».

Итак: χ^2-критерий можно применять и в более сложных случаях, как это показано в табл. 17.8, в которой отчасти повторяется случай табл. 12.2. В обеих таблицах видна определенная связь между цветом породы и размерностью зерен, и с помощью критерия χ^2 становится ясным, что эти два признака в представленной серии данных не независимы, т. е. выявленная связь характерна и для всей совокупности.

Может быть более реален вопрос, нужна ли вообще мера степени изучаемой зависимости? Однако χ^2-критерий мало что может дать для ответа на такой вопрос [233]. С целью дать оценку степени зависимости было предложено множество различных критериев; их достоинства и слабые стороны рассмотрены в работах [233, 1; 144, 398]. Одни из таких критериев — коэффициент сопряженности Пирсона — C [233] равен:

$$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}. \qquad (17.1)$$

Таблица 17.8

Зависимость между цветом и размером зерен по образцам трехдюймового керна из пачки Солт-Уош формации Моррисон, плато Колорадо

А — все прочие классы (остальные обозначения см. в табл. 12.1)

Цвет	Структура						Сумма
	Cs	Ms	MsA	Fs	FsA	S + Mst	
А. Наблюдаемые частоты							
Красный						38	38
Красный и зеленый					16	116	132
Зеленый			5	21	4	25	55
Красный, белый и зеленый	10	22	1	1	6		40
Белый и зеленый	1	116	2	30	2		151
Белый	38	6	2	1			47
Сумма	49	144	10	53	28	179	463
Б. Ожидаемые значения для части *А*							
Красный	4,0	11,8	0,8	4,3	2,3	14,7	38
Красный и зеленый	14,0	41,1	2,9	15,1	8,0	51,0	132
Зеленый	5,8	17,1	1,2	6,3	3,3	21,3	55
Красный, белый и зеленый	4,2	12,4	0,9	4,6	2,4	15,5	40
Белый и зеленый	16,0	47,0	3,3	17,3	9,1	58,4	151
Белый	5,0	14,6	1,0	5,4	2,8	18,2	47
Сумма	49	144	10	53	28	179	463
В. Вклад в вычисление критерия $(O-E)^2/E=\chi^2$							
Красный	4,0	11,8	0,8	4,3	2,3	36,9	60,1
Красный и зеленый	14,0	41,1	2,9	15,1	8,0	82,8	163,9
Зеленый	5,8	17,1	12,0	34,3	0,1	0,6	69,9
Красный, белый и зеленый	8,0	7,4	0,0	2,8	5,4	15,5	39,1
Белый и зеленый	14,1	10,3	0,5	9,3	6,7	58,4	99,3
Белый	217,8	5,1	1,0	3,6	2,8	18,2	248,5
Сумма	263,7	92,8	17,2	69,4	25,3	212,4	$\chi^2=680,8$

Число степеней свободы $=(c-1)(r-1)=(6-1)(5-1)=20$ $P<0{,}001$

Для рассматриваемого случая

$$C=\sqrt{\frac{771{,}8}{1234{,}8}}=0{,}7908.$$

К сожалению, точное значение коэффициента C не очень ясно; в то время как существует возможность применять χ^2-критерий для выявления независимости, степень взаимозависимости не поддается столь строгой проверке. Кендалл [233] показал, что в таблице порядка $t \times t$, где имеется наивысшая степень зависимости данных,

$$C=\sqrt{\frac{t-1}{t}}.$$

Так, в таблице 2 × 2 значение C не может превышать 0,707, а значение C для табл. 17.4, к примеру, будет

$$C = \frac{23{,}66}{263{,}66} = 0{,}2995.$$

Здесь наблюдается определенная зависимость между данными, но не очень сильная. В таблице порядка 3 × 3 $C \leqslant 0{,}816$, в таблице 4 × 4 $C \leqslant 0{,}866$. Этот коэффициент возрастает вместе с числом классов в таблице. Возможно, было бы понятнее, если бы этот коэффициент оказался единым для всех таких крайних случаев взаимозависимости. Полный обзор всех таких возможностей дан Гудманом и Краскалом [144] и Стюартом [417].

17.7. РАЗЛОЖЕНИЕ χ^2

Другое важное свойство χ^2-критерия заключается в его аддитивном характере, которое в общем сводится к следующему: «Значения χ^2 сами подчиняются χ^2-распределению с числом степеней свободы, равным сумме степеней свободы для каждого независимого значения χ^2» [127].

Такая формулировка допускает увеличение серии выборок на столько, что в конечном счете можно выявить гораздо меньшие отклонения от ожидаемых, если они сохраняются в большей части независимых испытаний. Более того, аддитивный характер критерия χ^2 делает возможным такое его разложение, что различные влияющие эффекты могут быть оценены отдельно [269, 290, 444].

Группа из 11 студентов расклассифицировала штуфы доломитов Ниттани из обнажения у дороги 545 близ Белфонта (Пенсильвания). Образцы различались по оттенкам серого цвета и размерам зерен, причем каждый признак имел три градации для разделения выборки на три класса. Результаты представлены в табл. 17,9*А*. Работа проводилась следующим образом.

В качестве первой стадии опыта на земле перед обнажением был разложен набор образцов; в соответствии с пределами изменений выбранных признаков образцы были разложены в виде таблицы 3 × 3. Они должны были использоваться в дальнейшем как стандарты для сравнения. Затем каждый студент отобрал образцы, начав отбор с одного края обнажения, в случайно выбранных точках по однофутовым интервалам вдоль обнажения. Каждый образец сравнивался с эталонным набором и результат заносился в таблицу частот по классам.

Вначале определялось, соответствует ли размер зерен и цвет этим образцам и, разумеется, совокупности, представляемой данным обнажением. Вклад каждого параметра в вычисление χ^2 приведен в табл. 17,9 *Б*. В условиях гипотезы, согласно которой два изучаемых признака независимы, значение χ^2 подчинено χ^2-распределению с числом степеней свободы $\nu = 4$. Высокое значение этого критерия привело к отклонению данной гипотезы, т. е. зернистость и цвет в данной совокупности взаимосвязаны.

Темные доломиты в общем чаще оказывались более крупнозернистыми, в то время как светлые — мелкозернистыми. Нелишне также отметить. что средний класс (среднезернистые) по обоим признакам выделялся не очень хорошо. Это, возможно, свидетельствовало о том, что данные классы были выделены слишком подробно и что средний класс оказался фактически резервным — им пользовались лишь в том случае, когда наблюдатель не был уверен, к какому из классов отнести образец.

Результаты, полученные каждым студентом, были занесены в таблицу, которая позволяла применить 11 независимых критериев для проверки упомянутой гипотезы. Как и следовало ожидать, различные операторы получили различные результаты, что отражено в данных табл. 17.10. Вначале надо, было убедиться, что эти несовпадения не настолько велики, чтобы считать

Таблица 17.9

Классификация образцов доломитов из обнажения у дороги 545 близ Белфонта (Пенсильвания)

Цвет	Размер зерен			Итого
	крупный	средний	тонкий	
А. Наблюдаемая частота				
Темный	53	71	52	176
Средний	67	116	104	287
Светлый	14	57	121	192
Итого	134	244	277	655
Б. Вклад в χ^2 по каждой клетке $(O-E)^2/E$				
Темный	8,02	0,44	6,74	15,20
Средний	1,17	0,77	2,49	4,43
Светлый	16,29	2,94	19,51	38,74
Сумма	25,49	4,15	28,74	$\chi^2=58,37$

Число степеней свободы $=(c-1)(r-1)=4$; $P \ll 0{,}001$

что результаты слишком разнородны для объединения; затем требовалось использовать наиболее чувствительный критерий, т. е. критерий по возможности с наибольшим числом степеней свободы. Учитывая свойства χ^2, мы можем суммировать отдельные результаты, получая обобщенное значение

Таблица 17.10

Проверка зависимости цвета и размерности зерен в доломитах по показаниям каждого наблюдателя

Оператор	N	Число степеней свободы	χ^2	P
A	50	4	11,81	0,02—0,01
B	58	4	18,32	0,01—0,001
C	51	4	2,76	0,70—0,50
D	54	4	8,83	0,10—0,05
E	54	4	12,28	0,02—0,01
F	70	4	19,21	$<0{,}001$
G	84	4	13,70	0,02—0,01
H	52	4	4,92	0,30—0,20
I	55	4	6,94	0,20—0,10
J	67	4	3,27	0,70—0,50
K	60	4	10,80	0,05—0,02
Сумма	655	44	112,94	
Объединенный результат	655	4	58,37	$\ll 0{,}001$

$\chi^2 = 112{,}94$ с числом степеней свободы 44. Большая часть χ^2 ограничена значением $\nu = 30$, поэтому при $\nu > 30$ приходится вводить дополнительную процедуру. Обычно при $\nu > 30$ можно использовать критерий, предложенный

Фишером; этот критерий определен выражением

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}. \qquad (17.11)$$

Величина t в условиях проверяемой гипотезы независимости распределена нормально с параметрами 0,1 [1].

В данном примере

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} = \sqrt{225{,}88} - \sqrt{87} = 5{,}702. \qquad (17.12)$$

Вероятность превышения такого значения может быть установлена по таблицам площадей под нормальными кривыми, а так как выражение (17.12) относится к одной половине кривой, искомая вероятность равна удвоенной табличной. Ввиду того что значение $t = 5{,}7$ в условиях нормального распределения может появиться меньше чем в трех на 100 000 случаев, что для χ^2 составит шесть случаев на 100 000, то представляется нереальной и проверяемая гипотеза, которую следует отклонить.

χ^2-Критерий может быть разложен далее для выявления неоднородности среди наблюдателей. Соответственная процедура обобщена в табл. 17.11; вычисление вероятности дает

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} = \sqrt{109{,}14} - \sqrt{79} = 1{,}57.$$

Таблица 17.11

Проверка на однородность показаний среди наблюдателей при классификации образцов доломитов

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Компоненты χ^2	P
Сумма	44	112,94	< 6 в 10^5
Объединенный результат	4	58,37	$\ll 0{,}001$
Расхождение между операторами	40	54,57	< 12 в 10^2

По таблицам площадей под нормальными кривыми такое отклонение дает 0,5000—0,4418 = 0,0582, чему соответствует 2 × 0,0582 = 0,1164. Другими словами, такое значение критерия будет появляться в условиях гипотез однородности в среднем более двенадцати раз на 100. Это не дает основания для отклонения гипотезы, из чего следует, что отдельные значения критерия не меняются более, чем этого можно было бы ожидать. Для последующих исследований следовало бы сократить это несоответствие более тщательной стандартизацией методики.

Разложение может быть намного эффективнее для выделения составных частей данного критерия при соответственно спланированных более сложных экспериментах (см., например, работы [79, 127, 290, 409]).

17.8. ПРОЧИЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ χ^2

Имеется множество других ситуаций, в которых χ^2-распределение играет важную роль, например при проверке однородности, описанной при рассмотрении показателя рассеяния на стр. 247. О критерии, необходимом для определения однофазности дисперсий, впервые предложенном Бартлеттом [21], см. в разделе 17.12.

В работах Кокрана [77], Кимбалла [235] и Максуэлла [79] разобраны многие другие случаи применения χ^2; там же дана и литература по этим вопросам.

[1] Критический разбор альтернативной процедуры проверки принадлежит Кендаллу [233].

Статистика χ^2 эффективна во всех тех ситуациях, когда мы имеем дело с частотами или с классами частот. Например, если изучаемые случайные величины принимают значения на номинальной или порядковой шкале, статистика χ^2 обычно является наиболее эффективным критерием для проверки гипотез; примеры приводит Зигель [398].

17.9. КРИТЕРИЙ ДИСПЕРСИОННОГО ОТНОШЕНИЯ

χ^2-Критерий может быть рассмотрен как критерий сравнения сумм квадратов нормальных отклонений с соответствующей дисперсией; этот критерий можно использовать для сравнения двух выборочных дисперсий. Так, начиная с $\chi^2 = ns^2/\sigma^2$ и предполагая, что имеются две выборки, по которым можно подсчитать выборочные дисперсии s_1^2 по n_1 наблюдениям и s_2^2 по n_2 наблюдениям (где $n_1 = n_2$), мы можем выразить соответственные χ^2 как

$$\chi_1^2 = \frac{n_1 s_1^2}{\sigma_1^2}, \qquad \chi_2^2 = \frac{n_2 s_2^2}{\sigma_2^2}.$$

Теперь предположим, что требуется проверить гипотезу, что две выборки взяты из нормальной совокупности с дисперсией σ^2. Тогда гипотезу можно записать как $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$,

$$\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} = \frac{n_1 s_1^2/\sigma^2}{n_2 s_2^2/\sigma^2}$$

и определить критерий, впервые выведенный Фишером и названный им F в честь Снедекора [409]; этот критерий определен выражением

$$F = \frac{n_1 s_1^2/(n_1-1)}{n_2 s_2^2/(n_2-1)} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}. \tag{17.13}$$

Отношение дисперсий F имеет распределение

$$f(F) = C \frac{F^{[(\nu_1-2)/2]}}{\nu^2 + \nu_1 F^{(\nu_1+\nu_2)/2}},$$

для которого составлены подробные таблицы [15, 128]. Заметим, что, прежде чем. применять таблицы отношений дисперсий, надо найти три числа: ν_1, ν_2 и F В этих таблицах для разных значений ν_1 обычно отводятся колонки, для ν_2 — строки, а значения F составляют массив таблицы. Таблицы составлены для каждого вероятностного уровня; наиболее обычны таблицы для 5-процентного (P_{05}) и 1-процентного (P_{01}) уровней; более обширные таблицы составили Фишер и Йейтс [128] по дополнительным 10-, 20- и 0,1-процентным уровням значимости. Важно отметить, что первое отношение дисперсий, определенное Фишером и обозначенное им e^{2z}, эквивалентно критерию F.

F-распределение симметрично, поэтому в таблицах даются значения только для одной половины этой кривой; принято подставлять наибольшее значение в числитель и рассматривать это как s_1^2, следовательно, значение ν_1 будет соответствовать этой дисперсии.

17.10. ПРИМЕНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДИСПЕРСИЙ

Главное применение отношение дисперсий находит в дисперсионном анализе, описанном в гл. 18—20. В разделе 7.6 приведен геологический пример, иллюстрирующий значение данного критерия, которое в этом случае заключается в экспериментальной проверке преимущественной ориентации.

Распределение результатов наблюдений в самых общих чертах имеет унимодальный характер, и дисперсионный минимум может быть найден методом, который описан Чейсом [61]. Так как мы проверяем гипотезу слу-

чайного распределения, которому в этих условиях соответствует равномерное (прямоугольное) распределение в интервале $\pm 90°$, то ожидаемая дисперсия может быть вычислена как $\sigma^2 = 2700$. Это будет максимальная дисперсия: во всех других случаях наблюденная дисперсия будет меньше. Кроме того, число степеней свободы, связанных с этой дисперсией, действительно бесконечно, так как оно является параметром совокупности. Тогда для проверки гипотезы равенства дисперсий можно воспользоваться отношением

$$F = \frac{\sigma^2}{s^2}, \quad \nu_1 = \infty, \quad \nu_2 = n - 1,$$

где

$$F = \frac{2700}{s^2}, \quad \nu_1 = \infty, \quad \nu_2 = n - 1.$$

Практически предполагается, что может быть использован более консервативный критерий, в котором $\nu_1 = \nu_2 = n$ — число наблюдений в выборке. Выбирая для n значение, скажем 200, мы определим, что значение s^2 должно достигать больших значений F. При $\nu_1 = \nu_2 = n = 200$ 5-процентное значение F будет 1,26 [15], так что можем написать: $1{,}26 = \frac{2700}{s^2}$ или $s^2 = \frac{2700}{1{,}26}$, или $s \geqslant 46{,}29$.

Следовательно, чтобы гипотезу случайной ориентации в структуре можно было отклонить, наблюдаемая дисперсия должна быть меньше 2143, или стандартное отклонение может быть меньше 46,3°. Множество аналогичных примеров приводится в статьях, описывающих подобную процедуру проверки ([156, 153]; см. также разделы 7.6 и 7.7). Если наблюдаемое распределение ориентации близко к нормальному, то ожидаемое значение приблизительно равно 30° ($s \approx 30°$, см. стр. 131) и $s^2 = 900$; тогда $F = \frac{2700}{900} = 3$, и при этом требуется, чтобы число наблюдений было около 20. В общем выявляемая степень преобладающей ориентации бывает обычно меньше, чем этого можно ожидать для нормального распределения [164], хотя такие распределения все же встречаются [113—115].

Использование отношения дисперсий в качестве критерия проверки предположения, что данные две выборки взяты из совокупности с дисперсией σ^2, — процедура весьма обычная. Например, о стандартном отклонении длинных осей кварцитовых галек (a) из монтурсвиллского карьера гравия, выраженных в ϕ-единицах, свидетельствует табл. 17.12 [1].

Таблица 17.12

Методы отбора проб	s^2	n
Бороздовый	0,707	525
Послойный	0,659	450

Так как обе эти выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности и так как распределение, возможно, нормальное, мы можем сопоставить эти оценки с помощью отношения дисперсий, где $F = 0.707/0{,}659 = 1{,}072$ с $\nu_1 = 524$, $\nu_2 = 449$. 5-процентное значение для $\nu_1 = 500$. $\nu_2 = 400$ будет $F_{05} = 1{,}16$, а $F_{01} = 1{,}24$. Так как значение $F = 1{,}072$ меньше, чем оба эти значения, оснований для отклонения данной гипотезы нет; следовательно, эти две выборки взяты из одной совокупности с единой дисперсией.

[1] Неопубликованные данные; заметим, что s^2 может быть использовано в качестве $\hat{\sigma}^2$, если $n \approx n - 1$, для $n = 200$, $n/(n-1) = 1{,}005025$.

17.11. КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОДНОРОДНОСТИ НАБОРА ДИСПЕРСИЙ (КРИТЕРИЙ КОКРАНА)

Из более обширных исследований имеем семь оценок дисперсии длинных (a) осей кварцитовых галек совокупности, представляющей монтурсвиллский гравий, причем одна из них значительно больше остальных:

$$s_1^2 = 0{,}928, \quad s_2^2 = 0{,}769, \quad s_3^2 = 0{,}590,$$
$$s_4^2 = 0{,}725, \quad s_5^2 = 0{,}651, \quad s_6^2 = 0{,}707.$$
$$s_7^2 = 0{,}689,$$

Объемы выборок неодинаковы, но $n_1 = 104$, а все остальные превышают $n = 300$. Следовательно, предположив, что последние равны, ибо они все «большие», мы можем использовать критерий Кокрана для приблизительной проверки гипотезы однородности всего набора оценок. Критерий Кокрана выражается отношением

$$\frac{\text{Наибольшее значение } s^2}{\sum\limits_i s_i^2}, \quad i = 1, \ldots, 6,$$

что дает

$$\frac{0{,}928}{4{,}101} = 0{,}2263.$$

По специальным таблицам, содержащим значения критерия Кокрана [96, 110], находим, что при $n = 144$ и $k = 7$ и процентном уровне значимости критическое значение равно 0,1929; таким образом, приходим к выводу, что максимальная оценка, видимо, выходит за пределы оценок дисперсии этой совокупности. Такой критерий дает возможность предположить, что для получения стабильной оценки дисперсии данной совокупности требуется гораздо больше 100 наблюдений при данном объеме выборок и при данной процедуре измерений.

При подобной проверке объемы выборок вообще-то должны быть равными; однако в приведенном примере это требование не обязательно, так как все выборки достаточно большие.

17.12. КРИТЕРИЙ ОДНОРОДНОСТИ НАБОРА ДИСПЕРСИЙ

Теперь можно отвергнуть значение дисперсии, выходящее за допустимые пределы, и опять задаться вопросом: представляют ли остающиеся 6 выборочных дисперсий однородный набор оценок одной и той же дисперсии? Процедура такой проверки впервые была предложена Бартлеттом [20] и описана Снедекором [409], Беннетом и Франклином [27], а общая математическая основа рассмотрена Хартли [186].

Данный критерий определен как [27]

$$B = \frac{1}{\varepsilon}\left(\nu \ln s^2 - \sum_i \nu_i \ln s_i^2\right) = \frac{2{,}30259}{C}\left(\log s^2 - \sum_i \nu_i \log s_i^2\right), \quad (17.14)$$

где ln — натуральные логарифмы, log — десятичные. Символом C обозначена поправка на смещение, определяемая как

$$C = 1 + \frac{\sum\limits_i (1/\nu_i) - 1/\nu}{3(k-1)}, \quad (17.15)$$

где ν_i — степени свободы при индивидуальных оценках дисперсий, k — количество таких оценок. Тогда $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$. Подсчет лучше всего делать таблично, как это показано Снедекором [409] и в табл. 17.13.

Таблица 17.13

Проверка гипотезы однородности дисперсий длинных осей кварцевых галек гравия Монтурсвилл

Выборка	$\nu_i s_i^2$	Число степеней свободы	Обратная величина $1/\nu_i$	Дисперсия	$\log s_i^2$	$\nu_i \log s_i^2$
1	244,542	318	0,003145	0,769	−0,11407	−36,27426
2	190,570	323	0,003096	0,590	−0,22915	−74,01545
3	242,875	335	0,002985	0,725	−0,13966	−46,78610
4	194,649	299	0,003344	0,651	−0,18642	−55,73958
5	370,468	524	0,001908	0,707	−0,15058	−78,90392
6	295,891	449	0,002227	0,659	−0,18111	−81,31839
$k=6$	1538,995	2248	0,016705			−373,03770

$$s^2 = \sum_i \frac{\nu_i s_i^2}{\nu} = \frac{1538,995}{2248} = 0,684606; \quad \log s^2 = -0,16455;$$

$$\nu \log s^2 = 2248 \times -0,16455 = -369,90840.$$

$$\text{Тогда } B = \frac{1}{C}\left(\nu \ln s^2 - \sum_i \nu_i \ln s_i^2\right)$$

$$= \frac{2,30259}{C}\left(\nu \log s^2 - \sum_i \nu_i \log s_i^2\right)$$

$$= \frac{2,30259}{1,000956}(-369,90840 + 373,03770) = 7,1986.$$

$$C = 1 + \frac{0,016705 - 0,000445}{3(6-1)} = 1,001084;$$

тогда $B = 7,1977$.

Для значений $\nu_i = 5$ или более распределение B приближается к χ^2-распределению с числом степеней свободы $k - 1$. В этом случае $k - 1 = 5$, и подходящим значением χ^2 будут 7,289 при вероятности 0,20 и $\chi^2 = 6,064$ при вероятности 30; следовательно, если эти значения выборочных дисперсий характеризуют одну и ту же дисперсию совокупности, такое значение B встретится в среднем от 20 до 30 раз на каждые 100 испытаний, и гипотеза об однородности не отвергается. Очевидно, что эти дисперсии могут служить для оценки дисперсии совокупности и что они дадут лучшую оценку s^2 для σ^2, где $s^2 = 0,685$ с числом степеней свободы 2,248.

ГЛАВА 18

Однофакторный дисперсионный анализ

Именно то обстоятельство, что изменчивость результатов наблюдений в точных науках и в определенных областях техники была уменьшена, заставило как-то забыть, что, с одной стороны, непрактично полностью ликвидировать изменчивость, с другой — что измерение изменчивости не только более важно, чем ее сокращение, но даже весьма желательно.

H. M. D a v i e s, The Application of Variance Analysis to Some Problems of Petroleum Technology, J. Inst. Petrol., 32 (212), 466, 1946

18.1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве случаев в наших экспериментах мы обычно имеем дело со сравнением более двух серий измерений, и тогда применяется дисперсионный анализ. Он заключается в одновременном сравнении средних и дисперсий, и при помощи соответствующим образом подобранных критериев эти источники информации могут быть использованы отдельно. Дисперсионный анализ по существу заключается в разложении общей изменчивости на части, которым приписываются отдельные причины, приводящие к общим изменениям. Можно сказать, что предела этому разложению нет, при соответственно подготовленном эксперименте таких способов существует очень много; каждый из них приспособлен к определенной исследовательской ситуации. Однако исследователю необходимо перед каждым экспериментом определить свою цель и способ ее достижения. Начинающий обычно ошибается, когда он предпочитает слишком сложное решение, надеясь получить максимальную информацию; но сложные эксперименты редко бывают удачными, если не имеется достаточных сведений о природе тех изменений, которые можно представить в виде случайной величины. Поэтому следует начинать с простого способа и постепенно его надстраивать на базе накопленного опыта.

Разложение общей дисперсии может быть записано следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}_{.g})+(\overline{X}_{.g}-\mu)]^2 \qquad (18.1)$$

Видно, что общая изменчивость наблюдений относительно истинного среднего состоит из изменчивости наблюдений внутри каждой выборки относительно выборочных средних и изменчивости выборочных средних относительно истинного. Чтобы получить такое разложение, необходимо собирать данные небольшими выборками; так как истинное среднее неизвестно, то для его оценки практически используют итоговое среднее $\overline{\overline{X}}_G$ от всего набора, что дает

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{\overline{X}}_{..})^2=\sum_{i,\,j=1}^{n}[(X_{ij}-\overline{X}_{.j})+(\overline{X}_{.j}-\overline{\overline{X}}_{..})]^2. \qquad (18.2)$$

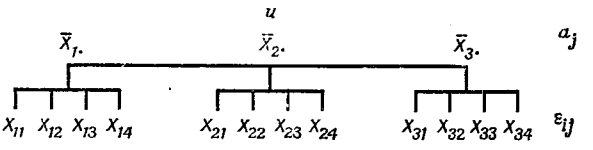
Искусство экспериментального решения основывается на выборе подходящей серии данных, что позволяет выделить причины изменчивости. Допустим, каждое наблюдение записывается как

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, \tag{18.3}$$

т. е. в нем содержится истинное среднее μ плюс дополнительная случайная величина ε_i. Например, при взвешивании одной и той же пробы на аналитических весах каждый раз результат взвешивания немного отличается от всех других; Это изменение от наблюдения к наблюдению и представляет собой величину ε_i; каждое взвешивание также содержит оценку постоянного параметра μ — истинного веса пробы. Предположим, экспериментатор решил, что для отклонений X_i от μ важную роль играют температурные изменения. Сделав затем k наблюдений по j различным температурам α, он может написать:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{i(j)}, \tag{18.4}$$

т. е. каждое наблюдение X_{ij} есть оценка для μ, к которой добавляется некоторая величина, появляющаяся вследствие изменения температуры: α_j плюс другая величина от неизвестных причин $\varepsilon_{i\,(j)}$, обычно называемая *ошибкой* (см., например, фиг. 18.1). Индексы $i\,(j)$ обозначают ошибку по i в пределах j.



Источник изменчивости	*Степени свободы*	*Ожидаемый средний квадрат*
Между X_α	$\alpha - 1$	$\sigma_e^2 + r\sigma_\alpha^2$
В пределах X_α	$\alpha(r-1)$	σ_e^2
Сумма	$\alpha r - 1$	σ_{tot}^2

Фиг. 18.1. Экспериментальное решение и способ отбора; однофакторная классификация.
$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{i\,(j)}$.

Ясно, что каждый эксперимент обладает структурой, которая может быть представлена в форме равенства связывающего результата наблюдений с причинами изменчивости относительно истинного значения параметра, скажем истинного среднего (фиг. 18.1). Кроме того, если полученное экспериментальное распределение данных удачно, изменчивость параметра, приписываемая некоторому фактору, например температуре, сократит ошибку, повысится чувствительность эксперимента. Если же $\varepsilon_{i\,(j)}$ остается прежним как с изменением температуры, так и без него, можно заключить, что не температура является существенной причиной изменений. К тому же каждый эксперимент, который может быть записан в форме равенства, сходного с равенством (18.4), имеет свой выборочный план и таблицу дисперсионного анализа, как это показано на фиг. 18.1.

18.2. ПРИМЕР ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА: ПОРИСТОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНА ДВУМЯ МЕТОДАМИ

Предположим, что предложена новая процедура измерения некоторого свойства материалов; например, величина X_i представляет результат измерения пористости. Чтобы показать преимущество нового метода, произведены определения пористости двух серий образцов обоими методами — новым и старым. В качестве иллюстрации предположим, что эти две серии образцов выбраны случайно из одной совокупности — нефтеносного песчаника [1]. Пять образцов опробованы обоими методами независимо друг от друга, при-

[1] О сравнении этих методик с использованием двухфакторной классификации см. в разделе 19.2.

чем пористость была определена в одних и тех же условиях. Ясно, что показать границы применения этого метода в пределах широкой области изменчивости — значит определить его точность. Данные представлены в табл. 18.1.

Таблица 18.1

Пористость пяти образцов нефтеносных песчаников, определенная двумя методами ([339], а также см. табл. 16.4)

Номер образца	По Пайлу и Шерборну	По Коберли
1	17,1	16,92
2	20,1	20,68
3	19,3	18,05
4	10,2	10,39
5	25,9	26,00
$\sum_{1}^{5} X_i$	92,60	92,04
$\overline{X}_.$	18,52	18,408
$\left(\sum_{1}^{5} X\right)^2$	8574,7600	8471,3616
$\sum_{1}^{5} X_i^2$	1843,7600	1823,7034

Структура такого эксперимента может быть выражена следующим определением каждого наблюдения:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{i(j)}. \tag{18.5}$$

В выбранном случае $j = 1,2$ означает номер серии наблюдения, каждому из которых приписан номер $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Расположение выборок иллюстрируется фиг. 18.1, а наблюдения X_{ij} — случайные в пределах каждой серии.

18.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Чтобы упростить вычисления, необходимо сократить общую формулу, определенную равенством (18.2), путем следующего разложения его правой части:

$$\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}(X_{ij}-\overline{\overline{X}}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}[(X_{ij}-\overline{X}_{.j})+(\overline{X}_{.j}-\overline{\overline{X}}_{..})]^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{.j}-\overline{\overline{X}}_{..})^2 +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})(\overline{X}_{.j}-\overline{\overline{X}}_{..}), \tag{18.2}$$

где g — число групп, k — число наблюдений в группах. Третий член этого разложения равен нулю, так как сумма отклонений от среднего равна нулю. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}(X_{ij}-\overline{\overline{X}}_{..})^2=\sum_{j=1}^{g}\sum_{i=1}^{k}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2+k\sum_{j=1}^{g}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..})^2. \qquad (18.6)$$

Затем, используя соотношение

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=\sum X_i^2-\frac{(\sum X_i)^2}{n},$$

где $n=kg$, вычисленную формулу можно представить как

$$\sum_{ij}X_{ij}^2-\frac{(\sum X_{ij})^2}{kg}=SS_{\text{tot}}, \qquad (18.7)$$

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{(\sum_{i=1}^{5}X_i)^2}{5}-\frac{(\sum_{ij=1}^{10}X_{ij})^2}{10}=\text{SS между средними по каждому методу.} \qquad (18.8)$$

Общий член $(\Sigma X_{ij})^2/gk$ принято для краткости называть поправочным членом, который мы обозначим СТ. Теперь можем начать вычисления, причем рекомендуем производить их в определенном порядке; в представленном выше случае порядок вычислений следующий:

$$\frac{(\sum_{ij}X_{ij})^2}{gk}=\frac{184{,}64^2}{10}=3409{,}19296=\text{CT}.$$

Подсчитываем общую сумму квадратов SS_{tot} [см. равенство (18.7)]:

$$\begin{aligned}\sum_{ij}X_{ij}^2&=3667{,}46340\\ \text{CT}&=83409{,}19296\\ \hline 258{,}27044&=\text{SS}_{\text{tot}}\end{aligned}$$

Подсчитывая член, оценивающий изменчивость выборочных средних относительно генеральной средней, или [уравнение (18.8)]:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{g}(\sum_{i=1}^{k}X_{ij})^2&=17046{,}2126\\ k&=3409{,}22452\\ -\text{CT}&=3409{,}19296\\ \hline 0{,}03156&=\text{SS}_{\text{tot}}\end{aligned}$$

Конечный член находят по разности, т. е. вычитанием изменчивости в выборках из общей изменчивости; можно также оценить изменчивость внутри каждой выборки отдельно, что может понадобиться при неравных количествах наблюдений в выборках. Можно заметить, что есть серьезное теоретическое основание для применения выборок равных объемов независимо от упрощений в арифметике [44].

Все вычисления могут быть обобщены в виде таблицы дисперсионного анализа (табл. 18.2).

Таблица 18.2

Сравнение двух методов определения пористости; однофакторный дисперсионный анализ

Число групп	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий, F	F_{05}
$g=2$	Различия между методами	$g-1=1$	0,03136	0,03136	0,0009	5,32
$k=5$	В пределах метода (ошибка)	$g(k-1)=8$	258,23908	32,2799		
$gk=10$	Сумма	$gk-1=9$	258,27044			

18.4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Таблица однофакторного дисперсионного анализа с одним уровнем изменчивости, как в разобранном примере, может быть представлена в общей форме, показанной табл. 18.3.

Таблица 18.3

Однофакторный дисперсионный анализ с одним уровнем изменчивости

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Ожидаемый средний квадрат
Между сериями наблюдений	$j-1=1$	SS_j	$\frac{SS_j}{j-1}$	$\sigma_\varepsilon^2+i\sigma_j^2$
В пределах серий (ошибка)	$j(i-1)=8$	SS_i	$\frac{SS_i}{j(i-1)}$	σ_ε^2
Сумма	$ji-1=9$	S_{tot}		

Нулевая гипотеза может быть сформулирована в следующем виде: «данные две выборки являются случайными и относятся к одной и той же (нормальной) совокупности», причем изменения между выборочными данными в среднем равны нулю, т. е. $\sigma_j^2 = 0$, а отношение дисперсий $(\sigma_\varepsilon^2 + i\sigma_j^2)/\sigma_\varepsilon^2 = 1$. Для выборок небольших объемов, как в случае разобранного выше примера, дисперсии заменены их оценками. Так как числитель этой дроби обычно больше знаменателя, такое отношение подчиняется F-распределению [44] с числом степеней свободы соответственно $g - 1$ и $g(k - 1)$, и критерий для проверки гипотезы представляет собой F-критерий, как описано в предыдущей главе (стр. 298). Если разница между выборочными средними превышает различия между наблюдениями в пределах выборок, это отношение будет больше табличного значения F-критерия и сформулированную выше гипотезу следует отвергнуть при соответствующем уровне значимости.

В примере, приведенном в табл. 18.2, вычисленное значение F -критерия меньше 1, и гипотеза принимается; иначе говоря, средние по этим двум выборкам обладают изменчивостью, не превышающей изменчивость между отдельными выборочными наблюдениями; поэтому обе методики изменчивости дают аналогичные выборочные средние.

Практически, разумеется, это еще не позволяет определить, какая из двух методик лучшая, еще предстоит решить, что же следует из критерия «лучшей методики». Можно утверждать, например, что одна из методик более точна и что можно проверить с помощью отношения дисперсий для двух

групп наблюдений. Так, если отдельные выборочные дисперсии

$$\hat{\sigma}_1^2 = 32{,}2020, \qquad \hat{\sigma}_2^2 = 32{,}3578,$$

то отношение дисперсий $\hat{\sigma}_2^2/\hat{\sigma}_1^2 = 1{,}0048$. Табличное значение F при уровне значимости 0,05 с $\nu_1 = 4$ и $\nu_2 = 4$ будет $F_{0,\,05,\,4,\,4} = 6{,}39$; следовательно, нет причин для предпочтения точности одного метода по сравнению с другим (сравнение этих двух методик продолжается в разделе 19.2).

18.5. ЭКСПЕРИМЕНТ, ПРИВОДЯЩИЙ К ОДНОФАКТОРНОМУ АППАРАТУ С ДВУМЯ УРОВНЯМИ ИЗМЕНЧИВОСТИ

Когда нет данных о результатах эксперимента, принято использовать простейшие из возможных способов упорядочивания данных, чтобы при последующих исследованиях можно было более эффективно и с большим основанием планировать эксперименты. В некоторых случаях, если, например, факты отбираются многоступенчатым способом, выбор ограничен, и экспериментальное решение предопределено способом отбора. Оба ограничения очень распространены в геологии.

В такой ситуации важно провести предварительный эксперимент для определения диапазона изменений, в частности определить тот диапазон, в котором неизвестные причины изменчивости, обычно квалифицируемые как ошибки наблюдений, представляют лишь незначительную часть общей изменчивости. В качестве примера эксперимента такого типа возьмем исследование объемной плотности осадков с помощью ртутных весов [148]. Пусть взяты 5 выборок пород t по всем заданным типам пород: образец керна (5516) среднемиоценовых отложений Тринидада представлял субграувакки [1], образец керна (В-8) верхнедевонских брадфордских песков Пенсильвании — более кварцевый тип субграувакк [268], образец керна (Н-13) верхнедевонской формации Венанго — протокварциты, а образец (5292), взятый из обнажения ортокварцитов Орискани нижнего девона Западной Виргинии, завершил этот композиционный ряд от граувакк до кварцитов. Для сопоставления в выборку был также включен образец аркозовых песчаников из керна олигоценовой формации Сеспе (Калифорния). Каждая проба была разделена на три части m; отличия между этими частями являются мерой однородности типов пород. Затем каждая восьмая, девятая и десятая подпробы были проанализированы 5 (k) раз. Различия между этими повторными замерами представляют различия, возникающие в результате действия неучтенных факторов, и характеризуют ошибку эксперимента. Способ отбора и экспериментальная процедура обобщенно показаны в табл. 18.4, а последовательность отбора — на фиг. 18.2. Затем каждое определение объемной плотности для каждой подвыборки повторяется случайно, т. е. переизмерение 1 из подвыборки 1 из выборки (5292) не имеет никакого отношения к любому другому повторному измерению 1; таким образом, отбор является совершенно случайным. Если каждое повторное измерение 1 — первое из каждой выборки, различия между этими измерениями будут содержать систематическую ошибку, возникающую при измерении. В таком случае эмпирическая ранжировка должна быть совершенно другой, т. е. двухфакторной. Подобной прикидкой преследуется две цели. Первая, основная, заключается в том, что изменчивость определяется на двух уровнях, так что большое значение для эксперимента имеют дисперсии. Чтобы эти дисперсии можно было считать подходящими оценками, выборки (типы пород и подвыборки) должны быть случайными. Так как объемная плотность в пределах любого петрографического

[1] Все петрографические термины приводятся по Крынину [270].

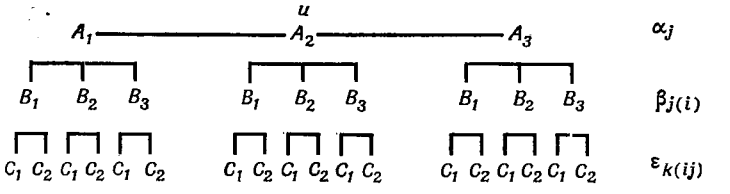
Таблица 18.4

Многостадийное опробование для однофакторной классификации с двумя уровнями изменчивости

Тип пород	Ортокварциты Орискани			Протокварциты Венанго			Граувакки Брадфорд			Третичные граувакки			Аркозовые песчаники Сесп		
Возраст	Нижний девон			Верхний девон			Верхний девон			Миоцен средний			Олигоцен		
Местоположение	Западная Виргиния			Пенсильвания			Пенсильвания			Тринидад			Калифорния		
Номер образца	5292			H-13			B-8			5516			5293		
Подвыборка	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Повторные серии k	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Подвыборка m	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$	$\bar{X}_m$
Тип пород t	$\bar{X}_t$			$\bar{X}_t$			$\bar{X}_t$			$\bar{X}_t$			$\bar{X}_t$		

t—5 образцов пород; m—3 подвыборки; $k=5$ повторений.

класса изменяется в широких пределах, то взятые образцы отображают лишь часть довольно обширного диапазона независимо от того, случайны они



Источник изменчивости	*Степени свободы*	*Ожидаемый средний квадрат*
Между A: α_j	$a-1$	$\sigma_e^2 + k\sigma_\beta^2 + kb\sigma_\alpha^2$
Между B : $I\beta_j(i)$	$a(b-1)$	$\sigma_e^2 + k\sigma_\beta^2$
В пределах B : $\varepsilon_k(ij)$	$ab(k-1)$	σ_e^2
Сумма	$abk-1$	σ_{tot}^2

Ф и г. 18.2. Экспериментальное решение и способ отбора; однофакторная классификация с двумя уровнями изменчивости.

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}.$$

или же представительность их может быть определена лишь после более тщательного исследования. Вторая цель совершенно другая. Она касается вопроса о положении объемной плотности аркозовых песчаников; находится ли она за пределами последовательности кварциты — граувакки или включается в этот ряд? Вопрос решается путем исследования различий между средними значениями плотности по типам пород.

Здесь важно помнить, что если мы будем исходить из этих же данных, то на эти два вопроса практически нам будет трудно ответить. Резкие различия среди средних имеют отношение к оценке среднего значения всей совокупности, а имеется всего четыре типа обломочных пород: кварциты, субграувакки,

метаморфические граувакковые и аркозовые песчаники; из них в эксперименте участвуют три типа. Такого рода вопросы приводят к построению модели анализа первого типа (см., например, работы [27, 44, 109]); они главным образом касаются различий между средними, а дисперсии не столь существенны. С другой стороны, когда поставленные вопросы касаются изменений, отбор характеризуется как случайный из бесконечной совокупности. Такое положение известно как аналитическая модель второго типа. Модель 1 иногда называют фиксированной, модель 2 — случайной; разумеется, существуют и смешанные модели, а фиксированные и случайные представляют собой крайние случаи. Для иллюстраций всегда имеется возможность рассматривать имеющиеся данные под углом зрения модели 1 (фиксированного типа) или модели 2 (случайного типа). Фактически, однако, эксперимент выполняется обычно с некоторой определенной целью, и одна из моделей может быть подходящей, а другая — нет вследствие того, что способ отбора и совокупности в этих двух случаях различны. Примеры фиксированной, случайной и смешанной моделей будут приведены в последующих главах. Так как решения становятся более сложными и более определенными, случаи применения модели 1 или 2 встречаются реже, часто только одна из них подходит к условиям проводимого эксперимента. Решение вопроса о выборе модели должно быть принято до начала эксперимента, и обычно этот выбор определяется характером задачи, подлежащей экспериментальному разрешению.

18.6. ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Итак, эксперимент заключается в пяти повторных определениях по трем подвыборкам каждого из пяти типов пород объемной плотности, выражаю-

Таблица 18.5

Общая форма вычислений при однофакторном дисперсионном анализе с двумя уровнями изменчивости

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средние квадраты	Ожидаемый средний квадрат
Между средними по типам пород	$t-1=4$	$\frac{\sum_{1}^{t}\left(\sum_{1}^{mk} X\right)^2}{mk} - \mathrm{CT} = \mathrm{SS}_t$	$\frac{\mathrm{SS}_t}{t-1}$	$\sigma_\varepsilon^2 + k\sigma_m^2 + mk\sigma_t^2$
Между средними по подвыборкам	$t(m-1)=10$	$\frac{\sum_{1}^{tm}\left(\sum_{1}^{k} X\right)^2}{k} - \mathrm{CT} - \mathrm{SS}\varepsilon = \mathrm{SS}_m$	$\frac{\mathrm{SS}_m}{t(m-1)}$	$\sigma_\varepsilon^2 + k\sigma_m^2$
Различия между повторными замерами (погрешность эксперимента)	$tm(k-1)=60$	$\sum_{1}^{tmk} X^2 - \mathrm{CT} - \mathrm{SS}_t - \mathrm{SS}_m = \mathrm{SS}_k$	$\frac{\mathrm{SS}_k}{tm(k-1)}$	σ_ε^2
Сумма	$tmk-1=74$	$\sum_{1}^{tmk} X^2 - \mathrm{CT} = \mathrm{SS}_{\mathrm{tot}}$		

$$\mathrm{CT} = \frac{\left(\sum_{1}^{tmk} X\right)^2}{tmk}.$$

Вычисления сумм, средних и сумм квадратов однофакторного

Возраст	Ортокварциты Орискани			Протокварциты Венанго			Тип
	нижний девон			верхний девон			
Местоположение	Западная Виргиния			Пенсильвания			
Номер образца	5292A	5292B	5292C	H-13-A	H-13-B	H-13-C	
Объемная плотность							
Повторные серии 1	2,461	2,487	2,459	2,235	2,242	2,222	
2	2,465	2,505	2,471	2,219	2,228	2,221	
3	2,440	2,466	2,453	2,206	2,233	2,222	
4	2,422	2,472	2,450	2,210	2,230	2,211	
5	2,447	2,469	2,496	2,221	2,225	2,243	
$\sum_{1}^{k} X = \sum_{1}^{5} X$	12,255	12,399	12,329	11,091	11,158	11,119	
$\overline{X}$	2,4510	2,4798	2,4658	2,2182	2,2316	2,2238	
$\left(\sum_{1}^{k} X\right)^2 = \left(\sum_{1}^{5} X\right)^2$	150,185025	153,735201	152,004241	123,010281	124,500964	123,63216	
$\sum_{1}^{mk} = \sum_{1}^{3} \sum_{1}^{5} X$		36,983			33,368		
$\overline{\overline{X}}$		2,4655			2,2245		
$\left(\sum_{1}^{mk} X\right)^2 = \left(\sum_{1}^{15} X\right)^2$		1367,742289			1113,423424		
$\sum_{1}^{t} \left(\sum_{1}^{mk} X\right)^2$				5280,27565			
$\div\ (mk) = 15$				352,018377			
$\sum_{1}^{t} \sum_{1}^{m} \left(\sum_{1}^{k} X\right)^2$				1760,155033			
$\div 5$				352,030607			
$SS_{tot} = \sum_{1}^{tmk} X^2 = \sum_{1}^{75} X^2$				352,067205			
$CT = \sum_{1}^{tmk} X = \sum_{1}^{75} X$	161,771			$\overline{\overline{X}}_G = 2,156946$			
$\left(\sum_{1}^{tmk} X\right)^2 = \left(\sum_{1}^{75} X\right)^2$	26169,856441						
$\div tmk \div 75$	348,931419						
$\sum_{1}^{k} X^2$	30,037519	30,748095	30,402347	24,602563	24,900362	24,72697	
$\frac{\left(\sum_{1}^{k} X\right)^2}{k}$	30,037005	30,747040	30,400848	24,602056	24,900193	24,7264	

Таблица 18.6

дисперсионного анализа с двумя уровнями изменчивости

породы	Граувакки Брадфорд			Третичные граувакки			Аркозовые песчаники Сесп		
	верхний девон			Миоцен (средний)			Олигоцен		
	Пенсильвания			Тринидад			Калифорния		
	B-8-A	B-8-B	B-8-C	5516A	5516B	5516C	5293A	5293B	5293C
	2,182	2,193	2,181	1,816	1,994	1,878	2,097	2,096	2,109
	2,146	2,135	2,108	1,798	1,832	1,847	2,076	2,096	2,091
	2,176	2,163	2,147	1,813	1,812	1,852	2,087	2,098	2,092
	2,179	2,148	2,167	1,802	1,822	1,855	2,089	2,083	2,108
	2,179	2,177	2,171	1,790	1,813	1,848	2,091	2,093	2,097
	10,862	10,816	10,774	9,019	9,273	9,273	10,440	10,466	10,497
	2,1724	2,1632	2,1548	1,8038	1,8546	1,8546	2,0880	2,0932	2,0994
	117,983044	116,985856	116,079076	81,342261	85,988529	85,988529	108,993600	109,537156	110,187009
		32,452			27,565			31,403	
		2,16346			1,8376			2,09353	
		1053,132304			759,829225			986,14840[9]	
	23,597498	23,399276	23,219164	16,268933	17,222257	17,198083	21,798956	21,907574	22,037699
	23,596609	23,377171	23,215815	16,268472	17,197706	17,197706	21,798720	21,907431	22,037402

щейся в граммах на кубический сантиметр; всего получается 75 значений плотности. Экспериментальная процедура описана в разделе 11.2.

Вычисления могут быть суммированы в обобщенной форме в виде таблицы однофакторного дисперсионного анализа с двумя уровнями изменчивости (табл. 18.5): имеем t (= 5) типов пород и m (= 3) подвыборок, r (= 5) число повторений. Вычислительная процедура начинается с подсчета величины CT (см. сноску в табл. 18.5). Затем вычисляется общая сумма квадратов SS_{tot}, после которой подсчитывается величина SS_t, расположенная в верху табл. 18.5. «Компонента ошибок» SS_e (в данном случае SS_h) вычисляется как разность. Эти суммы и средние значения рассматриваемого примера приведены в табл. 18.6, а результаты дисперсионного анализа показаны в табл. 18.7.

Таблица 18.7

Дисперсионный анализ объемной плотности образцов осадочных пород

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий, F	F_{05}	F_{01}	F_{001}
Между средними по типам пород	4	3,086958	0,771795	631,0217***	3,48	5,99	11,28
Между средними подвыборками	10	0,012230	0,0012230	2,0050*	1,99	2,63	3,87
Между повторными замерами (ошибка)	60	0,036598	0,00060996				
Сумма	74	3,135786					

Последовательность проверочных процедур определяется ожидаемыми средними значениями квадратов, приведенными в табл. 18.5.

Сначала сравнивается изменчивость средних по группам (подвыборкам) с изменчивостью среди повторений внутри групп. При этом нулевая гипотеза формулируется как утвержденная: «Эти группы (подвыборки) взяты наудачу из одной и той же нормальной совокупности». Этому утверждению равносильно равенство $\sigma_m^2 = 0$, из чего следует

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2 + k\sigma_m^2}{\sigma_\varepsilon^2} = 1.$$

Используя оценки $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ и $\hat{\sigma}_m^2$ для величин σ_ε^2 и o_m^2, получим

$$F = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2}{\hat{o}_\varepsilon^2} = \frac{0{,}0012230}{0{,}00060996} = 2{,}005.$$

Допустимое значение F при 5-процентном уровне значимости с 10 и 60 степенями свободы равно 1,99; так как вычисленное значение F превышает 1,99, нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернатива $\sigma_m^2 \neq 0$.

Теперь мы можем изучить изменчивость средних по типам пород, вычислив отношение

$$F = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2 + km\hat{\sigma}_t^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2} = \frac{0{,}7717395}{0{,}0012230} = 631{,}0217.$$

Допустимое значение F при уровне значимости 0,001 и 4 и 10 степенях свободы равно 11,28. Так как вычисленное значение F сильно превышает 11,28, гипотеза $o_t^2 = 0$ уверенно отклоняется и принимается альтернатива $o_t^2 \neq 0$.

Таким образом, можно сделать вывод, что изменчивость между средними по группам превышает изменчивость среди повторений внутри групп. Кроме того, изменчивость средних по типам пород прревышает изменчивость двух упомянутых типов. Ясно, что с помощью этой процедуры можно выявить различия между средними значениями плотности заполнения по типам пород. Это единственный вывод. который можно сделать на основе дисперсионного анализа. Для установления положения существенных различий и оценки изменчивости на каждом уровне требуются дополнительные критерии.

18.7. ОЦЕНКИ ДИСПЕРСИОННЫХ КОМПОНЕНТОВ

Одна из задач данного эксперимента заключается в изучении характеристик изменчивости на различных уровнях с целью использования их при выборе наилучшего выборочного плана в последующих экспериментах в сходных условиях. Если бы мы смогли сократить число повторений, то это, возможно, позволило бы увеличить число образцов пород, т. е. получить больше информации, соответствующей наиболее интересному для нас уровню изменчивости. В данном случае мы рассматриваем модель 2, в которой предполагается, что все выборки взяты из бесконечной совокупности. Это справедливо, если мы рассматриваем образцы одной породы, а не несколько петрографических классов для существующих типов пород.

Для того чтобы оценить изменчивость на различных уровнях или получить точечные оценки дисперсий, нужно рассмотреть дисперсионные компоненты.

Так, средняя дисперсия повторений, характеризующая эксперимент σ_ε^2, оценивается с помощью величины $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, равной в нашем примере 0,000610. Точечную оценку дисперсии на уровне подвыборки можно получить из выражения

$$\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{k} = \frac{0{,}001223 - 0{,}000610}{5} = 0{,}000123,$$

а оценку дисперсии — на уровне типов пород по формуле

$$\frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2 + mk\hat{\sigma}_t^2) - (\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2)}{mk} = \frac{0{,}7717395 - 0{,}0012230}{15} = 0{,}051368.$$

Эти оценки вместе с соответствующими или стандартными отклонениями приведены в табл. 18.8. Отчетливо видно, что изменчивость средних по образ-

Таблица 18.8

Точечные оценки дисперсии по различным выборочным уровням

Источник изменчивости	Дисперсия	Стандартное отклонение
Среднее по типам пород t	0,051368	0,227
Среднее подвыборок m	0,000123	0,011
Повторение (ошибка) r	0,000610	0,025

цам пород значительно превышает изменчивость, обусловленную всеми другими источниками, что позволяет значительно упростить метод анализа и использовать изменчивость этого уровня в качестве диагностического признания.

С другой стороны, изменчивость между подвыборками из одного и того же образца составляет только одну пятую изменчивости повторений. Из этого

следует, что если требуется установить различия между иодвыборками, то для этого нужно не менее пяти повторений.

Комбинируя описанные оценки, можно получить оценку генеральной выборочной средней. Так как

$$\mathrm{Var}(\overline{\overline{X}}_{..}) = \frac{\sigma_t^2}{t} + \frac{\sigma_m^2}{t_m} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{t_{mk}}, \qquad (18.9)$$

можно записать

$$\mathrm{Var}(\overline{\overline{X}}_{..}) \approx \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + k\hat{\sigma}_m^2 + mk\hat{\sigma}_t^2}{tmk} =$$

$$= \frac{0{,}000610 + 5 \times 0{,}000123 + 15 \times 0{,}051368}{75} = 0{,}010290. \qquad (18.10)$$

Соответствующее стандартное отклонение $\hat{\sigma}_{\overline{X}_{..}} = 0{,}1$. Если требуется изучить различия в средних по подвыборкам, для этого желательно сократить дисперсию ошибок, чего можно достигнуть, согласно выражению (18.9), путем увеличения числа повторений. Если же нужно выявить различия в средних для образцов, для этого достаточно только подвыборок.

18.8. РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ СРЕДНИМИ

Можно вычислить средние для различных уровней (табл. 18.9). Вместе с оценками дисперсий для различных уровней мы можем затем исследовать различия между этими средними. Результат одного из сравнений — между

Таблица 18.9

Средняя плотность по типам пород и подвыборкам

Тип породы	Среднее по типам пород	Среднее подвыборок		
		A	*B*	*C*
Орискани (5292)	2,4655	2,4510	2,4793	2,4658
Венанго (H-13)	2,2245	2,2182	2,2316	2,2238
Брадфорд (B-8)	2,1635	2,1724	2,1632	2,1548
Миоцен (5516)	1,8376	1,8038	1,8546	1,8546
Сесп (5293)	2,0935	2,0880	2,0932	2,0994

данными по аркозовым песчаникам Сесп и остальными породами — ожидался еще при планировании эксперимента, и если мы предположим, что дисперсия постоянна [1], а выборки случайны, можем перейти к построению доверительного интервала, использовав для этого дисперсию, скажем, средних значений по типам пород:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_t) = \frac{k\sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2}{mk} = \frac{0{,}00615 + 0{,}000610}{15} = 0{,}0000816, \text{ т. е.}$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_t)} = 0{,}009.$$

Тогда доверительный интервал для среднего по типам пород будет

$$\overline{X}_t - t_{\alpha,\nu}\hat{\sigma}_{\overline{X}_t} < \mu < \overline{X}_t + t_{\alpha,\nu}\hat{\sigma}_{\overline{X}_t},$$

где $t_{\alpha,\nu}$ — значение t-критерия Стьюдента, соответствующее заданной вероятности (надежности) α, скажем 95% ($t_\alpha = |t_{1-\alpha}|$) при числе степеней свободы $\nu = 14$; отсюда $t_{05,\,14} = 2{,}14$. Для среднего по аркозовым песчаникам Сесп это даст

$$2{,}0935 - 2{,}14 \times 0{,}009 < \mu < 2{,}0935 + 2{,}14 \times 0{,}009,$$

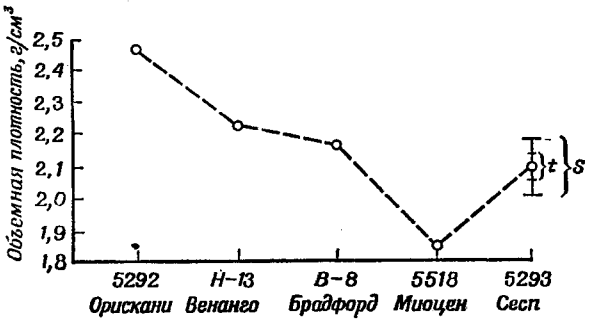
или

$$2{,}075 < \mu < 2{,}113.$$

[1] Ниже будет показано, что то предположение не обосновано (см. раздел 18.9).

Очевидно, что средняя объемная плотность аркозовых песчаников Сесп при 5-процентном уровне значимости отличается от средних по всем другим образцам (фиг. 18.3).

Если мы хотим выявить все различия, которые не анализировались в эксперименте, необходимо использовать методы, впервые описанные



Ф и г. 18.3. Средняя объемная плотность по типам пород.

Шеффе [385], в частности метод «всех контрастов». В этом случае мы определяем различия (контрасты) как

$$\theta = \sum_1^k c_i \overline{X}_i, \quad \text{где} \quad \sum_1^k c_i = 0. \tag{18.11}$$

Оценку для θ обозначим через H, и

$$H = \sum_i^k c_i \overline{X}_i.$$

Ее дисперсия равна

$$\mathrm{Var}\,(H) = \sum_i^k c_i^2 \frac{\sigma^2}{n_i}, \tag{18.12}$$

а соответствующая дисперсии оценка будет

$$\hat{V}(H) = \sum_1^k c_i^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{n_i} = \hat{\sigma}^2 \sum_1^k \frac{c_i^2}{n_i}.$$

В представленном примере

$$H = (\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4 - 4\overline{X}_5),$$

а $c_i = 1, 1, 1, 1, -4$, сумма их равна нулю. $\overline{X}_i$ — это средние по типам пород, тогда $H = 2{,}4655 + 2{,}2245 + 2{,}1635 + 1{,}8376 - 4\,(2{,}0935) = 0{,}317$. Теперь можем построить доверительный интервал, но для этого нужно заменить значение t-распределение Стьюдента коэффициентом Шеффе, т. е. коэффициентом S:

$$H - S\sqrt{\hat{V}(H)} < \theta < H + S\sqrt{\hat{V}(H)}, \tag{18.13}$$

а значение S получаем из выражения

$$S^2 = (k-1)\,F_\alpha\,(k-1,\ f), \tag{18.14}$$

где k — количество средних, α — заданный вероятностный уровень, а f — число степеней свободы, связанное с оценкой $\hat{\sigma}^2$. Для средней объемной плотности типов пород

$$S^2 = (5-1)\,F_{001}\,(4{,}14) = 4 \times 8{,}62 = 34{,}48; \qquad S = 5{,}87.$$

Необходимый доверительный интервал

$$H - 5{,}87 \times 0{,}009 < \theta < H + 5{,}87 \times 0{,}009.$$

Для образца аркозовых песчаников Сесп получаем

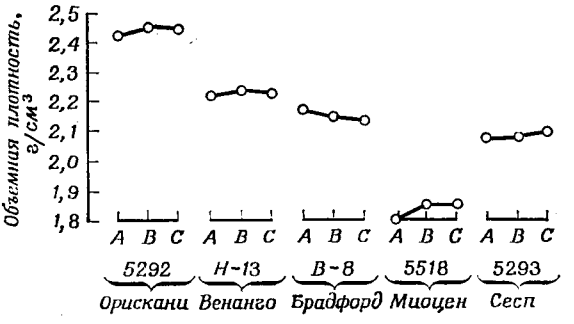
$$2{,}041 < \theta < 2{,}147,$$

что может быть записано как $H \pm 0{,}053$, где $H = 0{,}317$, и тогда доверительный интервал становится равным 0,264—0,370; так как данный интервал не содержит нуля, аркозовые песчаники Сесп по средней объемной плотности отличаются от других четырех образцов.

Большинство прочих критериев для проверки гипотез равенства средними значениями отвечает другим требованиям. Например, используя критерий, предложенный Тюки, мы можем предполагать, что дисперсии вокруг каждого среднего равны и что числа наблюдений в классах тоже равны [44]. Даннет [104] предложил критерий для сравнения k средних с проверкой. Эти критерии имеют различные назначения и приводят к различным интервалам [44, 385].

18.9. ОДНОРОДНОСТЬ НАБОРА ДИСПЕРСИЙ

Проверка гипотез с помощью дисперсионного анализа основана на предположении, что дисперсии для различных групп равны и что равны дисперсии для заданного уровня изменчивости. Если эти предположения не оправдываются и дисперсии одного уровня, в частности уровня ошибки, неоднородны,



Фиг. 18.4. Средняя объемная плотность для подвыборок в пределах типов пород.

то увеличивается вероятность того, что выводы, полученные из анализа, окажутся ошибочными. Признаком неоднородности дисперсий может служить необычно большая величина отношения дисперсий, или значения F. Если эксперимент построен на выявлении различий между средними, то обычно не ожидают, что различия будут большими; следовательно, необычно большое значение F. например такое, как приведено в табл. 18.7 на уровне типов пород, является основанием для предположения неоднородности дисперсии. В таком случае следует проверить гипотезу однородности дисперсий; критерий для этого выведен Бартлеттом [20], Этот критерий определен следующей формулой (см. также раздел 17.12) [1]:

$$B = \frac{1}{C}\left(n \ln \hat{\sigma}^2 - \sum_i^n k_i \ln \hat{\sigma}_i^2\right), \qquad (18.15)$$

[1] Более общая формула для выборок разных объемов дана Беннеттом и Франклином [27] и Браунли [44].

или

$$B = \frac{2{,}3026}{C}\left(n \log \hat{\sigma}^2 - \sum_1^n k_i \log \hat{\sigma}_i^2\right)$$

и

$$C = 1 + \frac{\sum_1^n (1/k_i) - 1/k}{3(n-1)},$$

где присутствует n оценок дисперсии, причем каждая из них получена по k_i наблюдениям, а $\hat{\sigma}^2$ является средним из дисперсионных значений. В данном примере $n = 15$ дисперсиям по трем подвыборкам в каждом из пяти типов пород; на основе $k_i = 5$ наблюдениям в каждой данные сведены в табл. 18.10.

Таблица 18.10

Проверка гипотезы однородности дисперсий ошибки при оценке объемной плотности; критерий Бартлетта; выборки одинакового объема

$n = 15$; $k = 5$

Выборка	Дисперсия	$\log \hat{\sigma}^2$
1	0,000514	$\overline{4}$,71096
2	0,001055	$\overline{3}$,02325
3	0,001399	$\overline{3}$,14582
4	0,000507	$\overline{4}$,70501
5	0,000169	$\overline{4}$,22789
6	0,000547	$\overline{4}$,73799
7	0,000889	$\overline{4}$,94890
8	0,002105	$\overline{3}$,32325
9	0,004349	$\overline{3}$,63839
10	0,000461	$\overline{4}$,66370
11	0,024551	$\overline{2}$,39007
12	0,000377	$\overline{4}$,57634
13	0,000236	$\overline{4}$,37291
14	0,000143	$\overline{4}$,15534
15	0,000297	$\overline{4}$,47276
Сумма		$\overline{54} + 7{,}09258 = \overline{47}{,}092580 = \sum_1^{15} \log \hat{\sigma}_i^2$

$$\sum_1^{15} \hat{\sigma}_i^2 = 0{,}037599; \qquad \hat{\sigma}^2 = 0{,}0025066,$$

$$\log \hat{\sigma}^2 = \overline{3}{,}399088; \qquad n \log \hat{\sigma}^2 = \overline{40}{,}986320;$$

$$n \log \hat{\sigma}^2 - \sum \log \hat{\sigma}_i^2 = \overline{40}{,}986320 - \overline{47}{,}092580 = 7{,}89344;$$

$$\chi^2 = 2{,}3026\,(k-1)\,(n \log \hat{\sigma}^2 - \sum \log \hat{\sigma}_i^2)$$
$$= 2{,}3026 \times 4 \times 7{,}89344$$
$$= 72{,}701740.$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(n-1)}\left[\sum \frac{1}{k-1} - \frac{1}{\sum (k-1)}\right] = 1 + \frac{1}{3(15-1)}\left[\sum \frac{1}{5-1} - \frac{1}{\sum (5-1)}\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{42}\left(\frac{225}{60} - \frac{1}{60}\right) = 1 + \frac{4}{45} = 1{,}0889.$$

Исправленное значение $\chi^2 = \frac{\chi^2}{C} = \frac{72{,}70174}{1{,}0889} = 66{,}762$ при числе степеней свободы $n - 1 = 14$, $\chi^2_{0{,}01,\ 14} = 36{,}123$; поэтому гипотеза однородной дисперсии отвергается.

Отношение B/C в условиях нулевой гипотезы — все дисперсии равны — распределено как χ^2 с $n-1$ степенями свободы. Это значение превышает табличное значение χ^2 при уровне значимости 0,01; следовательно, гипотеза отвергается и дисперсии неоднородны.

В таких условиях необходимо рассматривать каждый тип породы отдельно; дисперсионный анализ для отдельных образцов приведен в табл. 18.11.

Таблица 18.11

Дисперсионный анализ объемной плотности для каждого типа пород отдельно

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	F	F_{05}	F_{01}
Орискани						
между выборками	2	0,002074	0,001037	4,19*	3,88	6,93
между сериями повторений	12	0,002968	0,0002473...			
Сумма	14	0,005042				
Венанго						
между выборками	2	0,000453	0,0002265	2,22	3,88	6,93
между сериями повторений	12	0,001223	0,000101916...			
Сумма	14	0,001676				
Брадфорд						
между выборками	2	0,000775	0,0003875	0,73	3,88	6,93
между сериями повторений	12	0,006343	0,000528583...			
Сумма	14	0,007118				
Тринидад, миоцен						
между выборками	2	0,008602	0,004301	2,03	3,88	6,93
между сериями повторений	12	0,025389	0,00211575			
Сумма	14	0,033991				
Сесп						
между выборками	2	0,000326	0,000163	2,89	3,88	6,93
между сериями повторений	12	0,000676	0,0000563...			
Сумма	14	0,001002				

Видно, что только одна дисперсия для подвыборки ортокварцитов Орискани значительно превышает данные повторных замеров (фиг. 18.4).

Компоненты дисперсии, стандартное отклонение и коэффициент изменчивости CV [$CV\% = 100\ (\hat{\sigma}/\overline{X})$] для каждого типа пород сведены в табл. 18.12. Изменчивость ошибок довольно велика и меняется соответствен-

Таблица 18.12

Дисперсии и стандартные отклонения подвыборочных средних, ошибки и коэффициенты изменчивости по каждому типу пород

Тип породы	Подвыборка		Ошибка		CV, %
	$\hat{\sigma}_m^2$	$\hat{\sigma}_m$	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$	
Орискани	0,000263	0,016	0,000247	0,016	0,64
Венанго	0,000041	0,006	0,000102	0,010	0,45
Брадфорд		0,000	0,000529	0,023	1,38
Миоцен	0,000728	0,027	0,002116	0,046	2,50
Сесп	0,000036	0,006	0,000056	0,008	0,36

но с изменчивостью подвыборок. По-видимому, изменчивость ошибок в миоценовом образце велика вследствие рыхлости образца.

Изменчивость средних в подвыборках ортокварцитов Орискани могла бы отражать также и неравномерное распределение карбонатного цемента.

18.10. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

На основании проведенного эксперимента ясно, что метод определения объемной плотности малыми навесками (≈ 8 *г*) пород на ртутных весах адекватен определению различий между средними по типам пород. Если мы интересуемся изменениями значений подвыборок, необходимы соответственные повторные замеры для уменьшения ложных изменений с целью выявления различий между средними подвыборок из одной и той же выборки. При выборе способа отбора с целью достичь этого уменьшения необходимо экспериментально получить оценку величины изменчивости за счет ошибок, а в рыхлом образце породы оно может быть довольно значительным вследствие потери при перекладывании образцов. С другой стороны, в плотных породах пятнистое распределение карбонатного цемента приводит к возрастанию изменчивости на уровне подвыборок. Необходимо оценить причины этих изменений еще до начала тщательного исследования какой-либо совокупности осадочных пород (см., например, работы [74 и 158], а также раздел 11.3).

18.11. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При анализе совокупностей пород обычно применяется многостадийный, или последовательный, способ отбора. В результате однофакторный дисперсионный анализ с одним или несколькими уровнями изменчивости становится обычным экспериментальным способом анализа при изучении пород. Более того, выборочный план, основанный на совершенно случайном отборе, наиболее подходит там, где совсем нет предварительных данных или же информация об относительной оценке изменчивости на различных уровнях мала. Экспериментальное ранжирование при этом настолько просто, что его можно приспособить к неравным количествам образцов в подразделениях выборок. Последнее обстоятельство может возникнуть при невозможности получить равные подвыборки или же при утере образцов во время лабораторной обработки. Следовательно, по этому плану с успехом можно работать при предварительных исследованиях, и, в частности, он также подходит для контроля неучтенных причин изменчивости, так как этот самый низкий уровень обладает максимальным числом степеней свободы.

В геологической литературе имеются примеры различных выборочных планов — от простейших до весьма сложных (см., например, работу [299]). Один уровень изменчивости бывает весьма необходим для отделения ошибки эксперимента. Особый план выборки, который иллюстрируется на фиг. 2.2, впервые предложен Крамбейном [239]; впоследствии этот план был использован для дисперсионного анализа [155]. Он весьма эффективен при сравнении изменчивости по выборкам с изменчивостью других типов для установления изменчивости помимо ошибки эксперимента (оцененной в этом примере бороздовым опробованием).

Подробный анализ дисперсионных компонент и их использование для определения наиболее эффективного способа отбора посредством оценки стоимости описан Олсоном и Поттером [314]. Гнездовый (многоступенчатый) способ с сокращением числа уровней изменчивости, рекомендуемый при региональных исследованиях, описали Крамбейн и Слак [262].

ГЛАВА 19

Двухфакторный дисперсионный анализ

Всегда присутствует компонент, не поддающийся объяснению... который, по крайней мере частично, возникает вследствие влияния факторов, не учтенных в модели. Такие компоненты называются «остаточными», или «случайными», переменными. Если эти переменные в итоге обусловливают изменения, превосходящие те, которые явно учтены в наших моделях, мы не сможем получить достаточно ясного представления об изучаемой системе. В этом случае требуется насколько возможно сократить эти необъяснимые изменения.

R. L. Ackoff, The Meaning, Scope and Methods of Operations Research (R. L. Ackoff, Progr. in Operat. Res., p. 29, ORSA publ. 5, John Wiley and Sons, Inc., 1961)

19.1. ВВЕДЕНИЕ

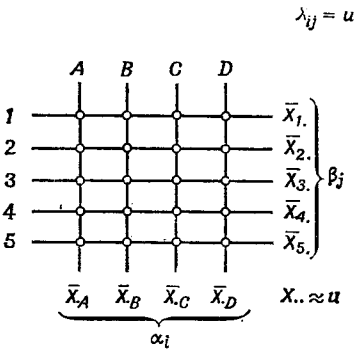
В предыдущей главе рассматривалась иерархическая классификация, в которой каждый подкласс вкладывался в исходный класс. Предположим, что можно подразделять совокупность, на основании двух классификационных признаков; тогда подклассы одной серии будут соответствовать подклассам другой. Это — стратифицированный выборочный метод, геологическая стратификация здесь имеет второстепенное значение. Принцип стратификации, или блокировки, однако, применяется очень широко. Однако, если геологическая стратификация в общем связана с порядком перенесения материала и часто представляет временную последовательность, под статистической стратификацией не обязательно надо подразумевать порядок расположения. Предположим, например, что несколько серий образцов разделены на классы по цвету и в то же время по типам пород, а случайной величиной является содержание карбоната или размер зерен. Классы по цвету и типы пород получаются не любым способом; другими словами, такая классификационная шкала может быть номинальной. С другой стороны, конечно, эта классификация может быть переведена в порядковую, интервальную шкалу или же шкалу отношений. В общем, если мы пользуемся порядковой или номинальной шкалой, или шкалой отношений, то планы экспериментов мыслятся как факторные (т. е. зависящие от многих причин.— *Ред.*), поскольку, если имеем дело с номинальной шкалой, они принимают вид просто классификаций по двум признакам без ограничений. Когда нет упорядоченности, вопросы касаются различий между средними по классам (главный эффект) по одному или по обоим основаниям классификации и независимости или связи между классификациями (вопрос о взаимодействии). Если классы уже определены или обладают более высокой шкалой, могут быть разрешены и дополнительные вопросы, касающиеся зависимости изменчивости от порядка классов в одной или в обеих классификациях. Здесь снова можно провести проверку на постоянство связи в одном измерении (эквивалентно одному основанию классификации) по отношению к другому измерению.

Структура простейшей классификации по двум признакам, соответственный способ отбора и таблица дисперсионного анализа даны на фиг. 19.1;

каждое наблюдение можно представить в виде

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ij}). \qquad (19.1)$$

Это означает, что каждое наблюдение содержит оценку истинного значения μ, к которому добавляются эффекты от первого главного фактора α_i плюс влияние второго главного фактора β_j плюс влияние всех других (неопределенных) факторов. Равенство (19.1) означает, что член, соответствующий ошибке, состоит из величины смешанного эффекта $\alpha\beta_{ij}$ плюс случайная величина ε_{ij}, являющаяся следствием всех неучтенных причин. В этом эмпирическом распорядке эффект α может рассматриваться отдельно от эффекта β только в том случае, если $\alpha\beta_{ij} = 0$; иными словами, эффект α, скажем в первом классе при сравнении со вторым, может оказаться разным для разных



$$\lambda_{ij} = u + \alpha_i + \beta_j + [\alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ij}]$$

Источник изменчивости	*Степени свободы*	*Ожидаемый средний квадрат*
Между α_i	$a-1$	$\sigma_e^2 + b\sigma_\alpha^2$
Между β_j	$b-1$	$\sigma_e^2 + a\sigma_\beta^2$
Ошибка $\alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ij}$	$(a-1)(b-1)$	σ_e^2
Сумма	$ab-1$	σ_{tot}^2

Фиг. 19.1. Экспериментальное решение и способ отбора; двухфакторная классификация.

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}\,(\delta_{k(ij)} + \varepsilon_{ij}).$$

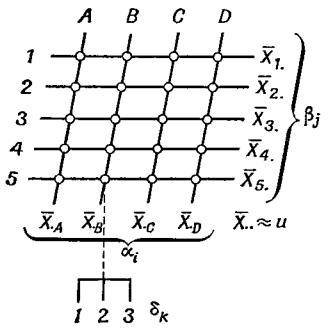
классов. Именно поэтому необходимо убедиться, что $\alpha\beta_{ij} = 0$, что является одним из модельных предположений. На практике всегда следует определить, выполнено ли такое требование, поэтому необходима отдельная оценка члена $\alpha\beta_{ij}$ вместе с соответствующим остаточным членом и проверка гипотезы $\alpha\beta_{ij} = 0$. Для этого нужно получить более чем одно наблюдение по каждой ячейке и эти повторные наблюдения разместить внутри каждой клетки двухфакторной классификации. Структура эксперимента приобретает облик, показанный на фиг. 19.2, и описывается формулой

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + (\delta_{k(ij)} + \varepsilon_{(i,\,j,k)}). \qquad (19.2)$$

Каждое наблюдение содержит оценку истинного среднего μ вместе с некоторой величиной α_i от первого главного эффекта плюс величина β_j от второго главного эффекта плюс величина $\alpha\beta_{ij}$ от взаимодействия α_i и β_j плюс изменения от всех неучтенных причин. Этот последний член содержит изменчивость, получаемую при повторных наблюдениях $\delta_{k(ij)}$, плюс изменчивость от всех других причин $\varepsilon_{(ijk)}$, а (ij) означает положение δ_k в клетке α_i и β_j. Структура эксперимента, порядок отбора и таблица дисперсионного анализа показаны на фиг. 19.2. Количества повторных определений взяты случайно. Выборочный план двухфакторной классификации, заимствованный из приемов полевой агрономии, называется *планом случайных блоков*. Действуя таким образом, агроном получает возможность сравнивать урожайность нескольких сортов зерна, помещая в блок некоторое число растений каждого сорта [79]. Различия между производительностью сортов представляют основной интерес, и блокировка или стратификация используется для устранения эффекта различных местных обстоятельств, например неоднородности почвы

или климатических различий. Различия между блоками не изучаются, главное значение плана заключается в том, что для каждого сорта зерна поведение внутри блока более однородно, чем между блоками. При таком распорядке устраняется внутриблочная изменчивость и, таким образом, если этот план осуществляется, уменьшается величина изменчивости от неучтенных причин и эксперимент становится более чувствительным, а меньшая ошибка позволяет исследователю выделять более тонкие различия в наборе средних значений.

С другой стороны, в большинстве случаев при геологических экспериментах также представляет интерес вторая классификация, соответствующая агрономическим блокам, ибо исследователь старается оценить изменчивость



Источник изменчивости	*Степени свободы*	*Ожидаемый средний квадрат*
Между α	$a-1$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + br\sigma_\alpha^2$
Между β	$b-1$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + ar\sigma_\beta^2$
α *и* β	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$
Ошибка $\delta+\varepsilon$	$ab(r-1)$	σ_e^2
Сумма	$abr-1$	σ_{tot}^2

Ф и г. 19.2. Экспериментальное решение и способ отбора; двухфакторная классификация с повторением.

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + (\delta_{k(ij)} + \varepsilon_{(ijk)}).$$

и из этого источника. Подобный эксперимент — пример классификации по двум признакам, и его не следует смешивать с планом случайных блоков.

19.2. ПРИМЕР ДВУХФАКТОРНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРИСТОСТИ ДВУМЯ МЕТОДАМИ

Цель эксперимента, описанного в разделе 18.2, состояла в сравнении двух процедур определения пористости нефтеносных песчаников. Исходные данные были расклассифицированы двумя способами на основании нескольких

Таблица 19.1

Пористость пяти образцов пород, определенная каждым из двух методов

Номер образца	Процент g		$\sum_1^2$	Средняя, %
	метод 1	метод 2		
1	17,1	16,92	34,02	17,01
2	20,1	20,68	40,78	20,39
3	19,3	18,05	37,35	18,675
4	10,2	10,39	20,59	10,29
5	25,9	26,00	51,90	25,95
$\sum_1^5$	92,60	92,04	184,64	
$\bar{X}_g$	18,52	18,408		$\bar{X}_G = 18,464$

определений, выполненных над различными случайно отобранными образцами пород каждым методом. Известно, что различные породы обладают весьма различной пористостью, поэтому полученные данные при планировании эксперимента следует использовать весьма осторожно. Потребовался широкий диапазон пористости, пять случайно отобранных образцов охватили этот диапазон, причем каждый образец был подразделен на две части; на этих частях были опробованы обе процедуры и полученные данные могли быть представлены двумя классификациями для сравнения различий между результатами обоих методов и различий между образцами. Данные фиксировались на основании этих двух классификаций (табл. 19.1) (сравните с табл. 18.1).

Анализ этих данных производится точно так же, как описано в разделе 18.3 для общей суммы квадратов и суммы квадратов, отражающей различия между методами; однако здесь мы можем подсчитать также сумму квадратов, которая характеризует различия между k образцами, обозначаемую через SS_k:

$$SS_k = \frac{\sum_1^k \left(\sum_1^g X\right)^2}{g} - CT,$$

$$\sum_1^5 \left(\sum_1^2 X\right)^2 = 7332{,}9994$$

$$\div 2 = 3666{,}4747$$

$$- CT = 3409{,}19296 = 257{,}28174 = SS_k.$$

Остаточным членом будет

$$\text{Ошибка } (SS_e) = SS_{tot} - (SS_g + SS_k) =$$

$$= 258{,}27044 - (0{,}03156 + 257{,}28174) = 0{,}95714.$$

Дисперсионный анализ иллюстрируется таблицей 19.2.

Таблица 19.2

Сравнение результатов двух методов определения пористости — двухфакторный дисперсионный анализ

Число групп	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий, F	F_{05}
$g = 2$	Между методами	$g - 1 = 1$	0,03156	0,03156	0,131	7,71
$k = 5$	Среди образцов	$k - 1 = 4$	257,28174	64,32043	268,808***	6,39
	Ошибка	$(g - 1)(k - 1) = 4$	0,95714	0,23928		
$gk = 10$	Сумма	$gk - 1 = 9$	258,27044			

При этом выдвигаются следующие нулевые гипотезы:

1. H_0: средние, полученные по образцам, представляют средние случайных выборок из одной однородной популяции; следовательно, $\sigma_k^2 = 0$.

2. H_0: средние, полученные одним из методов, являются средними случайных выборок из одной однородной популяции; следовательно, $\sigma_g^2 = 0$.

Для первой гипотезы отношение дисперсий $(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + g\hat{\sigma}_k^2)\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ имеет F-распределение со степенями свободы $\nu_1 = 4$ и $\nu_2 = 4$. По таблицам при уровне значимости $\alpha = 0.05$ имеем $F_{05,\,4,\,4} = 6{,}39$ [15]; F, полученное по наблюдениям, превышает это значение; следовательно, при вероятности 0,05 (даже при 0,001) нулевая гипотеза отвергается. Очевидно, образцы пород

различаются по средней пористости. С другой стороны, согласно второй гипотезе, отношение дисперсий $F=(\hat{\sigma}_\varepsilon^2+k\hat{\sigma}_g^2)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ имеет F-распределение с $\nu_1=1$ и $\nu_2=4$, табличное значение $F_{05,\,1,\,4}=7{,}71$ [15]. Вторая гипотеза не отвергается, и, по-видимому, эти два метода не дают значительных различий по средним показателям.

Этот пример иллюстрирует важность планирования экспериментов, когда с помощью соответственного способа отбора достигается значительное сокращение тех изменений, которые связаны с неопределенными (ошибочно определенными) причинами. Стратификация или блокировка (в данном случае рассматривание образцов попарно) дает возможность экспериментатору избавить процедуру определения дисперсии от остаточного члена и таким образом улучшить качество работы при тех же наблюдениях и затратах. Надо заметить, что изменение классификации сопровождается уменьшением числа степеней свободы для погрешности; и если стратификация не приводит к уменьшению изменений, равносильному такому уменьшению числа степеней свободы, то эксперимент становится менее эффективным. Так как для достижения этого сокращения при стратификации требуется меньше изменений в пределах слоев, чем между слоями, то соответственная процедура может быть использована для проверки на существование стратифицированности в пределах совокупности.

19.3. ПРИМЕР ДВУХФАКТОРНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ С ПОВТОРЕНИЯМИ — ИЗМЕНЧИВОСТЬ ОБЪЕМНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПЕСЧАНИКАХ ПОКОНО

Цель эксперимента — получить оценки изменчивости объемной плотности одного слоя песчаников, что существенно зависит от способа отбора. Пласт песчаника мощностью 10 футов обнажен в дорожной выемке и в 6 милях северо-западнее Порт-Матильды, Пенсильвания, по дороге № 322. Песчаник представлен оползшим пластом с крупными перитовыми конкрециями диаметром 2—3 дюйма. В остальном это однородный массивный слой.

Из этого пласта было взято 6 образцов, из которых четыре на равном расстоянии друг от друга по вертикальному пересечению поперек пласта и два — также на равном расстоянии, но по обе стороны от этого вертикального пересечения. Расстояние между образцами равнялось 2 футам. Плотность определялась на кусочках образцов весом от 8 до 10 *г* на ртутных весах (гл. 11), и каждый из пяти операторов обработал каждый из шести образцов по четыре раза, что дало в общей сложности 120 определений.

19.4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Образцы можно рассматривать как случайные выборки из бесконечной совокупности, так как данный эксперимент предназначен для оценки выборочной изменчивости как основания для последующих опытов, пять операторов рассматриваются тоже как случайная выборка из бесконечной совокупности операторов. Аналогично повторения изменений являются четырьмя из возможной бесконечной совокупности. Таким образом, мы имеем дело с моделью совокупности бесконечного объема, т. е. со второй моделью Беннетта и Франклина [27], или с моделью дисперсионных компонент Эйзенхарта [109], или же с моделью случайных эффектов Шеффе [385].

Планирование эксперимента заключается в классификации по двум признакам (образцы и операторы) с повторениями, которые предполагаются полученными случайно для каждого образца и оператора. Каждое наблюдение может быть записано как

$$X_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+(\delta_{k(ij)}+\varepsilon_{ijk}),$$

что выражает структуру эксперимента. Каждое наблюдение представлено постоянной (общее среднее μ), эффектом от образца α_i, от оператора β_j и от смешанного эффекта взаимодействия операторов и образцов γ_{ij} плюс окончательный (суммарный) эффект от повторений $\delta_{k(ij)}$ и от влияния неучтенных причин, в остальном выступающих в качестве ошибки $\varepsilon_{k(ij)}$ [1].

Предположениями, которые необходимо принять при дисперсионном анализе этих данных, являются:

1. Результаты наблюдений X_{ijk} рассматриваются как случайные величины.
2. Эти случайные величины содержат в качестве слагаемых α_i и β_j, математические ожидания которых предполагаются равными нулю.
3. Эти случайные величины распределены с дисперсиями σ_α^2, σ_β^2, σ_ε^2 и все ковариации равны нулю.

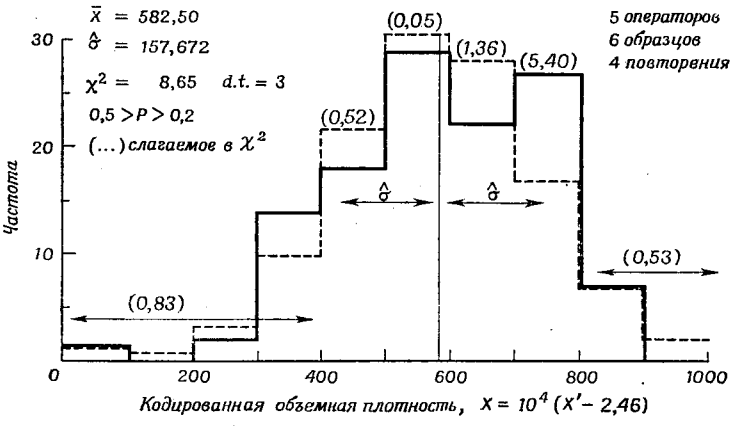
19.5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Для удобства из каждого из 120 наблюдений X_{ijk} вычиталась константа (= 2,46) и результат умножался на 10^4 (для ликвидации десятичных дробей). Преобразованные данные приведены в табл. 19.3 и представлены гистограммой на фиг. 19.3.

Распределения полученных значений описываются следующими общими статистиками:

$$\overline{X} = 2{,}518, \quad \hat{\sigma} = 0{,}016, \quad \sqrt{b_1} = -0{,}367^*, \quad b_2 = -3{,}686^{**}.$$

Распределение этих 120 наблюдений асимметрично (величина $\sqrt{b_1}$ значительна при уровне значимости 5%) и с эксцессом меньше нормального (b_2 незначимо при уровне значимости 1%).



Ф и г. 19.3. Распределение объемной плотности по шести образцам из граувакк Поконо.

При сравнении классов между собой и отклонений наблюдаемых частот от частот, ожидаемых из нормального распределения с таким же средним и дисперсией, как у выборочного распределения, получаем $\chi^2 = 8{,}65$. Нулевая гипотеза H_0 представляет утверждение: данные 120 наблюдений — это случайная выборка из нормальной совокупности со средним $\mu = 2{,}518$ и стандартным отклонением $\sigma = 0{,}016$. Статистика в данном случае χ^2 имеет число степеней свободы, равное числу сравниваемых классов за вычетом числа наложенных ограничений, т. е. $c - r = 6 - 3 = 3$, чему соответствуют

[1] Заметим, что повторные определения, относящиеся к операторам и образцам, относятся ко всем значениям (ij). Этот остаточный член включает изменения также и от разницы между повторными определениями плюс изменения от всех других неучтенных причин.

Таблица 19.3

Объемная плотность песчаников Поконо; данные кодированы в $D = 10^{-4}$ ($X_{ij} - 2{,}46$)

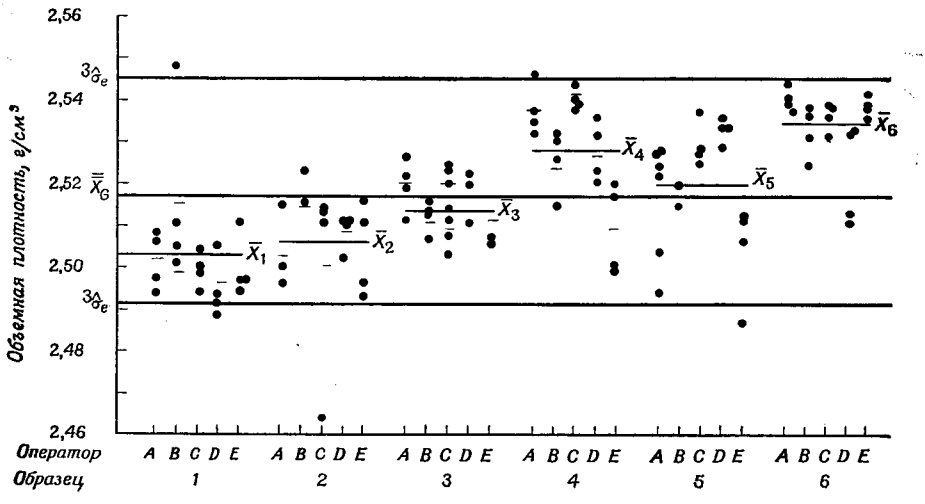
Оператор	Повторение	Образец						$\sum_{1}^{24} X_i$
		1	2	3	4	5	6	
A	1	379	567	619	861	669	843	
	2	468	377	557	752	670	797	
	3	485	402	647	780	648	776	
	4	343	375	599	728	626	793	
	Сумма	1 675	1 721	2 422	3 121	2 613	3 209	14 761
B	1	409	635	564	710	561	770	
	2	500	536	562	677	604	713	
	3	456	528	482	566	336	646	
	4	870	570	576	705	459	782	
	Сумма	2 235	2 269	2 184	2 658	1 960	2 911	14 217
C	1	338	27	438	794	660	719	
	2	397	549	529	807	677	791	
	3	405	554	498	849	681	763	
	4	441	510	568	809	755	790	
	Сумма	1 581	1 640	2 033	3 259	2 773	3 063	14 329
D	1	294	442	525	630	695	524	
	2	333	518	603	611	735	516	
	3	442	516	632	772	743	724	
	4	308	512	641	710	736	724	
	Сумма	1 377	1 988	2 401	2 723	2 909	2 488	13 886
E	1	364	350	477	406	515	810	
	2	361	577	473	603	512	787	
	3	502	526	603	402	466	769	
	4	338	317	621	586	268	784	
	Сумма	1 565	1 770	2 174	1 997	1 761	3 150	12 417
Общая сумма		8 433	9 388	11 214	13 758	12 016	14 821	69 630

критические значения $\chi^2_{05,3} = 7{,}815$; $\chi^2_{02,3} = 9{,}837$. Полученные значения приводят к следующему выводу: если мы имеем дело действительно со случайной выборкой из нормальной совокупности с установленными параметрами, то подобная выборка может встретиться от двух до пяти раз на каждые 100 случаев. Поэтому гипотеза отвергается, т. е. распределение совокупности ненормально и эти наблюдения неслучайны. Но так как маловероятно, чтобы 6 образцов из 20 определений по каждому из них оказались случайными выборками из бесконечной серии повторных определений при бесконечном числе образцов из данного песчаника, то при отклонении такой гипотезы фактически подвергается сомнению скорее случайность отбора, чем форма распределения генеральной совокупности.

В качестве дополнительной иллюстрации такого положения полученные данные нанесены на контрольную карту (фиг. 19.4). Ожидается, что три

наблюдения из 1000 окажутся за пределами границ стандартных отклонений (даже в случае нестрогой нормальности распределения); здесь же видим, что 5 значений из 120 лежат за пределами $\pm 3\hat{\sigma}$, что определенно свидетельствует о неслучайности отклонений от среднего по совокупности.

Отклонения от среднего по каждому образцу также велики и имеют одинаковый порядок значений. Разброс наблюдений вокруг средних по каждому образцу более или менее симметричен, как и следовало ожидать, и представляется вероятным, что для адекватной характеристики объемной плотности данного песчаника потребуется большее количество образцов. Представляется также вероятным, что повторные замеры показывают гораздо



Ф и г. 19.4. Карточка качественного контроля, показывающая изменения в определениях объемной плотности шести образцов песчаников Поконо.

больший разброс выборочных средних, чем мы ожидали встретить по работе опытных контролируемых операторов.

Иначе говоря, для последующих экспериментов потребуются лучше обученные операторы, а качество их работы следует проверять до проведения эксперимента. И второе — для надлежащей оценки средней объемной плотности из этого слоя потребуется большее количество образцов. Наблюдение, которое наиболее отличается от всех приведенных,— 2,4627 — вероятно, представляет собой наибольшую ошибку и, возможно, должно быть перенесено в раздел ошибочных значений.

На графике средних значений в зависимости от разных операторов и образцов не отразилось какой-либо закономерности по отношению к соответствующим стандартным отклонениям; следовательно, можно уверенно предполагать аддитивность этих средних.

19.6. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Далее следует подсчет сумм квадратов; сначала определяют поправочный член, затем общую сумму квадратов. То и другое берется из табл. 19.3. Суммы квадратов для обоих главных факторов и для их взаимодействия находят из итоговых значений в табл. 19.4. Дисперсионный анализ суммирован в табл. 19.6.

Таблица 19.4

Общие результаты по данным различных операторов и по различным образцам

Выборка	Оператор					Сумма
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	
1	1 675	2 235	1 581	1 377	1 565	8 433
2	1 721	2 269	1 640	1 988	1 770	9 388
3	2 422	2 184	2 033	2 401	2 174	11 214
4	3 121	2 658	3 259	2 723	1 997	13 758
5	2 613	1 960	2 773	2 909	1 761	12 016
6	3 209	2 911	3 063	2 488	3 150	14 821
Сумма	14 761	14 217	14 349	13 886	12 417	69 630

Таблица 19.5

Выборочные средние значения объемной плотности песчаников Поконо по данным различных операторов

Оператор	Выборка						
	1	2	3	4	5	6	$\bar{X}$
A	418,75	430,25	605,5	780,25	653,25	802,25	615,042
B	558,75	567,25	546,0	664,5	490,0	727,75	592,375
C	395,25	410,0	508,25	814,75	693,25	765,75	597,875
D	344,25	497,0	600,25	680,75	727,25	622,0	578,583
E	391,25	442,5	543,50	499,25	440,25	787,5	517,375
$\bar{X}$	421,65	469,40	560,70	687,90	600,80	741,05	$580,25=\bar{\bar{X}}_G$

Таблица 19.6

Дисперсионный анализ определений объемной плотности песчаников Поконо

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий, F	F_{05}	F_{01}	F_{001}
Шесть образцов	$m-1=5$	1 513 827,0	302 765,4	9,31***	2,71		6,46
Пять операторов	$p-1=4$	134 979,83	33 744,96	1,037	2,87	4,43	
Операторы × образцы	$(p-1)(m-1)=20$	650 549,67	32 527,48	3,94**	1,69	2,09	
Четыре ошибки	$pm(r-1)=90$	742 292,00	8 247,69				
Сумма 120	$pmr-1=119$	3 041 648,50					
		$\hat{\sigma}_e=90,817$	Декодированное	$\hat{\sigma}_e=0,0091$			
				$\bar{\bar{X}}_G=2,518025$			

Объемная плотность грауваки Поконо; расчет сумм квадратов

1. Поправочный член CT

$$\sum_{i=1}^{120} = 69,630; \quad \frac{\left(\sum_{i=1}^{120} X_i\right)^2}{120} = 40\,402\,807,50;$$

$$\bar{X} = 580,250.$$

2. Сумма квадратов (SS_{tot})

$$\sum_{i=1}^{120} X_i^2 = 43\,444\,456{,}00$$

$$CT = 40\,402\,807{,}50$$

$$SS_{tot} = 3\,041\,648{,}50.$$

3. Сумма квадратов SS_m по образцам пород

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{jk=1}^{20} X_i\right)^2 = 838\,332\,690{,}0$$

$$CT = 40\,402\,807{,}5$$

$$S_m = 1\,513\,827{,}0.$$

4. Сумма квадратов SS_p для операторов

$$\sum_{j=1}^{5}\left(\sum_{ik=1}^{24} X_i\right)^2 = 972\,906\,896{,}00$$

$$CT = 40\,402\,807{,}50$$

$$SS_p = 134\,979{,}83.$$

5. Сумма квадратов в зависимости от операторов и образцов SS_{mp}

$$\sum_{ij}^{30}\left(\sum_{k=1}^{4} X_i\right)^2 = 170\,808\,656{,}0$$

$$CT = 40\,402\,807{,}5$$

$$= 2\,299\,356{,}5$$

$$(SS_m + SS_p) = 1\,648\,806{,}83$$

$$SS_{mp} = 650\,549{,}67.$$

6. Ошибка в сумме квадратов SS_ε

$$SS_{tot} = 3\,041\,648{,}56$$

$$(SS_m + SS_p + SS_{mp}) = 2\,299\,356{,}56$$

$$SS_\varepsilon = 742\,292{,}00.$$

Вычисления при подобном эксперименте должны проводиться по схеме, показанной на табл. 19.7. Сначала проверяется гипотеза $\sigma^2_{mp} = 0$. Проверка выполняется с помощью отношения дисперсий

$$\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp}}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon} = F.$$

Из табл. 19.6 берем соответственные значения и получаем 32527,48/ /8247,69 = 3,94. Критические значения будут: для 5-процентного уровня $F_{05,20,90} = 1{,}69$, а для 1-процентного $F_{01,\,20,\,90} = 2{,}09$.

Таблица 19.7

Таблица модели двухфакторпого дисперсионного анализа с повторениями

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Ожидаемый средний квадрат
Операторы	$p-1=4$	$\sigma^2_\varepsilon + r\sigma^2_{mp} + mr\sigma^2_p$
Образцы	$m-1=5$	$\sigma^2_\varepsilon + r\sigma^2_{mp} + pr\sigma^2_m$
Операторы × образцы	$(m-1)(p-1)=20$	$\sigma^2_\varepsilon + r\sigma^2_{mp}$
Повторение (ошибка)	$mp(r-1)=90$	σ^2_ε
Сумма	$mpr-1=119$	

Следовательно, так как наблюдаемая величина F превышает ожидаемую, гипотеза отклоняется и $\sigma^2_{mp} \neq 0$; изменчивость значений плотности за счет различных операторов по разным образцам превышает изменчивость за счет ошибок.

На этой стадии анализ прерывается, так как значительная величина взаимодействия ясно показывает, что действия операторов не согласуются. Возможно, имеется и другое проявление недостаточности контроля: вследствие неполадок в самом эксперименте. В последующих экспериментах, поставленных более точно, такая причина несогласованности данных была устранена [159].

При значительном взаимодействии нельзя дать каких-либо общих рекомендаций; значительное взаимодействие делает фактически бесполезной суммирующую таблицу. Причины изменчивости на этом уровне не аддитивны, и, для того чтобы можно было сравнить действия операторов, каждый образец должен рассматриваться отдельно, а чтобы можно было сравнивать данные по образцам, надо одновременно рассматривать результаты работы только одного оператора. Если же различия в определениях плотности образцов у разных операторов не совпадают, нет смысла пытаться делать какие-либо выводы из полученных различающихся данных. С целью иллюстрации сказанного можно продолжить проверку, предположив, что эффект взаимодействия, обусловленный оператором и характером образца, является ошибкой, вносимой главными факторами. Вначале можем сравнить средний квадрат оператора и средний квадрат взаимодействия:

$$\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp} + rm\hat{\sigma}^2_p}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp}} = \frac{33\,744{,}96}{32\,527{,}48} = 1{,}037,$$

что не превышает $F_{05,\,4,\,20} = 2{,}87$, т. е. средние показания операторов меняются не более, чем средние взаимодействия, что звучит не очень утешительно при наличии сильного взаимодействия.

Предположим, что взаимодействие незначительно, т. е оно практически нулевое; тогда можно проверить изменения, вносимые оператором, используя отношение дисперсий

$$\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp} + rm\hat{\sigma}^2_p}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon} = \frac{33\,744{,}96}{8\,247{,}69} = 4{,}091,$$

так как полученный результат превышает критические значения $F_{01,\,4,\,80} = 3{,}56$, а $F_{01,\,4,\,100} = 3{,}51$; из этого следует, что различия данных оператора значительно больше, чем изменения от неопределенных причин или источника погрешности.

Наконец, сравнивая различия между средними и смешанный эффект, получим

$$\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp} + rp\hat{\sigma}^2_m}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp}} = \frac{302\,765{,}4}{32\,527{,}48} = 9{,}31.$$

ибо $F_{01,5,60} = 4{,}76$; следовательно, такое значение F существенно за пределами уровня 0,001. Гипотеза отсутствия различий между средними по образцам отклоняется, несмотря на значительное взаимодействие.

Здесь весьма интересно отметить, что, если не проводилось повторных измерений, эффект взаимодействия не мог быть оценен отдельно и этот средний квадрат не должен был бы использоваться в качестве остаточного члена. Однако наше решение о том, что повторные измерения были «однородны» (так как средние значения оператора показали изменчивость менее значительную, чем эта ошибка), не было бы оправдано. Аналогично в классификации по двум признакам отсутствие различий между средними по образцам еще не означает, что данная порода «однородна»; просто это свидетельствует

о незначительном различии между средними значениями по образцам [385]. Фактически, чтобы разрешить это спорное положение, во-первых, необходимо убедиться, что эффект взаимодействия равен нулю; следовательно, нужны повторные измерения в качестве остаточного члена для проверки взаимодействия; во-вторых, необходимо определить (*до эксперимента*!), какое значение различий между средними по образцам можно допустить при сохранении предположения об однородности породы (сравните с работой [59]).

В общем мы не можем проверить однородность в форме нулевой гипотезы; необходимо иметь первоначальное утверждение, согласно которому, если различия менее некоторой определенной величины, данная совокупность может рассматриваться как однородная (сравните с работой [256]).

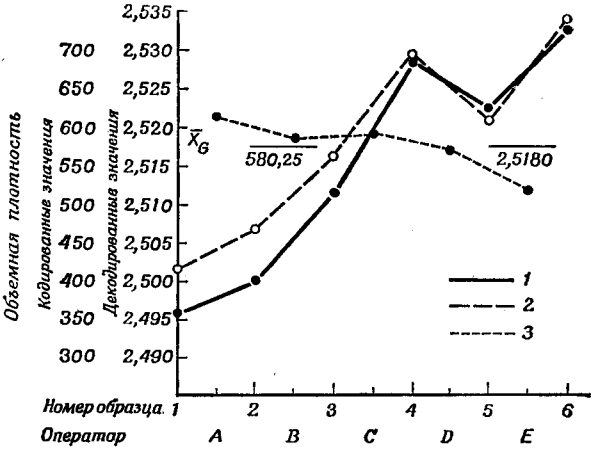
19.7. ГРАФИЧЕСКИЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ РАЗЛИЧИЙ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Этот эксперимент был направлен скорее на оценку изменчивости, чем на изучение различий между средними значениями; однако для иллюстрации интересно изучить как эти различия, так и то, что они могут дать.

Различия между средними для обоих главных результатов изображены на фиг. 19.5 (см. также табл. 19.5), где ясно видны наиболее распространенные средние по образцам, сравниваемые с исполнительскими средними.

На фиг. 19.6 и 19.7 приведены два графика, на абсциссах которых отложены или средние по образцам, или средние по операторам. Средние по образцам даны на фиг. 19.6, а средние по операторам — на фиг. 19.7.

По фиг. 19.6 можно судить об общей тенденции операторов давать возрастающую оценку объемной плотности по мере перехода от образца 1 к образцу 6 с незначительным нарушением этой закономерности при работе с образцом 5. Разумеется, порядок обработки образцов произволен, однако вполне допускается сравнение. Например, оператор *B* в противоположность всем другим исполнителям дает результаты, идущие вразрез с отмеченной тенденцией при обработке образцов 1—4. Оператор *D* дает противоположную закономерность для образцов 5 и 6. Таково графическое отображение взаимодействия. Перекрещивание ломаных на фиг. 19.7 иллюстрирует эту же черту поведения исполнителей по абсциссе.

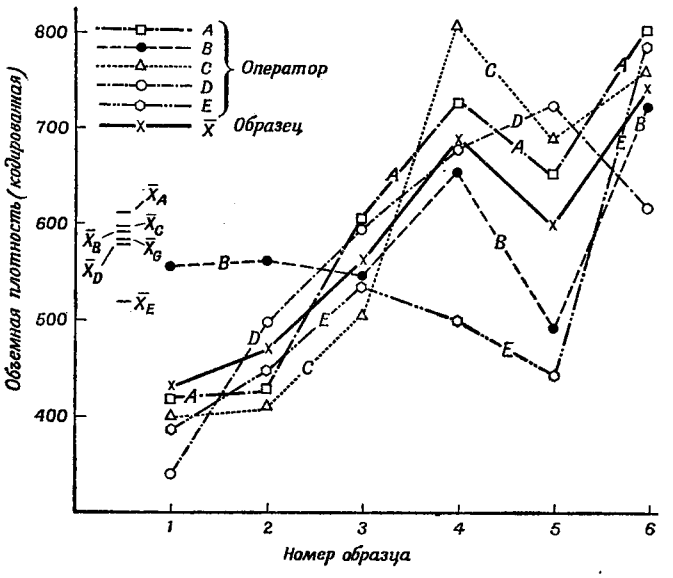


Ф и г. 19.5. Различия между средними по главным эффектам в зависимости от операторов и образцов: *1* — только одна серия повторений; *2* — четыре серии, *3* — операторы.

Расхождение или взаимодействие между главными результатами можно также представить путем сравнения средних каждой ячейки табл. 19.5; пример дается табл. 19.8.

Если бы эффект взаимодействия действительно равнялся нулю, не было бы расхождений, а различия между любой парой исполнителей по образцам были бы постоянны. Иначе говоря, если на одном и том же образце один из операторов получает более высокое значение плотности, чем другой, эта зависимость сохранилась бы по всем образцам. Исполнитель *A* находит,

что образец 3 обладает большей плотностью, чем образец 2 (+255,25), в то время как исполнитель B находит, что плотность образца 3 меньше, чем у образца 2 (—21,25). Чтобы появилось расхождение, знак тенденции



Фиг. 19.6. Расхождения между показаниями операторов в зависимости от образцов.

не должен меняться; если один из операторов обнаруживает небольшую положительную разницу между средними по двум образцам, как это было у операторов A, B и C в образцах 1 и 2 (табл. 19.8), в то время как другие

Таблица 19.8

Различия между выборочными средними в зависимости от операторов

	Оператор				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Среднее по образцу 2 минус среднее по образцу 1	+11,50	+8,50	+14,75	+52,76	+51,25
Среднее по образцу 3 минус среднее по образцу 2	+255,25	—21,15	+98,25	+103,25	+101,0

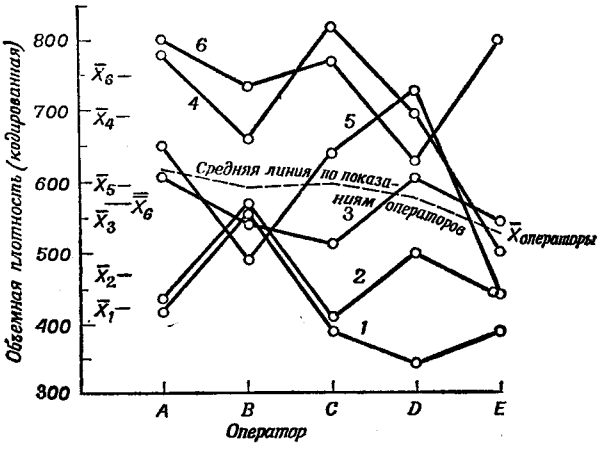
операторы находят большую положительную разницу, как операторы D и E на той же паре, это тоже будет способствовать расхождению.

Очевидно, что одним из наиболее желательных свойств эксперимента является отсутствие расхождений. Непостоянство результатов исполнителей при выполнении аналогичных заданий понижает чувствительность эксперимента, и требуются значительные усилия для обеспечения требований модели ($\gamma_{ij} = 0$). Нередко необходимо также продемонстрировать с помощью статистической проверки, что эти требования выполнены. После некоторого периода, когда проверка покажет, что условия эксперимента ($\gamma_{ij} = 0$)

в достаточной мере выполняются, это позволит обходиться без текущей проверки. Иначе говоря, классификация по двум признакам с повторениями необходима, по крайней мере вначале, а классификация по двум признакам без повторений и без выполнения требования $\gamma_{ij} = 0$, вероятно, приведет к заблуждениям.

19.8. ОЦЕНКИ КОМПОНЕНТ ДИСПЕРСИИ

Основное назначение данного эксперимента — оценка значений изменчивости, вносимой соответствующими причинами, и рекомендации к дальнейшим экспериментам. Следует снова заметить, что совокупности, для которых изучаются α_i, β_j и $\delta_{k(ij)}$, бесконечны по объему, поэтому в основе подобного анализа лежит модель бесконечной совокупности. При такой модели компоненты дисперсии, соответствующие каждому источнику изменчивости, можно оценить по вычисленным средним квадратам. Говоря точнее, наблюдаемые средние квадраты являются несмещенными оценками ожидаемых средних квадратов [385]. Эти вычисления производятся непосредственным способом; так, по табл. 19.6 средний квадрат ошибки $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ равен 8,247, в условиях H_0 величина $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ будет несмещенной оценкой изменчивости от неучтенных причин, т. е. для σ^2_ε. Аналогично $\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp}$ — оценка ожидаемого среднего квадрата взаимодействия среднего квадрата (табл. 19.7), которая приведена в табл. 19.6 как 32 527,48. Тогда, разделив на r выражение $\hat{\sigma}^2_\varepsilon + r\hat{\sigma}^2_{mp} - \hat{\sigma}^2_\varepsilon = r\hat{\sigma}^2_{mp}$, получаем оценку для $\hat{\sigma}^2_{mp}$:



Ф и г. 19.7. Расхождения между данными по образцам в зависимости от операторов.

$$\sigma^2_{mp} = \frac{32\,527{,}48 - 8\,247{,}69}{4} = \frac{24\,279{,}79}{4} = 6069{,}95.$$

Точно так же оценки ожидаемых средних квадратов для двух главных эффектов будут

$$\hat{\sigma}^2_p = \frac{MS_p - MS_{mp}}{mr}$$

$$= \frac{33\,744{,}96 - 32\,527{,}48}{24} = 50{,}728$$

и

$$\hat{\sigma}^2_m = \frac{MS_m - MS_{mp}}{pr}$$

$$= \frac{302\,765{,}4 - 32\,527{,}48}{20} = 13\,511{,}896.$$

Различия между средними по образцам явно больше, чем любые другие изменения; изменчивость за счет ошибок стоит на втором месте по величине, эффект от взаимодействия тоже может считаться большим. Различия между данными исполнителей относительно малы.

По-видимому, для выработки подходящей рекомендации оптимального распределения объектов в выборке требуется эксперимент, в котором взаимодействие контролировалось бы значительно лучше. При подходящем контролируемом эксперименте различия операторов должны быть независимы от различий по образцам; и если взаимодействия нет, то во всем исследовании ошибка (изменения от неучтенных причин) легко может быть уменьшена повторными измерениями.

Таблица 19.9

Точечные оценки [385] ожидаемых средних квадратов и стандартных отклонений

Источник изменчивости	Оценка средних квадратов	Стандартное отклонение	
		кодированное	декодированное
Операторы	$\hat{\sigma}_p^2 = 50{,}728$	$\hat{\sigma}_p = 7{,}12$	0,0007
Образцы	$\hat{\sigma}_m^2 = 13\,511{,}896$	$\hat{\sigma}_m = 116{,}24$	0,0116
Взаимодействие	$\hat{\sigma}_{mp}^2 = 6\,069{,}95$	$\hat{\sigma}_{mp} = 77{,}91$	0,0078
Ошибка	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 8\,247{,}69$	$\hat{\sigma}_\varepsilon = 90{,}82$	0,0091

Можно было заметить, что дисперсия генерального среднего выражается как

$$\mathrm{Var}\,(\bar{X}_G) = \frac{\sigma_p^2}{p} + \frac{\sigma_m^2}{m} + \frac{\sigma_{mp}^2}{mp} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{mpr}$$

и что увеличение количества повторных замеров уменьшает только последний член, в то время как число образцов содержится в знаменателе трех составляющих дисперсии.

Именно поэтому совершенно необходимо стремиться к исследованию большего количества образцов и в то же время — к уменьшению дисперсии путем соответственной подготовки операторов. Различия между показаниями различных исполнителей не должны беспокоить нас, если можно добиться постоянства этих различий, т. е. если $\gamma_{ij} = 0$.

19.9. ПРОЧИЕ АСПЕКТЫ ДВУХФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Несмотря на то что цель настоящего эксперимента — определение объемной плотности песчаников формации Поконо — узко ограничена, этот эксперимент имеет значение для других исследований, аналогичных по структуре. Например, используя разобранный план, экспериментатор может вначале предпринять пробное исследование, если есть намерение повторить эксперимент на этих же образцах и с этими же исполнителями, а затем уже проанализировать всю совокупность. Разумеется, его обычно интересуют не дисперсии, а среднее по всей совокупности. Так, если в выборке представлены все элементы совокупности, сумма отклонений равна нулю. Если проанализирована вся совокупность, проверка гипотез не требуется, так как в этом случае результат выражается уже точными значениями параметров, а не их статистическими характеристиками.

С одной стороны, эти шесть образцов могут представлять всю совокупность, но группа операторов представляет случайную выборку из бесконечной совокупности, с другой — одни и те же операторы используются неоднократно, а образцы представляют случайную выборку из совокупности бесконечного объема. Такая альтернативная постановка известна под названием *смешанной модели* [27].

При практической работе может встретиться любая комбинация таких ситуаций. Каждая из них, как и следует ожидать, накладывает свой отпечаток на структуру эксперимента вследствие того, что прогноз, сделанный на основании данного анализа, должен быть применим к различным физическим состояниям и различным совокупностям.

Обобщив экспериментальные возможности и структуру исследования, мы можем лучше представить природу аргументации различных способов его проведения; структура этих альтернативных моделей дается в табл. 19.10.

Таблица 19.10

Дисперсионный анализ случайной, фиксированной и смешанной моделей

$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + [\delta_{k(ij)} + \varepsilon_{ijk}]$

Каждое наблюдение = среднее + вклад оператора + различия по образцам + + взаимодействие + вклад повторений + прочее

Количество пунктов	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средние квадраты	Отношение дисперсий, F	Ожидаемый средний квадрат		
						случайная модель [1]	фиксированная модель [2]	смешанная модель [3]
5	Операторы	$p-1=4$	134 979,83	33 744,96	1,037	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2 + mr\sigma_p^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + 0 + mr\theta_p$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2 + mr\theta_p$
6	Образцы	$m-1=5$	1 513 827,0	302 765,4	9,31***	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2 + pr\sigma_m^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + 0 + pr\theta_m$	$\sigma_\varepsilon^2 + 0 + pr\theta_m^2$
	Операторы × образцы	$(p-1)(m-1)=20$	650 549,67	32 527,48	3,94**	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2$
4	Ошибка (повторения)	$mp(r-1)=90$	742 292,0	8 247,69		σ_ε^2	σ_ε^2	σ_ε^2
120	Сумма	$mpr-1=119$	3 041 648,5			σ_{tot}^2	σ_{tot}^2	σ_{tot}^2

[1] Выборки всегда случайны и относятся к совокупности бесконечного объема.
[2] Фиксированная на уровне главных эффектов; случайные отклонения только на уровне повторных измерений.
[3] Фиксирован эффект оператора; эффект от образцов и повторений случаен.

Во всех случаях предполагается, что повторные измерения проводятся на случайных выборках из совокупности бесконечного объема. Регулирование на этом уровне может осуществляться введением коэффициента $1 - r/R$ для r, стремлением не допустить, чтобы значение аргумента оказалось менее $1 - m/M$ и т. д. Повторные замеры надо всегда проверять на взаимодействие, которое в большинстве случаев ожидается незначительным, т. е. ожидается, что $\gamma_{ij} = 0$. Значительное взаимодействие серьезно для конечной и смешанной моделей; менее чувствительна к этому, хотя несколько и ограниченная в возможности ее использования, бесконечная модель.

Теперь предположим, что перед нами все операторы и образцы, какие имеются, и что требуется получить выводы по расхождениям среди средних значений, возникшим вследствие главных эффектов. В таком случае мы можем изучить поправочный коэффициент конечной совокупности [27] и видеть, что происходит с ожидаемыми средними квадратами. Так, если $m = M$, этот коэффициент $1 - m/M = 1 - 1 = 0$ и член взаимодействия в конечной модели выпадает из ожидаемых средних квадратов. Полагая, что эксперимент выполнен надлежащим образом и что $\gamma_{ij} = 0$, надо ожидать, что

критерий отношения дисперсий, проверяющий взаимодействие, окажется незначительным, т. е.

$$(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + r\hat{\sigma}_{mp}^2)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2 < F_{05,\,(p-1)(m-1),\,pm(r-1)}.$$

Следовательно, подходящим остаточным членом для проверки главных эффектов является $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$; иногда ожидаемые значения средних квадратов для главных эффектов записываются соответственно как $\sigma_\varepsilon^2 + rm\theta_p$ и $\sigma_\varepsilon^2 + rp\theta_m$, чтобы подчеркнуть, что они не являются оценками изменчивости, как это мы имеем в бесконечной модели.

Теперь рассмотрим модель бесконечной совокупности, модель 2. Так как m теперь ничтожно мало по сравнению с M (и p по сравнению с P соответственно), коэффициент поправки конечной совокупности будет равным

$$1 - \frac{m}{M} = 1 - 0 = 1$$

и аналогично $1 - p/P$; в таких условиях взаимодействие по-прежнему содействует дисперсии в ожидаемом среднем квадрате каждого главного эффекта. Как ошибка $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, так и взаимодействие могут быть использованы для проверки главных эффектов, если будет доказано, что взаимодействие незначительно. Иногда эти два оценочных фактора объединяют в качестве оценки одного и того же источника изменчивости, если σ_{mp}^2 практически близко нулю (т. е. незначительно или не более чем σ_ε^2), а также для получения «более лучшей» оценки погрешности. Но так как оценка дисперсии взаимодействия относится к выборочной ошибке, а «стабильная» оценка $\hat{\sigma}_{mp}^2$ всегда имеется, ее значение вследствие малого числа степеней свободы может пригодиться, но может и не пригодиться.

С другой стороны, если взаимодействие значительно больше ошибки [$(\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{mp}^2)/\sigma_\varepsilon^2$ значительно], оно становится основой для проверки главных эффектов. Следует указать на два момента. Если $\gamma_{ij} \neq 0$, рекомендации будут не столь точными, как для случая, когда $\gamma_{ij} = 0$. Как отмечал Шеффе [385] и иллюстрировалось примерами в ранее описанных экспериментах, если главный эффект значительно больше взаимодействия, нет необходимости принимать во внимание, что каждое определение объемной плотности каждым оператором всегда оказывается большим или меньшим относительно определения объемной плотности по другому образцу.

Кроме того, когда в разбивке по двум признакам без повторных замеров нет оценки взаимодействия, тогда подразумевается, что $\gamma_{ij} = 0$ [1]; если такое предположение не выполняется, оценка главных эффектов приводит к ошибочным заключениям.

Теперь предположим, что эти же операторы работают снова, но они уже обрабатывают новые образцы, отобранные случайным способом из совокупности бесконечного объема. Тогда $1 - p/P = 0$, а $1 - m/M = 1$; при таких обстоятельствах взаимодействие не играет роли главного эффекта в различиях между средними по образцам, но оно может оказать существенное влияние на различия между средними по исполнителям. Подходящий остаточный член для проверки средних квадратов по образцам — это $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, поскольку подходящей «ошибкой» для проверки расхождений в определениях операторов является взаимодействие. Значительное взаимодействие вновь ставит в тупик экспериментатора и затрудняет вывод общего заключения.

Подобные планы могут быть изменены, если число операторов рассматривать как взятое из конечной совокупности операторов, когда p/P суще-

[1] Если взаимодействие имеется, оно увеличивает оценку ошибки.

ственно больше нуля, но не равно единице. Тогда коэффициент, увеличивающий оценку дисперсии за счет взаимодействия, дробен; и если только эффект от взаимодействия не равен нулю, проверку главных эффектов не стоит и начинать [27].

19.10. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ, ВХОДЯЩИЕ В РАЗЛИЧНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПРИ ДВУХФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

Из вышесказанного должно быть ясно, что различные формы дисперсионного анализа опираются на различные предположения, несмотря на то что вычислительная процедура и таблица общей формы дисперсионного анализа идентичны. Поэтому желательно четко сформулировать те из предположений, которые включаются в каждый конкретный эксперимент в качестве составной части его структуры. Эти предложения подробно рассматривали Эйзенхарт [109], Беннетт и Франклин [27] и Шеффе [385]. Случаи несостоятельности этих предположений описаны также Кокраном [75] и в вышеприведенных руководствах.

Данная модель в общем виде записывается как

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}.$$

Прежде всего рассмотрим двухфакторное расположение наблюдений (одно наблюдение на клетку) строками и столбцами [109]. Если «дисперсионный анализ» выполнен и его результаты суммированы в таблице анализа, которая и представляет собой обобщение этих данных, взаимоотношения между суммами квадратов и т. п. являются алгебраическими свойствами такого упорядочения, то никаких предположений не требуется. Когда же данные рассматриваются в качестве выборки из некоторой совокупности и требуется доказать, что заключения, основанные на данных анализа, должны быть распространены на всю совокупность, из которой сделана выборка, это уже статистическое заключение, и, чтобы оно приобрело ценность аргумента, должны выполняться некоторые вводимые предположения. На этой стадии необходимо точно определить, какого рода заключения мы собираемся выводить и, следовательно, определить род модели, представляющей эксперимент. Вначале допустим, что экспериментальная ситуация представлена фиксированной моделью [1]. Первое предположение заключается в том, что наблюдения представлены значениями случайных величин, имеющих фиксированные истинные средние значения.

Из этого предположения следует, что наблюдения X_{ij}, будучи упорядоченными по двум признакам, распределены с истинными средними значениями m_{ij} и что $E(X_{ij}) = m_{ij}$, или $\sum (X_{ij} - m_{ij}) = 0$.

Второе предположение касается дополнительных эффектов действия факторов в эксперименте. Следовательно, если гипотетические истинные средние m_{ij} для каждой клетки могут быть записаны как

$$m_{ij} = \mu + (\alpha_i + \alpha_.) + (\beta_j - \beta_.),$$

где μ — фиксированная постоянная, истинное среднее α будет истинным средним i-го ряда (среднее i-го воздействия), а β — истинное среднее j-го столбца или j-го воздействия по столбцам, то наблюдения позволят оценить различия между средними любого определенного действия данных условий. Исходя из разбивки по двум признакам — по операторам и образцам,— различия между средними по образцам, скажем α_1 и α_2, оцениваются различием между средними первого и второго рядов разбивки. Эти полученные различия являются несмещенной оценкой истинного различия в значениях объемной плотности, которое существует между образцами 1 и 2.

[1] Такая модель у Эйзенхарта [109] называется моделью первого типа.

Снова в этом случае изменчивость между средними по образцам не влияет на различия средних по операторам, т. е. взаимодействие равно нулю ($\gamma_{ij} = 0$).

Когда аддитивность не выполняется, различие между α_1 и α_2 приложимо только к определенному оператору.

Согласно третьему предположению, случайные величины X_{ij} имеют общую дисперсию σ^2 и все ковариации равны нулю; это предположение обеспечивает аддитивность дисперсий и действенность использования дисперсий ошибки, усредненных по всему эксперименту.

Для полного завершения анализа и использования критерия для проверки гипотезы требуется еще одно, четвертое допущение: все X_{ij} распределены нормально. Ослабление любого из этих допущений приводит к неточным заключениям, которые основаны на сравнении средних и сопровождающих их критериев. Чтобы понять, что именно относится к таким ослабленным требованиям, каждый такой случай необходимо внимательно рассмотреть в отдельности.

19.11. РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ СРЕДНИМИ

Довольно часто экспериментатор хочет продвинуться дальше демонстрирования различий между средними по той или иной классификации. Тогда надо сравнить эти средние и расположить их в некотором порядке; существует множество различных альтернатив и, в частности, процедур, когда сравнение превращается в эксперимент (сравните с разделом 18.8). Возможно разделить наиболее различающиеся средние попарно с числом степеней свободы 1 для каждого сравнения [44], что может представлять определенный интерес. Требование ортогональности может быть выполнено по нескольким сравнениям.

В общем для сравнений или сопоставлений средних значений, заданных до эксперимента, ошибка определяется разностью между двумя средними и характеризуется величиной $2\sigma_i^2$, где σ_i^2 — соответствующая дисперсия ошибок.

С другой стороны, когда сравнения выполняют после изучения результатов эксперимента, целесообразно применить доверительные интервалы Шеффе или Тюки, которые зависят от числа величин при подсчете каждого среднего и соответственно равны или не равны [385]. Необходимо в каждом случае проводить различия между конечной (модель 1), бесконечной (модель 2) и смешанной моделями, в связи с чем критерий для проверки гипотезы становится весьма сложным [1] [44]. Методы упорядочения средних описаны также Беннеттом и Франклином [27], Бечофером [23], Бечофером, Даннеттом и Собелом [24].

19.12. ПРИМЕРЫ ДВУХФАКТОРНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

Множество примеров применения дисперсионного анализа с классификацией по двум признакам для решения геологических вопросов дано Миллером и Каном [299], Крамбейном и Миллером [257], а также Гриффитсом и Розенфельдом [161]. Гриффитс и Розенфельд [156] детально разобрали классификацию по двум признакам с повторениями в приложении к измерениям формы кварцевых зерен в осадках.

Очевидно, этот способ является эффективным инструментом в широком диапазоне экспериментальных ситуаций, которые возникают при исследовании геологических проблем. Следовательно, необходимо подчеркнуть, что преимущества и недостатки этого приема выявляются в процессе его конкретных приложений.

---

[1] Заметим, что арифметические действия здесь довольно просты; сложно лишь обоснование соответствующих выводов.

Во-первых, надо предварительно определить, что в данной ситуации более эффективно — стратификация или блокирование популяции. Необходимо отметить, что связанные со стратификацией степени свободы, которые теряются из-за «ошибки», все же представляют существенную часть дисперсии. Если стратификация проведена и слоев нет, это основание классификации уменьшает число степеней свободы для «ошибки», но вместе с этим уменьшает и чувствительность эксперимента.

Во-вторых, очень важно решить, какая из моделей рассматривается (фиксированная, случайная или смешанная); только так по экспериментальным результатам могут быть сделаны правильные выводы.

В-третьих, эксперимент следует контролировать в такой степени, чтобы член взаимодействия действительно равнялся нулю; при наличии каких-либо сомнений для проверки такого предположения рекомендуется применить повторные замеры. Довольно часто доказанное наличие взаимодействия дает возможность перепланировать будущие эксперименты с целью свести к нулю или по крайней мере уменьшить его эффект.

Наконец, использование неодинаковых количеств повторных замеров в данных классах можно легко приспособить к плану эксперимента. Это, однако, не надо понимать как оправдание использования разных количеств повторений, ибо последние усложняют как оценки дисперсии, так и сравнение средних, что при значительной дисперсии взаимодействия может испортить весь анализ.

ГЛАВА 20

Прочие экспериментальные решения

Если в результате взаимодействия многочисленных факторов возникла путаница и затруднения, то еще до освоения данных фактов может потребоваться продолжение изучения этих результатов и дальнейшее экспериментирование. Трудности вызываются не тем, что неудачен эксперимент, а тем, что сложны сами явления.

W. G. Cochran, G. M. Cox, Experimental Designs, John Wiley and Sons, Inc., 2nd ed., p. 153, 1957

20.1. ВВЕДЕНИЕ

По мере того как экспериментатор все более знакомится с возможностями экспериментального решения, обнаруживается, что существует весьма широкий круг задач, в которых дисперсионный анализ играет основную роль. Затем следует рассмотрение классификации по трем признакам, по четырем и далее, до классификаций более высокого уровня. Однако по мере возрастания сложности классификации количество наблюдений возрастает гораздо быстрее, так что экспериментатор, хорошо понимающий, к чему это может привести, бывает вынужден игнорировать некоторые причины изменчивости и использовать сбалансированный неполный блок и несбалансированный блок с целью уменьшить количество требуемых наблюдений. Примеры сбалансированного неполного блока и несбалансированного блока будут приведены ниже.

Уже упоминалось, что если классификация основана на порядковой шкале или шкале более высокого уровня, можно применить факторный анализ; однако в геологической литературе пока есть лишь незначительное количество таких решений. Аналогично, если это потребуется, можно объединить дисперсионный анализ с регрессионным, а также применить ковариационный анализ (примеры см. у Миллера и Кана [299]). На этой стадии рекомендуем пользоваться справочниками по экспериментальным решениям, в которых можно выбрать подходящий способ отбора, соответствующий требованиям плана; прекрасные руководства по этому вопросу даны Кокраном и Коксом [79], Беннеттом и Франклином [27], Браунли [44] и Кемпторном [232]. Факторные эксперименты хорошо представлены в промышленной сфере [91], но все это никоим образом не исчерпывает литературу по экспериментальным решениям. При выборе решения следует также ясно понимать, что в некоторых более сложных случаях ощутимой проблемой становятся арифметические вычисления; тогда выгодно применять электронно-вычислительные машины. Кроме того, необходимо помнить, что следует сначала найти исходные данные, а уже потом начинать их собирать. В общем, чем проще план обработки, тем легче извлечь всю информацию, которая заключена в исходных данных, и если экспериментатор знает, что он делает, он всегда сможет свести свою проблему к простому решению.

20.2. ТРЕХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Геолог интуитивно прибегает к классификации по трем признакам, так как ему известны три основания для классификации — одно стратиграфическое и два географических измерения, составляющие типовую решетку геологического пространства. Готовясь использовать классификацию по трем признакам, исследователь должен точно определить интересующую его генеральную совокупность и свою цель: или сравнение средних (фиксированная модель — модель 1), или сравнение дисперсий (случайная модель — модель 2), или же то и другое (смешанная модель — модель 3). Этих двух характеристик достаточно для выбора надлежащего плана наблюдений. Если за данный массив пород берутся впервые, желательно включить в план повторные измерения в качестве средства проверки взаимодействия второго порядка; если же этот объект уже исследовался и известно, что взаимодействия отсутствуют или они незначительны, можно применить более эффективное решение, такое, например, как латинский квадрат (см. раздел 20.4).

Предположим, что вопрос касается опробования каменной осыпи и что случайной величиной являются длинные оси (a) кварцитовых валунов из из этой осыпи. Чтобы сократить число измерений, приходящихся на оператора, и свести дело к простой задаче, надо много операторов. Основная цель — изучить изменчивость длинных осей кварцитовых галек; следовательно, подходящей моделью представляется бесконечная совокупность. С другой стороны, чтобы установить, имеется ли тенденция изменения размеров, требуется изучить также различия между средними значениями осей и ряды средних значений, пересекающие осыпь. Способ отбора заключается в подразделении осыпи на небольшие площади и в отборе образцов с этих площадей. Чтобы можно было применить модель бесконечной совокупности (так как протяженность осыпи не бесконечна), требуется использовать *выборку с с возвращением*, при которой осыпь подразделяется на ряды и колонки. Расстояния между рядами и колонками должны быть случайными, но в каком из этих отрезков должна уложиться длина наибольшего валуна целое число раз, надо установить в начале исследования. Отбор проб с возвращением позволяет переопробование некоторых рядов и (или) колонок, если площадь отбора в достаточной мере соизмерима с площадью осыпи.

Каждый из p операторов измеряет q валунов в каждом пересечении сети, составленной из рядов и колонок; учитывая предыдущий опыт, по каждой стороне надо замерить по крайней мере 8 валунов, так что $pq \geqslant 8$. Практически оператор в круге радиуса 6 футов проводит наудачу диаметр и замеряет валуны на его концах. Такие диаметры должны быть так расположены симметрично с углом $\theta°$ между смежной парой, чтобы было обеспечено $pq \geqslant 8$.

Такой способ отбора приводит к классификации по трем признакам, ибо главных эффектов три: операторы, ряды, колонки. Здесь мы имеем три смешанных эффекта *первого порядка*, а именно: операторы × ряды, операторы × колонки, ряды × колонки; затем один смешанный эффект *второго порядка*: операторы × ряды × колонки. Так как каждый оператор замерит q валунов в каждом пересечении ряд × колонка, то в каждом классе оператор × ряд × колонка будет q повторных замеров. Такой способ значительно сложнее классификации по двум признакам; классификация же по четырем признакам или более высокого порядка еще сложнее, например, при четырехфакторном анализе: четыре главных эффекта, шесть смешанных эффектов первого порядка, четыре смешанных эффекта второго порядка и один — третьего; такой способ может понадобиться при анализе причин изменчивости свойств размеров длинных осей кварцевых зерен по шлифам (гл. 3). Пять основных свойств (гл. 3) потребуют уже пятифакторной классификации с разбивкой, которая иллюстрируется табл. 20.1.

Таблица 20.1

Источники изменчивости при пятифакторном анализе

Главные эффекты	5
Смешанный эффект первого порядка	10
Смешанный эффект второго порядка	10
Смешанный эффект третьего порядка	5
Смешанный эффект четвертого порядка	1
Сумма	31

Здесь потребуется 32 наблюдения всего лишь по одному наблюдению на клетку; и если сделано q повторений, то для полностью сбалансированного способа потребуется $32q$ наблюдения. Такое предвидение последствий применения той или иной процедуры — одно из преимуществ научного метода приближений.

Вернемся к трефакторной классификации. Общее количество наблюдений $N = prcq$, и структура эксперимента может быть записана в следующем виде:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + (\delta_{l(ijk)} + \varepsilon_{ijkl});$$
$$i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, r; \quad k = 1, \ldots, c$$
$$q = 1, \ldots, q, \tag{20.1}$$

где α — влияние оператора, β — влияние рядов, γ — влияние колонок, δ — вклад, вносимый повторениями, который смешивается с другими источниками изменчивости ε_{ijkl}. В табл. 20.2 приведена обобщенная схема соот-

Таблица 20.2

Обобщающая таблица трехфакторного дисперсионного анализа (бесконечная совокупность — модель случайных эффектов)

Количество пунктов	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Ожидаемый средний квадрат
p	Операторы	$p-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2 + rq\sigma_{pc}^2 + cq\sigma_{pr}^2 + rcq\sigma_p^2$
r	Ряды	$r-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2 + pq\sigma_{rc}^2 + cq\sigma_{pr}^2 + pcq\sigma_r^2$
c	Колонки	$c-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2 + pq\sigma_{rc}^2 + rq\sigma_{pc}^2 + prq\sigma_c^2$
	Операторы × ряды	$(p-1)(r-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2 + cq\sigma_{pr}^2$
	Операторы × колонки	$(p-1)(c-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2 + rq\sigma_{pc}^2$
	Ряды × колонки	$(r-1)(c-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2 + pq\sigma_{rc}^2$
	Операторы × ряды × колонки	$(p-1)(r-1)(c-1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + q\sigma_{prc}^2$
q	Повторения (ошибка)	$prc\,(q-1)$	σ_ε^2
N	Сумма	$prcq-1$	σ_{tot}^2

ветствующего дисперсионного анализа. Изучение оценок ожидаемых средних квадратов покажет ошибки для проверки значимости вкладов в дисперсию на различных уровнях, т. е. если все взаимодействия равны нулю, главные эффекты могут быть проверены по ошибкам. Все прочие исходы приводят к тем или иным усложнениям. Предположим, что взаимодействие второ-

го порядка практически нулевое. Тогда каждое взаимодействие первого порядка может быть проверено по ошибке. Если то или другое значительно, то для одного из главных эффектов оно становится остаточным членом. Если два взаимодействия первого порядка значительно более ошибки, то простого критерия, по крайней мере для двух главных эффектов, не существует. Поэтому, если известно, что влияние взаимодействий не равно нулю, при изучении этих взаимодействий следует соблюдать осторожность; когда природа и порядок значений изменчивости не известны заранее из проведенных экспериментов, такой план изучения будет явно трудным для обработки. Добавим, что все это относится к модели бесконечной совокупности; конечная и смешанная модели, видимо, еще более сложны [27]. Сейчас в большинстве случаев при применении такого экспериментального решения в геологической работе исследователь должен быть готов к повторению эксперимента, изменению процедуры измерений и регулированию способа отбора еще до того, как могут быть сделаны заключения.

В табл. 20.3 дается пример анализа длины (длинной оси a) валунов в осыпи кварцитов Тускарора. Использованы 7 операторов, 4 ряда, 5 колонок;

Таблица 20.3

Трехфакторный дисперсионный анализ длинных осей (a) кварцитовых валунов из осыпи формации Тускарора (Ламар, Пенсильвания)

Плюс — присутствует; минус — отсутствует

Количество пунктов	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий, F	Ожидаемый средний квадрат							
						σ_e^2	$q\sigma_{prc}^2$	$p q \sigma_{rc}^2$	$r q \sigma_{pc}^2$	$c q \sigma_{pr}^2$	$p r q \sigma_c^2$	$p c q \sigma_r^2$	$r c q \sigma_p^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	Операторы	6	8,4321	1,2046	2,699*	+	0	—	0	0	—	—	+
5	Колонки	4	18,1763	4,5441	3,731*	+	0	+	—	0	—	+	
4	Ряды	3	13,2860	4,4287	3,636*	+	0	+	0	—	+		
	Операторы × колонки	24	10,9410	0,4559	1,022*	+	0	—	—	0			
	Операторы × ряды	18	8,3769	0,4654	1,043*	+	0	—	0				
	Ряды × колонки	12	14,6146	1,2179	2,729**	+	0	+					
	Операторы × ряды × колонки	72	17,6500	0,2451	0,549	+	0						
2	Повторения (ошибка)	140	62,4757	0,4463	1,820**	+							
280	Сумма	279	153,9525	0,5518									

по два валуна измерял каждый оператор в каждом пересечении колонка — ряд, что дало в общем 280 измерений. Эти данные являются частью серий продолжающегося выборочного изучения геологической совокупности, однако рассмотрение их ограничено табл. 20.3, которая лишь иллюстрирует процедуру трехфакторного дисперсионного анализа.

Вычисления начинаются с подсчета суммы 280 наблюдений и суммы квадратов этих наблюдений, причем при таком вычислении желательно применение электронно-вычислительной машины. Затем вычисляется поправочный член СТ и общая сумма квадратов.

Чтобы облегчить вычисления, составляют три таблицы общих результатов по смешанным эффектам операторы × ряды, операторы × колонки

и ряды × колонки. По этим таблицам из соответствующих конечных результатов могут быть вычислены суммы квадратов по каждому главному эффекту, данные по операторам, рядам и колонкам. Затем из общих результатов в массиве каждой таблицы получают сумму квадратов для каждого взаимодействия первого порядка.

Теперь имеется четыре таблицы для каждого ряда итогов по смешанному эффекту оператор × колонка, которые соответствуют взаимодействиям второго порядка — операторы × ряды × колонки. Остаточный член находят по разности. Результаты этих вычислений даны в колонке 4 табл. 20.3. Средние квадраты (колонка 5) находят делением каждой суммы квадратов на соответствующее число степеней свободы (колонка 3).

Дисперсия (средний квадрат), связанная с полной суммой квадратов, могла быть использована в качестве наилучшей несмещенной оценки генеральной дисперсии, если все источники измерений оказались бы незначительными. Но если какой-либо другой источник изменчивости значителен, эта оценка окажется смещенной.

Проверку гипотезы надо начинать с сравнения остаточного члена со средними квадратами взаимодействия второго порядка в отношении дисперсий $F = (\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + q\hat{\sigma}_{prc}^2)/\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, что даст $F = 0{,}2451/0{,}4463 = 0{,}549$, когда соответственные компоненты дисперсии используются в качестве оценок средних квадратов. Гипотеза H_0 заключается в утверждении, что все 140 средних значений, полученных операторами по рядам и колонкам, представляют случайные выборки из одной и той же (нормальной) совокупности. Из этого следует, что если H_0 верна, то $\sigma_{prc}^2 = 0$; из таблиц значения F [15] получаем: — $F_{05,\,75,\,125} = 1{,}39$. Так как $F = 0{,}549$, т. е. меньше табличного значения, то гипотеза не отвергается и можно считать, что $\sigma_{prc}^2 = 0$. Если дисперсионное отношение является обратным данному, то критическое значение $F_{05,\,100,\,70} = 1{,}45$, а наблюдаемое значение $F = 0{,}4463/0{,}2451 = 1{,}820$; это значительно больше, чем при 1-процентном уровне; очевидно, средние более однородны, чем можно было бы ожидать при случайном опробовании одной и той же (нормальной) совокупности. В некоторых экспериментах это может означать, что отбор не случаен, т. е. средние слишком схожи между собой. В данном случае это отражает следующий факт: изменчивость длинных осей внутри пар валунов значительно больше изменчивости между средними из наборов по два; подобное явление подчеркивает значительную изменчивость относительно неотсортированного материала (стадия 1) выборочной модели (фиг. 2.3).

Так как величина $\hat{\sigma}_{prc}^2$ практически близка нулю, эти две оценки можно рассматривать в качестве двух независимых оценок той же дисперсии и объединять с целью оценки, основанной на 212 степенях свободы. Однако вследствие того, что средние небольших выборок значительно меньше средних по отдельным валунам, представляется более реальным («геологичным») использовать данную погрешность для последующих проверок без объединения. Фактически в этом случае ни та ни другая процедура не окажет влияния на заключения при проверке гипотезы.

Следующим шагом процедуры является сравнение каждого эффекта взаимодействия первого порядка с ошибкой. Взаимодействия операторы × × ряды и взаимодействия операторы × колонки оказываются незначимыми, в то время как взаимодействия ряды × колонки значимы при 1-процентном уровне. В действительности же это означает, что величины σ_{prc}^2 и $\hat{\sigma}_{pc}^2$ близки нулю. При переходе от ряда к ряду или от колонки к колонке влияния операторов нет. Это подтверждается при контроле измерительной процедуры. Значительное взаимодействие между рядами и колонками означает, что величина σ_{rc}^2 не равна нулю, и, следовательно, различия между средними по рядам не постоянны по сравнению с колонками и наоборот. В случае значительной

тенденции к изменениям размеров валунов, т. е. когда размеры валунов увеличиваются в направлении к основанию осыпи, взаимодействие должно быть нулевым; градиент между средними по рядам сохраняется по длине каждой колонки. С другой стороны, если по направлению от одной стороны осыпи к другой наблюдается значительный градиент в размерах, различие между данными по колонкам должно быть значительным, а взаимодействие — нулевым. Когда эффект взаимодействия ряды × колонки значителен, «градиент» оказывается непоследовательным, и выводимые значения, основанные на сравнении главных эффектов и различий по рядам и колонкам, становятся сомнительными.

Так как эффекты взаимодействия первого и второго порядков равны нулю, остаточный член для проверки различий между показаниями операторов получается из различий между повторными замерами; при проверке соответствующей нулевой гипотезы $\sigma_p^2 = 0$ эти различия между средними показаниями операторов значимы при 5-процентном уровне. Иначе говоря, гипотеза $\sigma_p^2 = 0$ отвергается, а показания операторов расходятся. Такое положение обычно для подобных экспериментов; однако вследствие того, что эффекты взаимодействий операторов равны нулю, эти различия ортогональны по отношению к различиям между средними по колонкам и различиям между средними по рядам и не оказывают существенного влияния на результаты сравнения. Очень важно достигнуть подобного результата, потому что при непоследовательных показаниях операторов и как следствие при значительном взаимодействии операторов из таких данных нельзя вывести общего заключения. Последнее означает, что, если данный эксперимент повторили бы другие исследователи, у них получились бы иные результаты.

Вследствие того что эффект взаимодействия ряды × колонки значителен, т. е. $\sigma_{rc}^2 \neq 0$, соответствующий средний квадрат становится остаточным членом для проверки главных эффектов этого взаимодействия. Гипотезы $\sigma_r^2 = 0$ и $\sigma_c^2 = 0$ отвергаются как для рядов, так и для колонок, а различия между средними по рядам (и колонкам) значительно превышают изменчивость, вызванную эффектом взаимодействия ряды × колонки (при 5-процентном уровне). Общей тенденции к изменению, однако, не возникает, так как значительное взаимодействие означает, что средние по некоторым колонкам превышают средние значения некоторых рядов; то же можно сказать и о различиях между средними по рядам. На практике теперь следовало бы построить график взаимодействия ряды × колонки и ввести значения средних по рядам на каждую колонку и средние по колонкам на каждый ряд, чтобы можно было исследовать природу этих различий. Аналогично можно было бы проконтролировать измеренную длину осей a валунов (путем вычисления для сопоставлений доверительных пределов Шеффе с использованием дисперсии взаимодействия) и объяснить причину появления образцов любого размера.

Разумеется, эксперимент вначале касался лишь вопроса оценки компонента дисперсии как основы для рекомендаций по дальнейшему опробованию, так что эти компоненты дисперсии должны были быть изолированы, чтобы можно было исследовать величину влияния каждого источника в отдельности.

20.3. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ТРЕХФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Первым примером дисперсионного анализа в геологической литературе является классификация по трем признакам (смешанная модель), с помощью которой сравнивают различные методы просеивания [422]. Другой пример, в котором показывается отрицательное влияние взаимодействия, касается сравнения визуальных оценок сферичности и окатанности кварцевых зерен пляжных песков [364]; отсутствие повторных замеров и относительно боль-

шое влияние взаимодействия второго порядка приводит к противоречивости результатов.

Примеры классификации по четырем признакам и смешанных моделей описаны Бенеттом и Франклином [27], а также Браунли [44]. Исследователь, интересующийся применением подобных решений, должен использовать эти примеры с соблюдением большой осторожности еще на стадии планирования эксперимента.

20.4. ЛАТИНСКИЙ КВАДРАТ

Проведение эксперимента латинским квадратом — одна из форм трехфакторного анализа, использующая объединение факторов для уменьшения количества наблюдений. Например, структура полностью сбалансированной классификации по трем признакам без повторений будет следующей:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + (\alpha\beta\gamma_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}), \qquad (20.2)$$

где остаточный член содержит вклад от взаимодействия второго порядка вместе с влиянием от всех неучтенных источников (ε_{ijkl}). Структура аналогичного эксперимента, производимого латинским квадратом, следующая:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}. \qquad (20.3)$$

Можно заметить, что эффект от действия неучтенных источников изменчивости здесь объединяет все вклады в дисперсию от трех взаимодействий первого порядка и взаимодействия второго порядка. Значительное влияние любого взаимодействия приводит к увеличению остаточного члена и понижает чувствительность эксперимента; поскольку же мы не располагаем способом проверки этих результатов, заключения в подобных случаях могут оказаться, к сожалению, ошибочными.

План эксперимента латинским квадратом был разработан для весьма специфической цели — для полевых агрономических исследований. Главной задачей при этом обычно является сравнение средних урожаев, обусловленных некоторыми переменными (или способами ухода, например применением различных удобрений). При этом ряды и колонки используются просто в качестве двухфакторной стратификации для сокращения влияния гетерогенных изменений плодородия почвы по блокам, в которых высажены изучаемые растения. И в этом случае не пытаются интерпретировать «расхождения» между рядами или колонками; они фактически рассматриваются как фиксированные результаты, и эксперимент соответствует модели 1 или модели фиксированного типа [332]. Следует подчеркнуть, что выборочные правила при агрономических экспериментах основываются на способах продолжительного отбора, называемых *единообразными испытаниями*. Этому испытанию подвергались многие обычные растения, прежде чем данный способ был окончательно разработан, и в результате выяснилось, что результат взаимодействий можно не принимать во внимание. В геологической практике такое продолжительное изучение выборочных изменений пока еще не осуществлялось, поэтому предположения об отсутствии эффектов взаимодействия могут привести к неверным результатам. Кроме того, латинским квадратом не оценивают компоненты дисперсии, а лишь сравнивают средние значения; чтобы выделить это последнее, в данной модели используется обозначение θ вместо дисперсий в колонке ожидаемых средних квадратов (табл. 20.4)

Положительная сторона латинского квадрата заключается в сильном сокращении количества наблюдений, что бывает весьма кстати, когда необходимые данные уже собраны и исследователь считает, что это сокращение пройдет без потерь. Например, если классификация по трем признакам проведена без повторений и если каждый главный эффект представлен четырьмя классами, это значит, что имеется $4 \times 4 \times 4 = 64$ наблюдения; в ана-

Таблица 20.4

Обобщенная модель дисперсионного анализа для экспериментов по латинскому квадрату

Количество пунктов	Источник изменчивости	Число степеней свободы	Ожидаемые средние квадраты
4	Ряды	$t-1=3$	$\sigma_\varepsilon^2+t\theta_r$
4	Колонки	$t-1=3$	$\sigma_\varepsilon^2+t\theta_c$
4	Обработка	$t-1=3$	$\sigma_\varepsilon^2+t\theta_p$
	Ошибка	$(t-1)(t-2)=6$	σ_ε^2
	Сумма	$t^2-1=15$	

логичном же эксперименте с использованием латинского квадрата с 4 рядами, 4 колонками и 4 классами в третьем главном эффекте (этот способ показан в табл. 20.5) требуется всего 16 наблюдений. Количество степеней свободы

Таблица 20.5

Разбивка для классов *A*, *B*, *C*, *D* по рядам и колонкам в латинском квадрате

Ряд	Колонка			
	1	2	3	4
1	*A*	*B*	*C*	*D*
2	*D*	*A*	*B*	*C*
3	*C*	*D*	*A*	*B*
4	*B*	*C*	*D*	*A*

для главных эффектов при обоих способах одно и то же, но остаточный член в латинском квадрате содержит 6 степеней свободы, а при таком же результате для изменений при классификации по трем признакам — 54 степени свободы. «Погрешность» в обоих случаях отражает влияние всех четырех членов взаимодействия плюс влияние неучтенных источников изменчивости. Очевидно, что эффективное использование латинского квадрата возможно при том условии, что эффект всех взаимодействий равен нулю.

Разбивка по четырем символам, которая дана в табл. 20.5 один раз по рядам и один раз по колонкам, является типичной для латинского квадрата. Используя ее, надо переставлять ряды и колонки в последовательно расположенные блоки или же выбирать такую разбивку, которая оказалась бы столь же эффективной, как и рандомизированный способ; примеры даны Кемпторном [332] и Кокраном и Кохом [79]. Выбор способа разбивки в латинском квадрате можно сделать с помощью таблиц Фишера и Йейтса [128]. Интересное и популярное описание латинского и греко-латинского квадратов, а также их комбинационных свойств см. у Гарднера [139].

20.5. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЛАТИНСКОГО КВАДРАТА ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Первыми, кто применил латинский квадрат, где главными эффектами являлись 6 операторов, 6 шлифов и 6 дней, были Чейс и Фэрбэрн [59]. Базисная разбивка такого латинского квадрата 6×6 дана в приводимой ими табл. 1. Этот эксперимент (проверка метода точечного подсчета) использовал-

ся для определения последовательности показаний оператора, получаемых день за днем, а также проверки предположения, согласно которому шесть шлифов породы «одного из обнажений гранитов Уэстерли» являются однородными по содержанию минеральных составляющих. Результаты оказались весьма благоприятными; однако следует отметить, что если и предполагалось, что на дисперсию оказывают влияние некоторые взаимодействия, такое предположение могло бы быть и более информативным, хотя значительно полезнее изолировать влияние взаимодействия путем классификации по трем признакам. Кроме того, проверка на однородность не всегда ведет к цели столь непосредственно, как хотелось бы. Проверка гипотезы в общем — это попытка опровергнуть предположение однородности; и если такое предположение не оправдывается, заключение об однородности материала — не самая большая ошибка; пока оно не вошло в обоснование сравнений, можно показать, что остаточный член в этом случае будет незначителен. В упомянутом эксперименте для определения относительной величины дисперсии, обусловленной неучтенными факторами, использована теоретическая биномиальная погрешность, а остаточный член почти равен этой теоретической погрешности. Поэтому авторы пришли к выводу, что такой метод для оценки соотношений минеральных компонентов этих гранитов удачен. Аналогичные проверки изменчивости показаний операторов при точечном подсчете в шлифах осадочных пород (с использованием двухфакторного анализа) показали, что снизить непоследовательность в показаниях до желаемого уровня нельзя без большого опыта ([161; 174]; а также см. раздел 9.4 и фиг. 15.5).

Множество примеров применения латинского квадрата описано Крамбейном [256] и Крамбейном и Миллером [257]. При описании этих экспериментов указанные авторы подчеркивают, что использование латинского квадрата при оценке различных факторов предшествует трехфакторному анализу [256]. Здесь опять встает проблема определения однородности; например, третий эксперимент Крамбейна [256] представляет попытку показать, что железорудная формация Негоми по всем обнажениям размером 60 × 20 футов является однородной по мощности яшмовых и гематитовых пластов. Тут был применен латинский квадрат порядка 4 × 4, включающий три главных эффекта: вдоль пластов, поперек пластов и операторов. Заключение состоит в том, что мощность пластов гематита и яшм одинакова. Ввиду того что дисперсия ошибки относительно велика (около 50 % общей суммы квадратов, связанных с погрешностью), подобное заключение не очень информативно и может привести к ошибочным выводам.

При попытке доказать однородность прежде всего необходимо установить определенный критический барьер, отграничивающий те изменения, которые еще можно считать относительно небольшими (гомогенность), от тех, которые следует рассматривать как значительные (гетерогенность). Затем, после того как будут ликвидированы взаимодействующие источники изменчивости, требуется оценить степень изменчивости между пластами по отношению к изменчивости внутри пластов. В частности, прежде всего надо оценить изменения от взаимодействий между главными эффектами, например вследствие непоследовательности показаний операторов, а затем (после того как будет выяснено, что влиянием взаимодействий можно пренебречь) сравнить изменчивость между данными по пластам с соответствующей мерой внутрипластовых изменений. В противном случае заключения, основанные на принятии однородности, могут оказаться ошибочными.

Пока при решении геологических задач латинский квадрат имеет ограниченное применение. Однако он может оказаться эффективным инструментом в деле установления различий между средними значениями величин, представляющих определенный интерес, если в достаточной мере будут изучены данные контроля над операторами и другими взаимодействующими источниками изменчивости, что позволит свести взаимодействие к нулю.

Определенное преимущество рассматриваемый латинский квадрат имеет в тех случаях, когда размеры блоков фиксированы, например при изучении износа шин, где экспериментальной единицей является автомобиль. Такие исследования обычно ведутся с использованием более чем одного квадрата, чтобы можно было получить повторные замеры, необходимые для контроля над остаточным членом (см., например, работу [79]).

20.6. НЕПОЛНЫЕ БЛОКИ — СБАЛАНСИРОВАННЫЕ И НЕСБАЛАНСИРОВАННЫЕ

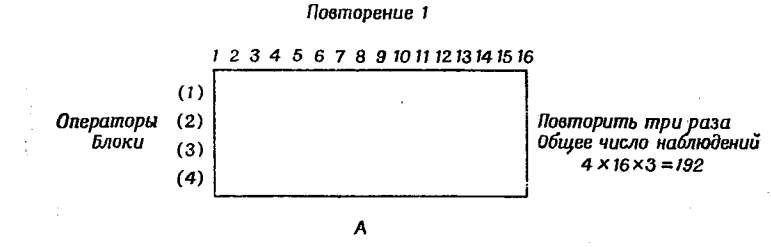
Когда требуется проанализировать очень большое количество образцов, и, кроме того, когда для оценки погрешности нужны повторные замеры, количество наблюдений чрезмерно возрастает, а эксперимент становится длительным и дорогостоящим. В агрономических опытах при большом количестве испытаний, т. е. образцов, требуются очень большие участки; при этом хорошо известно, что различия между большими блоками больше различий между маленькими, и поэтому возрастание неоднородности плодородия почвы ограничивает размеры блоков. То же происходит в геологических исследованиях: при большой величине блоков (слоев или площади) всегда возникает значительная неоднородность. Большое количество образцов почти во всех экспериментах приводит к значительной продолжительности анализа, а изменения во времени дополнительно влияют на величину остаточного члена. Изобретались сложные приемы, дающие возможность сократить размеры блоков путем использования неполных повторений и ликвидации некоторых эффектов, считаемых несущественными; в числе их можно назвать и описанный латинский квадрат.

Детальное исследование изменений объемной плотности пород по образцам $3 \times 1^5/_8$-дюймового керна из пачки Солт-Уош формации Моррисон (плато Колорадо) выразилось в анализе 161 образца, полученных из скважины, вскрывшей формацию на мощность 155 футов [157]. Этот интервал первоначально был разделен на четыре литологические зоны аргиллитов и песчаников. Одна из двух аргиллитовых зон была разделена еще на две литологические подзоны — на аргиллиты со сцементированными песчаниками и на только аргиллиты. Такой стратификацией преследовалась цель увеличения гомогенности этих зон и подзон в отношении объемной плотности пород, что позволило бы сократить число образцов, необходимых для характеристики плотности в пределах каждого подразделения. Этого удалось добиться лишь отчасти, так как плотность в пределах двух песчанистых зон менялась в весьма широких пределах вследствие неравномерности распределения карбонатного цемента [74, 157]. Даже при подобной стратификации (здесь следует учесть и то, что на каждом образце проводились повторные определения) потребовалось довольно большое количество определений плотности для каждой зоны [1], а количество операторов, которые были необходимы для сокращения затраты времени, колебалось от 3 до 9 [157]. Оказалось. что изменчивость показаний операторов уменьшается по мере увеличения количества самих операторов от 3 до 5, а затем изменчивость показаний увеличивается, когда их 6 или 7; очевидно, что оптимальной является бригада в количестве 4—5 операторов. В этом исследовании применялись различные планы эксперимента, включающие такие, как метод рандомизированных полных сбалансированных блоков и сбалансированных неполных блоков, например квадрат и прямоугольные решетки.

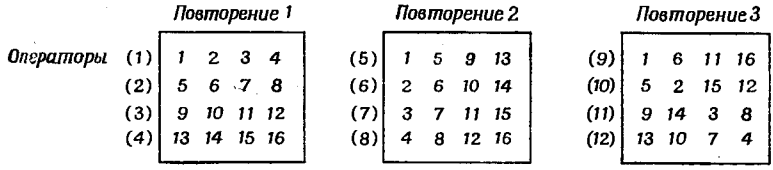
---

[1] Из предыдущих экспериментов по определению плотности осадков на ртутных весах (гл. 11) уже известно, что требуется повторить измерение три раза, чтобы достичь удовлетворительных результатов по снижению ошибки определения, если показания операторов контролируемы настолько, что взаимодействием можно пренебречь.

В качестве примера экспериментального плана и соответственного анализа рассмотрим зону 3*а* (табл. 20.6); из нее взято 16 образцов керна; три повторных замера по каждому образцу дают 48 определений объемной плотности. Для использования способа сбалансированного полного блока, т. е. способа рандомизированного блока, с четырьмя операторами потребуется $16 \times 4 \times 3 = 192$ определения плотности (фиг. 20.1, *А*). Способом же сбалансированного неполного блока с квадратной решеткой это число может



А



Б

Ф и г. 20.1. Сопоставление экспериментальных разбивок по соответственно сбалансированным полным и неполным блокам.
А — случайные полные блоки; *Б* — случайные неполные блоки (сбалансированная квадратная решетка).

быть сокращено до $4 \times 4 \times 3 = 48$ определений (фиг. 20, 1, *Б*). Схема соответствующего дисперсионного анализа приведена в табл. 20.5. Легко заметить, что этот анализ значительно сложнее, чем при способе рандомизированного полного блока. Вычисление сумм квадратов рекомендуется осуществлять по отдельным стадиям и быть чрезвычайно внимательным; почти всегда необходимо делать это в несколько рук, иначе очень трудно избежать ошибок. Для такого рода анализа лучше всего использовать электронные вычислительные машины. Однако, чтобы найти соответствующий остаточный член, необходимо понять всю сложность способа, а для этого надо хорошенько проработать описанные в литературе примеры, прежде чем приступить к анализу своих данных. Соответствующие примеры вместе с рекомендуемыми процедурами описаны Кокраном и Коксом [79].

По табл. 20.6. можно заметить, что погрешность при способе неполного блока можно сравнить с погрешностью полного блока. Очевидно, что, несмотря на сокращение количества наблюдений, остаточный член здесь меньше и, следовательно, эксперимент более эффективен. Кроме того, в процессе эксперимента было потеряно одно наблюдение и его заменили рассчитанным [79], за счет чего потерялась одна степень свободы для остаточного члена.

В подобной серии экспериментов по определению плотности каждый оператор вначале анализирует набор эталонных образцов до тех пор, пока его показания не становятся контролируемыми, в частности, пока не возникает уверенность, что эффектом взаимодействия можно пренебречь; для способа сбалансированных и несбалансированных блоков этот момент имеет весьма

Таблица 20.6

Квадратная решетка, дисперсионный анализ неполными блоками: объемная плотность 16 образцов керна из зоны 3*a*, скважина 155*C*, пачка Солт-Уош формации Моррисон, Уолл-Каньон, Колорадо

Данные кодированы: $(BD - 2) \times 10^3 = X_i$

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Повторения	3	1 062,67	354,22
Компонент *a*	(6)	4 279,09	713,18
Компонент *b*	(6)	1 749,60	291,60
Блоки (исключенные выборки)	12	6 028,69	502,39
Выборки (игнорируемые блоки)	15	14 792,86	986,19
Выборки (исключенные блоки)	(15)	13 275,86	885,07
Ошибка (внутри блока)	32 [1]	4 579,39	143,11
Ошибка (случайный блок)	44 [1]	10 608,08	241,09
Сумма	62 [1]	26 463,61	

[1] Одна степень свободы потеряна за счет вычисления недостающего значения.

большое значение. Погрешности повторения колеблются в пределах от 0,01 до 0,02 единиц плотности, и колебание плотности от образца к образцу значительно превышает это значение. В общем рекомендуется провести по возможности полное исследование главных причин изменчивости еще до применения способа неполных блоков и тщательно и осторожно выбрать экспериментальную процедуру, убедившись сначала, что экономия количества наблюдений не отразится на возможности достигнуть намеченной цели.

Способы неполных блоков (как сбалансированных, так и несбалансированных) увеличивают разнообразие возможных процедур и дают простор для выбора способов отбора. Большая часть этих способов касается главным образом сравнений средних значений, т. е. все они в общем рассматриваются как модель фиксированного типа.

20.7. ЦЕПНЫЕ БЛОКИ — ПРИМЕР СПОСОБА НЕСБАЛАНСИРОВАННОГО НЕПОЛНОГО БЛОКА

Способ цепных блоков был предложен как специальный прием для решения некоторых задач количественного спектрального анализа. В данной процедуре используется пластинка, на которой помещается не более 10—12 определений. Точность их обычно высока; поэтому, чтобы добиться малой погрешности, не требуется значительного числа повторных замеров, а метод проверки должен быть высокочувствительным [462], так как различие между средними здесь выражается весьма малыми значениями.

При количественном спектральном анализе на элементы-примеси одной из главных причин «погрешности» являются различия между пластинками как вследствие нетождественности эмульсии, так и различий в условиях проявления после экспозиции. Пользуясь пластинкой в качестве «блока», можно освободить остаточный член от такого источника погрешности. Но так как элементы-примеси обычно определяют на большом количестве образцов, а размеры пластинки ограничены возможностью размещения 10—12 экспозиций (образцов), необходимость иметь повторения приводит к способу неполных блоков. Эти две черты — фиксированный размер блока и высокая точность анализа — обычны для количественного спектрального анализа, поэтому наиболее подходящим способом выборочной разбивки для этого вида работ является способ именно неполных блоков. Первичная цепь блоков

продолжается, и в случае подходящей разбивки можно использовать блокирование по двум признакам [287].

Ниже в качестве примера описывается подобный эксперимент, целью которого была изоляция погрешности, вносимой повторными определениями бора в образцах осадочных пород; такая проблема возникла после того, как было обнаружено, что различные навески из одной и той же массы тонкоизмельченного осадка дают слишком расходящиеся результаты. Содержание бора было выбрано в качестве интересующей нас случайной величины $X_{iju\,z}$, представляемой в частях на миллион.

Тридцать образцов представлены десятью определениями на каждой из пяти пластинок, т. е. всего имеем 50 определений. При таком распределении данных (табл. 20.7) можно заметить, что имеется два класса C_i буквенных

Таблица 20.7

Выборочная разбивка по принципу «цепные блоки» с тридцатью ступенями

Полосы равны блокам

Число образцов на полосе	Блок 1	Блок 2	Блок 3	Блок 4	Блок 5	Класс
$v_2=20$	*A*	*E*	*I*	*M*	*Q*	C_1
	B	*F*	*J*	*N*	*R*	
	C	*G*	*K*	*O*	*S*	
	D	*H*	*L*	*P*	*T*	
	E	*I*	*M*	*Q*	*A*	
	F	*J*	*N*	*R*	*B*	
	G	*K*	*O*	*S*	*C*	
	H	*L*	*P*	*T*	*D*	
$v_1=10$	*a*	*c*	*e*	*j*	*l*	C_2
	b	*d*	*f*	*k*	*m*	

$v_1+v_2=v=30$ ступеней = образцов $v_1+2v_2=N=50$

символов; 20 прописных букв от A до T (C_1), которые встречаются дважды, и 10 строчных букв от a до m (C_2), которые встречаются один раз. Обозначим через t_{iju} эффект u-й обработки j-й группы C_i, а через b_z — эффект z-го блока. Тогда структура эксперимента выразится так [79, 462]:

$$X_{iju}=t_{iju.}+b_z+\varepsilon_{iju}. \tag{20.4}$$

Предполагается, что t_{iju} изменяются случайно со средним 0 и дисперсией σ^2, а ε_{iju} не зависит от случайных изменений, связанных с производством измерений. Если

$$X_{2jz}=\sum_{u=1}^{n_2} X_{2juz} \quad \text{и} \quad D_j=X_{2jj}=X_{2j(j+1)},$$

то iuj определяется в нашем случае как

$$i=1,\ 2; \quad j=1,\ \ldots,\ 5; \quad u=1,\ \ldots,\ n_{ij};$$

$$n_{ij}=\begin{cases} 20, & i=1, \\ 10, & i=2, \end{cases}$$

и u означает определение j-й группы i-го класса.

Таблица 20.8

Содержание бора (ч. на млн.) в тридцати образцах тонкоистертой осадочной породы

Блок	Ч. на млн.	Блок	Ч. на млн.	Блок	Ч. на млн.	Блок	Ч. на млн.	Блок	Ч. на млн.
2511	107	2112	100	2213	97	2314	97	2415	112
2521	77	2122	98	2223	79	2324	95	2425	62
2531	97	2132	74	2233	105	2334	102	2435	107
2541	73	2142	93	2243	120	2344	87	2445	195
2111	138	2212	100	2313	105	2414	130	2515	95
2121	81	2222	93	2323	79	2424	71	2525	74
2131	79	2232	100	2333	130	2434	87	2535	110
2141	73	2242	117	2343	120	2444	74	2545	85
1111	115	1212	117	1313	85	1414	110	1515	102
1121	67	1222	100	1323	89	1424	112	1525	102
$\sum_{1}^{10}$	907		992		1009		965		1044

Наблюдения $= X_{ijuz}$; $i = 1,2$; $j = 1, \ldots, 5$; $u = 1$ до n_{ij}; $z = j$ или $j = 1$.

Наблюдения сведены в табл. 20.8 с индивидуальными номерами наблюдений и общими данными по блоку. Схема дисперсионного анализа приведена в табл. 20.9.

Таблица 20.9

Таблица дисперсионного анализа цепными блоками

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Число ступеней (обработок) (с поправкой на блоки)	$v-1$	SS_t	$SS_t = \dfrac{SS_t}{v-1}$
Блоки (без поправки)	$b-1$	SS_b	$SS_b = \dfrac{SS_b}{b-1}$
Ошибка	$N-v-b+1$	SS_ε	$SS_\varepsilon = \dfrac{SS_\varepsilon}{N-v-b+1}$
Сумма	$N-1$	SS_{tot}	

Ход вычисления сумм квадратов следующий:

1. Сумма квадратов (SS), обусловленная различиями между блоками,

$$SS_b = \sum_{j=1}^{b} \frac{B_j^2}{k_j} - \frac{G^2}{N} = \sum_{j=1}^{5} \frac{B_j^2}{10} - \frac{G^2}{50}$$

$$= \frac{4\,845\,955}{10} - \frac{24\,176\,889}{50} = 1057{,}72.$$

2. Полная сумма квадратов $SS_{tot} = \sum X_{ijuz}^2 - \dfrac{G^2}{N} = 508\,081 - 483537{,}78 = 24\,543{,}22.$

3. Сумма квадратов, обусловленная погрешностью SS_ε. Для j-й группы C_2 находим разность d_{ju}:

$$d_{ju} = (X_{2ju\,j} - X_{2ju(j+1)} \quad u = 1, \ldots, n_2,$$

например:

$$d_{11}=X_{2111}-X_{2112}=138-100=38;$$
$$d_{12}=X_{2121}-X_{2122}=81-98=-17;$$
$$d_{13}=X_{2123}-X_{2132}=79-74=5;$$
$$d_{14}=X_{2141}-X_{2142}=73-93=-20.$$

Тогда

$$\sum_{u=1}^{4} d_{1u}=6,\quad \sum_{1}^{4} d_{2u}=9,\quad \sum_{1}^{4} d_{3u}=53,\quad \sum_{u=1}^{4} d_{4u}=-144,\quad \sum_{4-1}^{4} d_{5u}=10;$$

также

$$\sum_{u=1}^{4} d_{1u}^2=2158,\quad \sum_{u=1}^{4} d_{2u}^2=239,\quad \sum_{u=1}^{4} d_{3u}^2=2193,$$
$$\sum_{1}^{4} d_{4u}^2=15\,446,\quad \sum_{1}^{5} d_{5u}^2=466.$$

Тогда сумма квадратов, обусловленная погрешностью, будет SS_ε, где

$$SS_{\varepsilon,\,j}=\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{n_2}(d_{ju}-\bar{d}_{ju})^2=\frac{1}{2}\left[\sum_{1}^{n_2} d_{ju}^2-\frac{1}{n_2}\left(\sum_{1}^{n_2} d_{ju}\right)^2\right],$$

например:

$$SS_{\varepsilon,\,1}=\frac{1}{2}\left[\sum_{u=1}^{4} d_{ju}^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{u=1}^{4} d_{ju}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[2158-\frac{1}{4}(62)\right]=1074{,}5,$$

и аналогично $SS_{\varepsilon,2}=109{,}375$, $SS_{\varepsilon,3}=745{,}375$, $SS_{\varepsilon,4}=6098{,}5$ и $SS_{\varepsilon,5}=220{,}5$. Полная $SS_{\varepsilon,j}=8248{,}50$. Теперь $SS_{\varepsilon,j}$ является оценкой суммы квадратов, обусловленной погрешностью с числом степеней свободы n_2-1. Вычислением аналогичного числа для каждой группы C_2 находим сумму квадратов, обусловленную погрешностью с числом степеней свободы $b(n_2-1)=15$. Остающиеся степени свободы определяются выражением

$$Y=\frac{1}{2bn_2}\left(\sum_{z=1}^{b} X_{2z(z+1)}-\sum_{z=1}^{b} X_{2zz}\right)=\frac{1}{2\times5\times4}\left(\sum_{z=1}^{5} X_{2z(2+1)}-\sum_{z=1}^{5} X_{2zz}\right)=$$
$$=\frac{1}{40}[(1977-1941)]^2=32{,}4.$$

Тогда

$$SS_\varepsilon=\sum_{j=1}^{b} SS_{\varepsilon,\,j}+Y=8\,280{,}650.$$

4. Обработка полученных сумм квадратов.

$$SS_t=SS_{tot}-SS_b-SS_\varepsilon=16\,279{,}35.$$

Результирующий дисперсионный анализ дается в табл. 20.10. Проверка процедур на погрешность представляет основной интерес и критическое значение F в условиях гипотезы H_0 отсутствия различий между средними по каждой обработке будет $F_{05,\,29,\,16}=2{,}28$; наблюдаемое же значение $F=1{,}01$, так что причин отвергать гипотезу нет и, следовательно, нет и различий между средними. Судя по полученному результату с его относительно большим остаточным членом, едва ли можно повторить анализ. Нужно иметь

Таблица 20.10

Дисперсионный анализ содержания бора (ч. на млн.)

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Число ступеней (обработок) (с поправкой на блоки)	$v-1=29$	15 204,85	524,305
Блоки (без поправки)	$b-1=4$	1 057,72	264,48
Ошибка	$N-v-b+1=16$	8 280,65	517,54
Сумма	$N-1=49$	24 543,22	

$$\frac{SS_t}{SS_\varepsilon}=\frac{524{,}305}{517{,}540}=1{,}01 \text{ при } F_{N-1,\ N-v-b+1}.$$

какие-то гарантии для получения уверенности в том, что повторные пробы анализируемых порошков окажутся также однородными. Воспроизводимость анализов в дальнейшем проверялась аналогичным способом.

Когда достигнут желаемый уровень точности воспроизводимости анализов, цель эксперимента меняется: теперь она заключается в сравнении средних по выборкам, и тогда становится необходимым вычислить соответственный остаточный член. Это можно сделать тремя способами и каждый основан на своей погрешности:

1. Сравнение между любыми двумя средними в C_1, скажем t_{1ju} и t_{1sw}, где

$$\mathrm{Var}(\hat{t}_{1uj}-\hat{t}_{1sw})=\left[f(i)+\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\right]\sigma^2 \qquad i=j-s \pmod b.$$

2. Сравнение двух средних в C_2, скажем t_{2ju} и t_{2sw}, где

$$\mathrm{Var}(\hat{t}_{2ju}-\hat{t}_{2sw})=\begin{cases}\sigma^2, & j=s,\\ [f(i)]\,\sigma^2, & j\neq s.\end{cases}$$

3. Сравнение двух средних в C_1 и C_2 соответственно, скажем t_{1ju} и t_{2sw}, где

$$\mathrm{Var}(\hat{t}_{1ju}-\hat{t}_{2sw})=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(3+\frac{b-1}{n_2b}\right)\sigma^2, & j=s,\\ \left[f(i')+\frac{1}{2}\left(1-\frac{b+1-4i'}{n_2b}\right)\right]\sigma^2, & j\neq s,\end{cases}$$

$$i'=j-s \pmod{(b+1)};$$

$$f(z)=1+\frac{(2z-1)\,b-2z^2}{n_2b}.$$

Должно быть ясно, что эти сравнения провести не столь легко, как при симметричном полном способе, например при способе рандомизированных блоков, и если остаточный член действительно не мал, то различия между средними значениями могут остаться не выявленными. Применяя специальные методы обработки такого рода, очень важно убедиться, что все условия их применения выполнены, иначе эксперимент окажется не вполне информативным.

ГЛАВА 21

Измерение зависимости между переменными

Если для совокупности мы можем найти математическое выражение, которое адекватно представляет имеющиеся данные, а затем по этим данным вычислить наилучшие оценки нужных параметров, то обычно считают, что получено все или почти все, что можно было бы извлечь из имеющегося материала, вся доступная информация.

R. A. Fisher, Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, Ltd., 10th ed., p. 7, 1948

21.1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве случаев аналитические процедуры, описанные в предыдущих главах, заключаются в операциях с изменчивостью одной случайной величины, однако чаще всего для каждого множества образцов измеряется более одной переменной, причем возникает проблема выявления зависимости между этими переменными. Здесь можно оперировать двумя видами моделей; с помощью первой рассматривают преимущественно формы связи, со второй — силу связи между переменными. В первом случае, при изучении формы связи берут выборку значений случайной переменной (X_i; $i = 1, 2, \ldots, k$) и затем измеряют значения другой переменной Y, определяемой совместно с переменной X на определенном уровне. Такая модель называется *регрессионной*. Когда обе переменные изменяются случайно, речь должна идти о степени связи, или о второй модели, в которой более существенную роль играет мера корреляции. Обе модели могут быть расширены, например, от простой линейной регрессии, или корреляции к множественной регрессии и корреляции и от линейной связи к нелинейной.

Так как многие нелинейные связи посредством соответствующих преобразований могут быть сведены к линейным (см. ниже), такой вид регрессии будет описан подробно. Для более широкого ознакомления с множественными и нелинейными связями отсылаем читателя к известным руководствам [27, 44, 341], геологические примеры см. у Гриффитса [165, 167, 172, 176] и у Миллера и Кана [299].

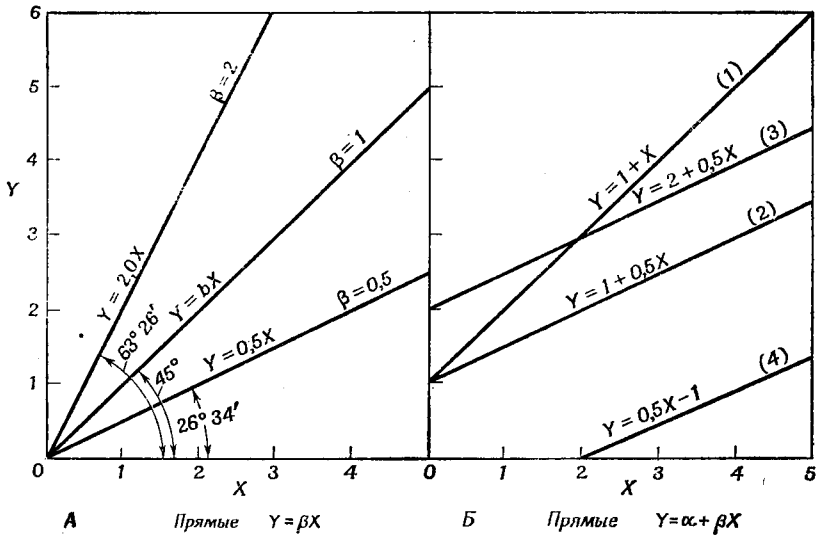
21.2. НЕКОТОРЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Линейная зависимость между переменными может быть выражена уравнением

$$Y = \alpha + \beta X, \tag{21.1}$$

где β — мера изменения Y на единицу изменения X, а α — отрезок, или интервал, отсекаемый линией регрессии на оси Y. Линейные регрессии,

представленные на фиг. 21.1, *А*, иллюстрируют изменения β при постоянном $\alpha = 0$; линия регрессии проходит через начало координат. Когда величина β постоянна, а α меняется, регрессионные линии параллельны (фиг. 21.1, *Б*,



Ф и г. 21.1. Графики взаимоотношений $Y = \alpha + \beta X$.
А — прямые $Y = \beta X$; *Б* — прямые, не проходящие через начало координат, $Y = \alpha + \beta X$.

линии 2, 3 и 4); а когда β меняется при фиксированном значении α, линия регрессии меняет наклон (фиг. 21.1, *Б*, линии 1 и 2).

Любое уравнение регрессии, имеющее форму

$$Y = \alpha + \beta X,$$

может быть сведено к форме $Y = \beta X$ преобразованием начала отсчета (Y, $\overline{X}$), и тогда, чтобы можно было показать, что переменные выражаются отклонениями от соответствующих средних значений, данное уравнение обычно записывается как

$$y = \beta x.$$

21.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Эта группа зависимостей включает параболу, гиперболу, экспоненту и серию полиномов в качестве специальных случаев. В каждом таком случае зависимость содержит показатель степени.

Например, для параболы и гиперболы общая форма уравнения выражается в виде

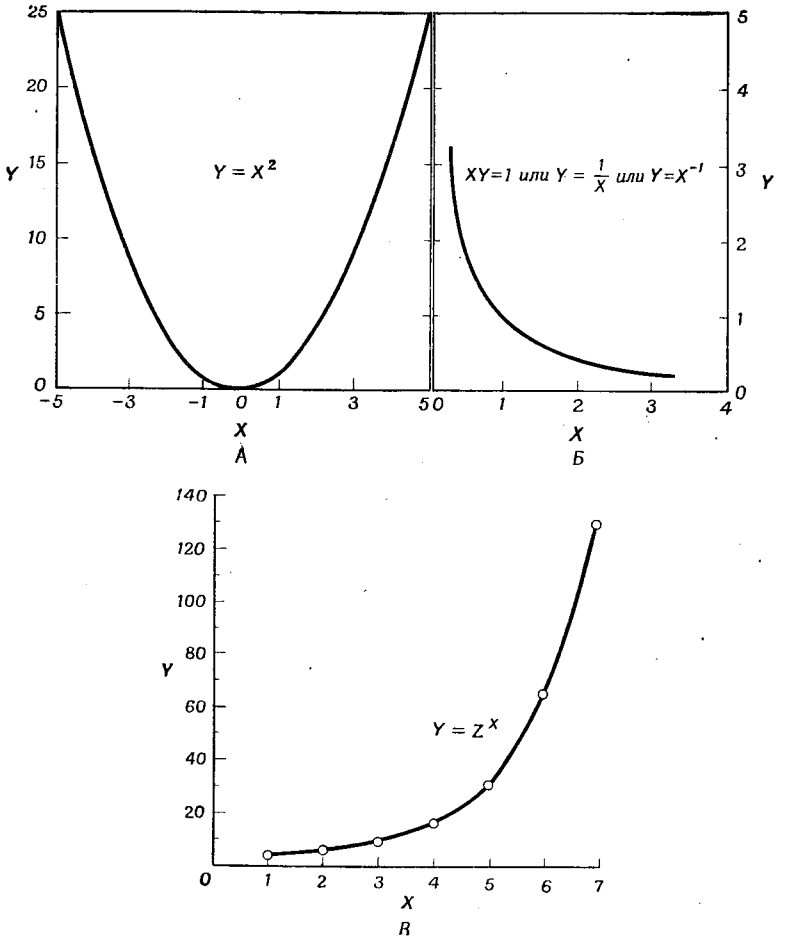
$$Y = \alpha X^{\beta}. \qquad (21.2)$$

Когда значение β положительно, кривая представляет собой параболу; при отрицательном значении β получаем гиперболу. Эти два простых случая выражены графически на фиг. 21.2. На фиг. 21.2, *А*, где $Y = X^2$, т. е. $\alpha = 1$, а $\beta = 2$, показана парабола; на 21.2, *Б* — гипербола, где $Y = X^{-1}$ ($Y = 1/X$, или $XY = 1$) при $\alpha = 1$ и $\beta = -1$.

Аналогично для экспоненциальных кривых общим выражением является уравнение

$$Y = \alpha \beta^{X}. \qquad (21.3)$$

Например, кривая $Y = 2^X$, где $\alpha = 1$ и $\beta = 2$, построена на фиг. 21.2, *В*.



Ф и г. 21.2. Нелинейная зависимость между переменными.
А — парабола; *Б* — равнобочная гипербола; *В* — экспонента.

21.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШКАЛЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Как для графических построений, так и для вычислительных целей, разумеется, гораздо проще манипулировать линейными, нежели другими формами функций; следовательно, лучше всего по возможности выразить функции в линейной форме. Чтобы достигнуть этого, необходимо трансформировать первоначальные переменные в новую шкалу единиц, по которой изменения этих переменных происходило бы аддитивно. С этой целью используют логарифмы; любая переменная, меняющаяся мультипликативно, может иметь логарифмическое выражение, меняющееся аддитивно. Эти изменения переменной, или трансформацию, можно обобщить следующим образом.

Уравнение параболы и гиперболы

$$Y = \alpha X^{\beta}$$

переходит в форму

$$\log Y = \log \alpha + \beta \log X.$$

Заменяя

$$Y' = \log Y, \quad \alpha' = \log \alpha \quad \text{и} \quad X' = \log X,$$

получаем

$$Y' = \alpha' + \beta X'.$$

Для экспоненциальной кривой

$$Y = \alpha\beta^X$$

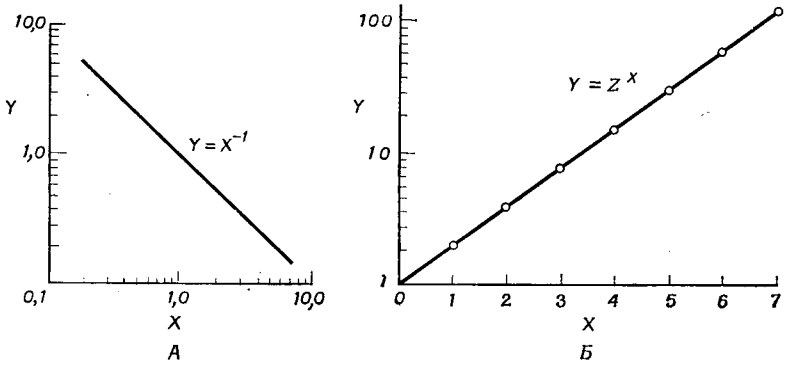
получаем

$$\log Y = \log \alpha + X \log \beta,$$

или

$$Y' = \alpha' + \beta' X.$$

Следовательно, для трансформации параболы или гиперболы в линейную форму требуется найти логарифмы как для X, так и для Y (фиг. 21.3, *А*), для экспоненты же достаточно $\log Y$ с коэффициентом (21.3, *Б*).



Ф и г. 21.3. Линеаризованные гипербола и экспонента.

А — гипербола, $Y = X^{-1}$, в логарифмическом масштабе по обеим осям; *Б* — экспонента $Y = Z^X$ в полулогарифмическом масштабе.

Таким образом, парабола или гипербола могут быть линейно преобразованы графически с применением логарифмической бумаги (фиг. 21.3, *А*); аналогично в линейном виде можно представить и экспоненту, используя логарифмический масштаб по оси Y или нанося значения на полулогарифмическую сетку с логарифмическим масштабом для Y (фиг. 21.3, *Б*).

Типичным примером такого представления данных в седиментологии может служить ϕ-шкала Крамбейна [247].

$$d = 2^{-\phi},$$

где d — диаметр в миллиметрах; это соотношение является экспоненциальным и может быть преобразовано в линейную форму:

$$\log d = -\phi \log 2$$

[168, 248]. Примеры полиномов с более чем одним показателем степени ($Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2^2 + \beta_3 X_3^3 + \ldots$) и периодические кривые типа $Y = \sin X$ приводятся в известных учебных руководствах [15, 118].

Зависимости, подобные описанным, обычно называются *функциональными*; они относятся к области чистой математики; в эмпирических исследованиях функциональные зависимости выявляются крайне редко, и одна из проблем в исследовательской работе такого рода заключается в определении вида той функциональной зависимости между переменными, которая может служить подходящей моделью: например, между давлением, температурой и объемом газа; глубиной залегания и плотностью пород; изменением степени окатанности со временем или расстоянием и т. д. При попытках определить эти зависимости значения одной переменной меняются,

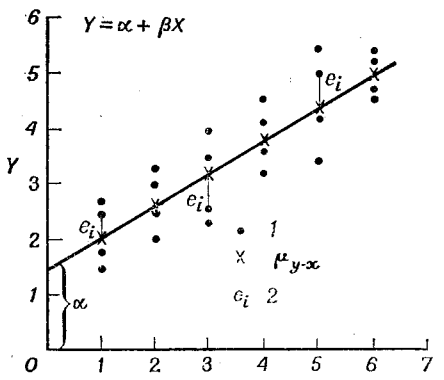
а значения другой определяются экспериментально. Так, скажем, петрограф оценивает окатанность галек на пляже на расстоянии одной, двух и трех миль от некоторого базиса. Результаты он вычерчивает в виде графика, затем пытается усмотреть в этом графике отражение некоторой функциональной зависимости. Однако в таких эмпирических определениях, несомненно, содержится погрешность, с которой измеряется изучаемая величина. Ведь разные гальки, которые измеряются на протяжении трех миль, не будут характеризоваться одной и той же степенью окатанности. С другой стороны, при функциональной зависимости имеется в виду, что обе переменные замерены без погрешности. Но в экспериментальных примерах изменяемая переменная рассматривается как измеряемая без погрешности; она называется *независимой переменной* X; другая же переменная является случайной, она дает различные значения при одном и том же значении независимой переменной и называется *зависимой переменной* Y.

Получив на образцах серию замеров двух переменных, можно наносить эти результаты на график и изучать возможность определения формы функции. В общем случае последняя может оказаться линейной или быть одной из функций, описанных ранее, и в этом случае ее можно свести к линейной форме, применив подходящее преобразование. После этого следует согласовать кривую с изменениями, представленными на графиках; используемая для этого процедура известна под названием *метода наименьших квадратов* (впервые этот метод описали Лежандр и Гаусс, см. в работе [452].)

21.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ «НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ» МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Имея набор замеров двух характеристик, или свойств на n образцах, одно из которых (X) измерено без погрешности и каждому значению которого соответствует множество определений другого свойства (Y_i), мы можем рассматривать совокупность Y-ов по каждому значению X и оценивать их соответственные средние значения $\mu_{y \cdot x}$. На фиг. 21.4 показана линейная зависимость между ожидаемыми значениями Y, обозначенными $\mu_{y \cdot x}$, и значениями X. Совокупности Y_i распределены относительно соответствующих значений $\mu_{Y \cdot X}$ независимо и нормально с общей дисперсией, равной σ^2, т. е. $\sigma^2_{Y \cdot X} = \sigma^2$; иначе говоря, совокупности имеют постоянную условную дисперсию, следовательно,

$$\mu_{Y \cdot X} = \alpha + \beta X. \qquad (21.4)$$



Ф и г. 21.4. Линейная связь в общем виде.

Точки — точки наблюдений; *крестики* — $\mu_{Y \cdot X}$; e_j —отклонения наблюдаемых значений от средней линии.

Положим, что данные образцы обладают по крайней мере двумя независимыми свойствами X и что величины Y измерены в зависимости от каждого значения X; тогда Y_i может быть определено как

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \varepsilon_i, \qquad (21.5)$$

где ε_i —«погрешность», или сумма, на которую Y_i отличается от $\mu_{Y \cdot X}$ для всех значений Y_i. Тогда процедуру наименьших квадратов можно представить как способ определения «наилучшего приближения» прямой с наблюдаемыми точками, что ведет к вычислению оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ для α и β. Линия «наилучшего приближения»— такая линия, которая минимизирует ε_i^2, т. е.

минимизирует квадратичное отклонение каждой величины Y_i от соответствующего ей значения $\mu_{y.x}$. Тогда

$$\varepsilon_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i),$$

и мы минимизируем

$$\varepsilon_i^2 = [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i)]^2;$$

или, суммируя по всем X_i,

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i)]^2. \tag{21.6}$$

Минимизацией этого выражения находим наилучшую оценку $\hat{\alpha}$ для α и $\hat{\beta}$ для β. Чтобы минимизировать, положим, что

$$Q = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$$

и найдем частные производные Q соответственно по $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ (где производная суммы есть сумма производных) и приравняем эти производные нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} = -2 \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0$$

и

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -2 \sum X_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0.$$

Это дает «нормальные уравнения»

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{21.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2. \tag{21.8}$$

Решение этих систем уравнений и дает искомые наилучшие оценки для α и β.

Вычислив ΣX_i, ΣX_i^2, ΣY_i, ΣY_i^2, $\Sigma X_i Y_i$, просуммировав от $i = 1$ до n и подставив соответствующие значения в равенства (21.7) и (21.8), получим значение $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Для решения данной системы уравнений существует несколько процедур (см., например, работы [27] или [44]). Допустим, мы преобразуем наши данные в отклонения от соответствующих им средних значений следующим образом:

$$x_i = X_i - \bar{X},$$

откуда

$$\sum x_i = 0,$$

тогда

$$y = Y_i - \bar{Y}, \text{ откуда } \sum y_i = 0$$

и

$$Sx_i^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i - \frac{(\sum X_i)^2}{n}, \tag{21.9}$$

$$Sy_i^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}, \tag{21.10}$$

$$Sx_i y_i = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - Y) = \sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}. \tag{21.11}$$

Тогда

$$\hat{\beta} = \frac{Sx_i y_i}{Sx_i^2} \tag{21.12}$$

и

$$\hat{\alpha} = \frac{Sy_i - \beta Sx_i}{n}, \tag{21.13}$$

или

$$Y - \overline{Y} = \hat{\beta}(X - \overline{X}), \tag{21.14}$$

что дает

$$Y = \overline{Y} + \hat{\beta}(X - \overline{X});$$

после замещения численных значений Y и $\overline{X}$

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X. \tag{21.15}$$

Дисперсия регрессионных значений $\overline{Y}$ дается выражением

$$\sigma^2_{\overline{Y}\cdot X} = \frac{\sum (Y_i - Y_c)^2}{n},$$

где Y_i — наблюдаемое значение Y, а $\overline{Y}_c$ — вычисленное значение Y (оценка для $\mu_{Y\cdot X}$) для данного значения X_i. Оценкой будет величина

$$\hat{\sigma}^2_{\overline{Y}\cdot X} = \frac{\sum (Y_i - Y_c)^2}{n-2}, \tag{21.16}$$

где две степени свободы теряются при оценках $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ по наблюдениям. Величина $(n-2)\hat{\sigma}^2_{\overline{Y}\cdot X}/\sigma^2$ с χ^2 распределена как с числом степеней свободы $n-2$ [27, 44, 454]. Формула, наиболее удобная для нахождения этой дисперсии, определяется следующим образом. Так как

$$\begin{aligned}\sum (Y_i - Y_c)^2 &= \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 = \\ &= \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = \\ &= \sum Y_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) - \hat{\alpha} \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) - \hat{\beta} \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i),\end{aligned}$$

а при нахождении линии наилучшего приближения величина $\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)$ приравнивается нулю и два последних члена обращаются в нуль, следовательно,

$$\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 = \sum Y_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = \sum Y_i^2 - \hat{\alpha} \sum Y_i - \hat{\beta} \sum X_i Y_i$$

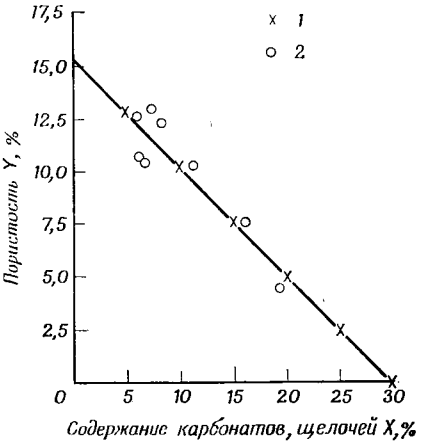
и

$$\hat{\sigma}^2_{\overline{Y}\cdot X} = \frac{\sum Y_i^2 - \hat{\alpha} \sum Y_i - \hat{\beta} \sum X_i Y_i}{n-2}. \tag{21.17}$$

21.6. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СОДЕРЖАНИЕМ КАРБОНАТОВ И ПОРИСТОСТЬЮ В ПЕСЧАНИКАХ КАУ-РАН

Пористость нефтеносных песков, измеряемая в процентах, часто сильно зависит от количества карбонатного цемента в песках; в нефтеносных пенсильванских песчаниках Кау-Ран (Западная Виргиния) [167] для некоторого интервала значений пористости установлена линейная форма такой зависимости. Там, где содержание карбоната менее 5%, связи между карбонатностью и пористостью не наблюдается [167]; то же можно сказать и о тех случаях, когда карбонат представлен обломками раковин. Максимальная

пористость песчаников Кау-Ран достигает 25%, и, когда содержание карбонатов превышает это значение, видимая связь между этим содержанием и пористостью теряется [167]. В интервале от 5 до 05%, однако, связь эта четкая и линейная. Так как карбонаты в таких образцах представлены кристаллической разновидностью, они стремятся занять поровое пространство (фиг. 21.5). При подборе линии регрессии для данной серии наблюдений (табл. 21.1) содержание карбоната [1] рассматривалось как независимая переменная X_i, а пористость при выбранных меняющихся значениях карбонатности — как зависимая переменная Y_i. Предполагается, что определения пористости в интервале от 5 до 25% распределены нормально и независимо вокруг соответствующих им значений $\mu_{Y \cdot X}$, хотя это требование и не является необходимым для построения линии регрессии методом наименьших квадратов; оно требуется лишь для последующих проверок гипотез. Эти данные обобщены в табл. 21.1.



Ф и г. 21.5. Зависимость пористости Y (в процентах) от карбонатности X (в процентах) в песчанике Кау-Ран.
1 — вычисленные значения; *2* — наблюдаемые значения.

На основании подсчитанных сумм, сумм квадратов и смешанных произведений в таблице исправленные суммы квадратов и смешанных произведений с использованием равенств (21.9)—(21.11) будут следующими:

$$Sx_i^2 = 164{,}6845, \quad Sy_i^2 = 52{,}80 \quad \text{и} \quad Sx_iy_i = 87{,}8425.$$

Таблица 21.1

Содержание карбоната и пористость (%) в восьми образцах керна из песчаников Кау-Ран

Номер образца, i	Карбонат X_i, %	Пористость Y_i, %
1	7,68	12,7
2	7,09	10,2
3	19,43	4,6
4	6,71	10,4
5	15,93	7,6
6	10,97	10,4
7	8,94	12,0
8	6,14	12,5
$\sum_{i=1}^{8} X_i$	82,89	$80{,}40 \sum_{i=1}^{8} Y_i$
$\overline{X}$	10,36	$10{,}05\overline{Y}$
$\sum X_i^2$	1023,5285	$860{,}82 \sum Y_i^2$
$\sum X_iY_i$	748,2020	

Примечание. Описание пород см. в работе [167].

[1] Содержание карбоната определялось химически на алкалиметре путем поглощения выделенного CO_2; эффективная пористость определялась сатурацией.

Отсюда

$$\hat{\beta} = \frac{Sx_i y_i}{Sx_i^2} = \frac{-84{,}8425}{164{,}6845} = -0{,}5152.$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i - \hat{\beta} \sum X_i}{n} = \frac{80{,}4 + 0{,}5152 \times 82{,}89}{8} = 15{,}388.$$

Уравнение регресии

$$Y = 15{,}388 - 0{,}515X.$$

Эта линия построена на фиг. 21.5. Она показывает, что на каждую полуединицу уменьшения карбонатности пористость возрастает на единицу.

Дисперсия Y_i по отношению к линии регрессии следует из равенства (21.17):

$$\hat{\sigma}^2_{Y \cdot X} = \frac{860{,}82 - 15{,}388 \times 80{,}40 + 0{,}515 \times 748{,}202}{6} = 1{,}515,$$

или

$$\hat{\sigma}_{Y \cdot X} = 1{,}231.$$

21.7. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ РАВЕНСТВА КОЭФФИЦИЕНТА РЕГРЕССИИ И ВЕЛИЧИНЫ СДВИГА (d) НУЛЮ

Из полученного значения $\sigma_{Y \cdot X} = 1{,}231$ находят величину дисперсии выборочного коэффициента регрессии ($\hat{\beta}$):

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\sigma}^2_{Y \cdot x}}{Sx_i^2} \tag{21.18}$$

$$= \frac{1{,}515}{164{,}6845} = 0{,}00920.$$

Теперь можно проверить, отражает ли оценка $\hat{\beta}$ тот факт, что истинное значение $\beta = 0$. Используем статистику

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta})}} \tag{21.19}$$

$$= \frac{-0{,}515 - 0}{0{,}0959} = -5{,}370.$$

В условиях нулевой гипотезы $\beta = 0$ статистика t распределена как t-критерий Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 2$. Следовательно, при уровне значимости 0,01 (P_{01}) для $\nu = n - 2 = 6$, критическое значение равно 3,71, но так как вычисленное нами значение превышает 3,71, нулевая гипотеза ($\beta = 0$) отвергается и приходится согласиться, что $\hat{\beta} = -0{,}515$ не характеризует совокупность, в которой $\beta = 0$; доверительные пределы для β при 99-процентной надежности будут:

$$\hat{\beta} - t_{01,\, n-2}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_{01,\, n-2}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}, \tag{21.20}$$

или

$$-0{,}515 - 3{,}71 \times 0{,}0959 < \beta < -0{,}515 + 3{,}71 \times 0{,}0959, \quad -0{,}870 < \beta < -0{,}159.$$

Этот интервал не содержит нуля, т. е. коэффициент регрессии β значимо отличается от нуля.

Аналогично дисперсия оценки $\hat{\alpha}$ для α равна

$$\mathrm{Var}(\hat{\alpha}) = \frac{\hat{\sigma}^2_{X \cdot Y}}{n-2}, \tag{21.21}$$

т. е. для приведенного примера в цифрах

$$\mathrm{Var}(\hat{\alpha}) = \frac{1{,}515}{6} = 0{,}2525$$

и

$$\sigma_{\hat{\alpha}} = 0{,}5025.$$

Доверительные пределы могут быть подсчитаны для α

$$\hat{\alpha} - t_{\alpha,\, n-2}\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} < \alpha < \hat{\alpha} + t_{\alpha,\, n-2}\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} \qquad (21.22)$$

или для надежности $P = 0{,}99$ при $t_{01,\,6} = 3{,}71$

$$15{,}399 - 3{,}71 \times 0{,}503 < \alpha < 15{,}388 + 3{,}71 \times 0{,}503;$$

$$13{,}552 < \alpha < 17{,}254.$$

По характеру линии регрессии, изображенной на фиг. 21.6, совершенно ясно, что гипотеза $\alpha = 0$ для данного случая несостоятельна.

21.8. ОШИБКИ ПРЕДСКАЗАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Значение $\sigma^2_{Y\cdot X}$ относится по существу к дисперсии относительно $\overline{Y}$, среднему всех Y_i при среднем значении $(\overline{X})$, и доверительные интервалы, построенные по этой дисперсии, показаны сплошными линиями $\overline{Y} \pm \hat{\sigma}_{Y\cdot X}$ на фиг. 21.6. Иногда бывает интересно рассмотреть точность предсказания значения Y_0 при заданном значении X_0, которое включает ошибки оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$:

$$\mathrm{Ave}(\overline{Y}_0) = \alpha + \beta X_0, \qquad (21.23)$$

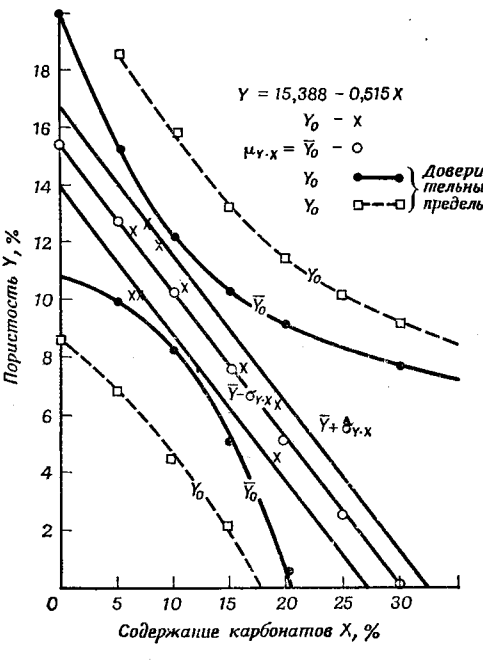
$$\mathrm{Var}(\overline{Y}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 (X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} =$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \right]. \qquad (21.24)$$

При подстановке оценки $\hat{\sigma}^2_{Y\cdot X}$ вместо σ^2 статистика

$$t = \frac{\overline{Y}_0 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0)}{\hat{\sigma}_{Y\cdot X} \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_0 \overline{X})^2}}} \qquad (21.25)$$

распределена по закону Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 2$. Она может быть использована для проверки гипотез о среднем $\alpha + \beta X_0$ для Y_0 при данном X_0. Соответствующим $100(1 - \alpha)$-процентным доверительным интервалом для $\alpha + \beta X_0$ будет выражение



Фиг. 21.6. Доверительные пределы для предсказанного значения Y по регрессионной линии пористости Y в зависимости от содержания карбоната X в песчанике Кау-Ран.

$$\overline{Y}_0 - t_{\alpha,\, n-2}\hat{\sigma}_{Y\cdot X} \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \right]^{1/2} < \alpha + \beta X_0 <$$

$$< \overline{Y}_0 + t_{\alpha,\, n-2}\hat{\sigma}_{Y\cdot X} \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \right]^{1/2}. \qquad (21.26)$$

Доверительные пределы по обе стороны линии регрессии, обозначенные на фиг. 21.6 через Y_0, являются примером этих границ, и можно заметить, что прогноз значительно не соответствует области средних значений $\hat{Y}$ и $\hat{X}$.

С другой стороны, может оказаться, что надо будет определить доверительные пределы для новых значений Y_0 при избранных X_0, для которых дисперсия $\sigma^2_{Y \cdot X}$ отдельных наблюдений должна быть прибавлена к следующему выражению:

$$\mathrm{Var}(Y_0) = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \right]; \tag{21.27}$$

тогда доверительный интервал будет следующим:

$$Y_0 \pm t_{\alpha, n-2} \hat{\sigma}_{Y \cdot X} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_1 - \overline{X})^2} \right]^{1/2}. \tag{21.28}$$

Доверительные интервалы, обозначенные как Y_0, показаны на фиг. 21.6. Единичные наблюдения не предсказываются с достаточной степенью точности; она достигается лишь в том случае, когда количество их становится довольно большим. Кроме того, точность не соответствует данным средним $\overline{Y}$ при $\overline{X}$. Становится ясным, что использование $\hat{\sigma}_{Y \cdot X}$ в качестве оценки погрешности может привести к существенным ошибкам, если интересующие нас измерения отражают отдельные наблюдения Y_i.

21.9. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ «ПРЕДСКАЗАННОГО X»

Довольно часто исследователь с целью установить взаимоотношение между некоторым свойством эталонного объекта и его поведением при эксперименте использует набор стандартов, определенных с очень малой погрешностью; например, интенсивность линии на спектральной пластинке для оценки количества элемента в веществе, интенсивность пика на рентгенограмме для определения количества минерала в смеси или же весовое количество углекислого газа, выделившегося при нагреве карбонатсодержащего образца для оценки количества карбоната. Целью здесь является установление стандартной кривой, и при этом должны быть выполнены требования регрессионной модели. Однако вслед за этим у экспериментатора появляется желание перенести процедуру такой оценки с измерения эталона на новый материал; предсказать, пользуясь полученной эталонной кривой, содержание некоторого элемента или минерала в образце — это пример обращенной оценки, в которой по наблюдаемому значению Y должно быть предсказано значение X. Естественно, что исследователь хочет установить доверительные пределы для этого «предсказанного X». Так как X было выбрано с самого начала, оно представляет собой случайную переменную в вероятностном значении, и так как X не обладает распределением погрешности, ее невозможно оценить непосредственно; существует множество альтернативных возможностей оценки; этот вопрос в статистической литературе является дискуссионным [3, 44, 454]. Исследователь должен быть знаком со всеми способами, ибо каждая модель приспособлена к определенной ситуации [3]. В данном случае, следуя Вильямсу [454] и Браунли [44], задачу можно представить как

$$X_0 = \overline{X} + \frac{\overline{Y}_0' - \alpha}{\beta}, \tag{21.29}$$

где X_0 — предсказанное значение X, соответствующее новому набору Y_j ($j = 1, \ldots, n$), дающему $\overline{Y}_0'$, а уравнение линии регрессии, основанной на n парах Y_{ij}, есть $X_j - Y_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0$. При данных ожидаемых значениях

$\overline{Y}_0 = \mu_{Y \cdot X}$, истинное значение X по регрессии будет ε, а

$$\varepsilon = \overline{X} + \frac{\mu_{Y \cdot X} - \alpha}{\beta}, \tag{21.30}$$

что можно написать в виде

$$\mu_{Y \cdot X} - \alpha - \beta(\varepsilon - \overline{X}) = 0.$$

Тогда дисперсия $\overline{Y}'_0 - \alpha - \beta(\varepsilon - \overline{X})$ примет вид [3]

$$P_2 - P_1 = P(t_1 < t < t_2), \tag{21.31}$$

где P_2, P_1 — вероятностные пределы, а t_1, t_2 — соответствующие значения t-критерия Стьюдента; интервал по ε дает квадратичное выражение по ε как для верхней, так и для нижней границ. Это может быть решено для значений ε, скажем ε_1 и ε_2, путем применения таких выражений, как

$$\varepsilon_2 = \overline{X} + \frac{\hat{\beta}(Y'_0 - \hat{\alpha})}{\hat{\beta}^2 - p^2} - \frac{t_2 \hat{\sigma}_{Y \cdot X}}{\hat{\beta}^2 - p^2}\left[(\hat{\beta}^2 - p^2)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k}\right) + \frac{(\overline{Y}'_0 - \hat{\alpha})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right]^{1/2}$$

и

$$p^2 = \frac{t_2^2 \hat{\sigma}^2_{Y \cdot X}}{\sum (X_1 - \overline{X})^2}. \tag{21.32}$$

Аналогичное выражение для ε_1 содержит t_1 вместо t_2. Дисперсия для коэффициента регрессии $\hat{\beta}$ входит в данное выражение в форме

$$\hat{\beta}^2 - \frac{t_j^2 \hat{\sigma}_{Y \cdot X}}{\sum (X_1 - \overline{X})^2}, \qquad j = 1, 2. \tag{21.33}$$

Если это выражение приближается к нулю, реальных доверительных пределов не существует. Отношение между $\hat{\beta}^2$ и правым членом в выражении (21.33) представляется критическим, поэтому определяем

$$g = \frac{t_j^2 \hat{\sigma}^2_{Y \cdot X}}{\hat{\beta}^2 \sum (X_i - \overline{X})^2}. \tag{21.34}$$

Если $0 < g \ll 1$, можем использовать и такие выражения:

$$\varepsilon_2 \approx \overline{X} + \frac{\overline{Y}'_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} - \frac{t_2 \hat{\sigma}_{Y \cdot X}}{|\hat{\beta}|}\left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \frac{(\overline{Y}'_0 - \hat{\alpha})^2}{\hat{\beta}^2 \sum (X_i - \overline{X})^2}\right]^{1/2} \tag{21.35}$$

и

$$\varepsilon_1 \approx \overline{X} + \frac{\overline{Y}'_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}} - \frac{t_1 \hat{\sigma}_{Y \cdot X}}{|\hat{\beta}|}\left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \frac{(\overline{Y}'_0 - \hat{\alpha})^2}{\hat{\beta}^2 \sum (X_i - \overline{X})^2}\right]^{1/2}$$

как приблизительные пределы для ε, если $g < 0{,}1$ [44]. Заметим, что если мы располагаем только одним наблюдением нового значения Y_0, то $m = 1$ и равенство уменьшится до $1 + {}^1/n$ вместо ${}^1/m + {}^1/n$.

В данном примере предполагается, что произведено определение пористости нового образца из некоторой совокупности. Каково содержание карбоната и доверительных пределов для него? Новое значение Y'_0 равно 11,0% (пористость). Подставляя его в уравнение регрессии $Y = 15{,}388 - 0{,}515X$, получаем значение карбонатности, равное 8,52%. Необходимые цифры для вычисления доверительных пределов следующие:

$$\overline{X} = 10{,}36; \quad Y = 10{,}05; \quad \hat{\sigma}_{Y \cdot X} = 1{,}231; \quad Sx_1^2 = 164{,}6845;$$
$$m = 1; \quad n = 8; \quad Y'_0 = 11{,}0.$$

Теперь можем вычислить величину критерия g при $t=2{,}447$ и числе степеней свободы 6 и P_{05}:

$$g=\frac{t^2_{k-2}\hat{\sigma}^2_{Y\cdot X}}{\hat{\beta}^2 Sx_i^2}=\frac{2{,}447^2\times 1{,}231^2}{(-0{,}515)^2\times 164{,}6845}=\frac{9{,}073692}{43{,}678447}=0{,}208.$$

Итак, мы убедились в неадекватности аппроксимации, однако в целях иллюстрации продолжаем вычисление:

$$\varepsilon_2\approx 10{,}36+\left(11{,}0-\frac{15{,}388}{-0{,}515}\right)-\left(2{,}447-\frac{1{,}231}{0{,}515}\right)\times$$
$$\times\sqrt{1+\frac{1}{8}+\frac{(4{,}388^2)}{(-0{,}515)^2\times 164{,}6845}};$$
$$\varepsilon_1\approx 10{,}36+\left(11{,}0-\frac{15{,}4}{(-0{,}515)}\right)+\left(2{,}447\,\frac{1{,}231}{0{,}515}\right)\times$$
$$\times\sqrt{1+\frac{1}{8}+\frac{(4{,}388^2)}{(-0{,}515)^2\times 164{,}6845}},$$

следовательно, при надежности 0,95 интервал карбонатности будет находиться в пределах от 11,563 до 26,197%, а доверительные пределы, вычисленные по полным равенствам,— от 12,599 до 29,629. Разумеется, оба эти интервала совершенно нереальны, ибо критерий g находится вне диапазона адекватных оценок. Вместо того чтобы уменьшать величину g, надо максимально увеличивать количество наблюдений и их диапазон, так как тем самым будут уменьшаться значения t и, возможно, $\hat{\sigma}_{y\cdot x}$ и увеличиваться величина Sx_i^2.

21.10. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОТСУТСТВИЯ РЕГРЕССИИ С ПОМОЩЬЮ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Когда уравнение регрессии представлено через оценки

$$\overline{Y}_t=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_t+\varepsilon_t,$$

оно сходно со структурным уравнением (18.4), описанным на основе дисперсионного анализа, и в этом случае можно проверить гипотезу равенства нулю коэффициента регрессии с помощью дисперсионного анализа. Полная дисперсия наблюдений Y выражена как

$$\sum_{i=1}^{k}(Y_0-\overline{Y})^2,$$

что можно записать

$$\sum_{i=1}^{k}(Y_0-\overline{Y})^2=\sum_{1}^{k}(Y_0-Y_c)^2+\sum_{1}^{k}(Y_c-\overline{Y})^2, \qquad (21.36)$$

откуда ясно, что эта дисперсия по отношению к среднему составляет отклонения наблюдаемого значения от значения регрессии Y_c плюс отклонения регрессии от среднего; смешанные произведения, как обычно, равны нулю. Если мы рассматриваем взаимоотношения, исходя из отклонений от среднего, т. е. x_i и y_i, то $\alpha=0$ и процедура анализа может быть сведена в табл. 21.2.

Процедура вычисления включает нахождение полной суммы квадратов Sy_i^2 и суммы квадратов, обусловленной регрессией $\hat{\beta}_i^2 Sx_i^2$; остаток находят путем вычисления разности.

Таблица 21.2

Проверка гипотезы равенства нулю коэффициента регрессии путем дисперсионного анализа: $\beta=0$

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Ожидаемые средние квадраты
Регрессия	1	$\sum (Y_c-\overline{Y})^2$	$\frac{SS_R}{1}$	$\sigma_\varepsilon^2+\beta^2\sum (X_i-\overline{X})^2$
Остаток	$k-2$	$\sum (Y_0-Y_c)^2$		
Сумма	$k-1$	$\sum (Y-\overline{Y})^2$	$\frac{SS_\varepsilon}{k-2}$	σ_ε^2

Такой дисперсионный анализ для приведенного примера соотношения пористости Y_i и карбонатности дан в табл. 21.3.

Таблица 21.3

Проверка гипотезы $\beta=0$ для пористости и содержания карбоната в песчаниках Кау-Ран

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Отношение дисперсий
Регрессия	1	43,7093	43,7093	28,849
Остаток	$k-2=6$	9,0907	2,5151	
Сумма	$k-1=7$	52,80		

$F=28{,}849.$

21.11. СРАВНЕНИЕ ДВУХ И БОЛЕЕ ЛИНИЙ РЕГРЕССИИ

Когда имеем два или более набора измерений (возможно из одной генеральной совокупности или из совокупностей), в которых функциональные взаимоотношения между двумя переменными, видимо, одинаковы, возникает необходимость проверить, различаются или нет линии регрессии, определенные по каждому набору данных в отдельности. Здесь может возникнуть несколько вопросов, например, параллельны ли эти линии, т. е. равны ли их наклоны ($\beta_1=\beta_2=\beta$) независимо от величины отрезков, отсекаемых на оси координат, совпадают ли эти линии ($\beta_1=\beta_2=\beta$ и $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$). Если наклоны линий различны ($\beta_1\neq\beta_2$), вопрос о равенстве отсекаемых отрезков отпадает.

Если мы вначале рассмотрим вопрос о сравнении наклонов, то можем не рассматривать отсекаемый отрезок, приняв среднее значение двух переменных за начало координат и выражая данные наблюдений в новой системе координат как отклонения от соответствующих средних значений [430]. Так как данные согласовываются определением каждой линии наименьших квадратов путем минимизации сумм квадратов этих отклонений, можно утверждать, что, если два набора данных относятся к одной совокупности с общей линией регрессии, остаточная сумма квадратов из общей линии регрессии будет равна сумме остаточных сумм квадратов от индивидуальных

линий за вычетом выборочной погрешности. С другой стороны, если $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta$, остаточные суммы квадратов общей линии будут включать суммы разностей по индивидуальным регрессиям.

Остаточные суммы квадратов принято вычислять по каждой индивидуальной линии регрессии, а затем суммировать их. Если имеем k наборов данных, это можно записать в следующем виде:

$$\left(S_1y_i^2-\frac{S_ix_iy_i}{S_1x_i^2}\right)+\left(S_2y_i^2-\frac{S_2x_iy_i}{S_2x_i^2}\right)+\ldots\left(S_ky_i^2-\frac{S_kx_iy_i}{S_kx_i^2}\right) \qquad (21.37)$$

с числом степеней свободы

$$(n-2)+(n_2-2)+\ldots+(n_k-2)=\sum_{i=1}^{k}k_i-2k.$$

С другой стороны, остаточная сумма квадратов, полученная из общей линии регрессии, выражается как

$$S_1y_i^2+S_2y_i^2+\ldots+S_ky_i^2-\frac{S_1x_iy_i+S_2x_iy_i+\ldots+S_1x_iy_i}{S_1x_i^2+\ldots+S_kx_i^2} \qquad (21.38)$$

с числом степеней свободы

$$\sum_{i=1}^{k}n_i-k-1,$$

т. е. $n-1$ по каждому набору данных минус 1 из общего коэффициента регрессии. К сожалению, эти две остаточные дисперсии не независимы, однако, найдя их разность наряду с разностью в числе степеней свободы, можно сравнить эту дисперсию выражения (21.37) с разностью в остаточных суммах в форме отношения дисперсий (табл. 21.4).

Таблица 21.4

Проверка гипотезы равенства двух коэффициентов регрессии

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Суммы квадратов	Средний квадрат
Остаток по общей линии	$n-k-1$	SS_{tr}	
Остаток по индивидуальным линиям	$n-2k$	SS_1	$\frac{SS}{n-2k}$
Разность	$k-1$	$SS_{tr}-SS_1=SS_d$	$\frac{SS_d}{k-1}$

В таком случае отношение дисперсий выразится как

$$F=\frac{SS_d/(k-1)}{SS_1(n-2k)},$$

с $\nu_1 = k-1$, $\nu_2 = n-2k$ степенями свободы.

Например, изучая в песчаниках Кау-Ран зависимость между пористостью X в процентах и логарифмом проницаемости Y в миллидарси по данным четырех кернов из четырех скважин, мы хотим определить, сохраняется ли соотношение между пористостью и проницаемостью во всех четырех образцах керна. Необходимые данные приведены в табл. 21.5, а линии регрессии и соответствующие суммы квадратов — в табл. 21.6. В табл. 21.7 приводится в обобщенном виде результат дисперсионного анализа, проведенного с целью определения адекватности линий регрессии; отношение дисперсий, контролирующее разности, $F = 1{,}874/0{,}3138 = 3{,}784$, в то время

Таблица 21.5

Сопоставление сумм и сумм квадратов простой линейной регрессии проницаемости (Y) и пористости (X) образцов керна

$X = 10\,(P - 7)$; $Y = \log\,(10k)$, P — пористость, %, k — проницаемость, *мдарси*

Скважина	Номер	$\sum X_i$	$\overline{X}$	$\sum Y_i$	$\overline{Y}$	$\sum X_i^2$	$\sum Y_i^2$	$\sum X_i Y_i$	Sx_i^2	Sy_i^2	$Sx_i y_i$	$\frac{Sx_i y_i}{Sx_i^2}$
17	19	1146	60,316	21,131	1112	75,422	33,056819	1451,494	6300,105	9,555811	176,961	0,028089
18	19	1228	64,632	31,713	1669	86,514	62,782879	2233,367	7146,421	9,850544	183,706	0,025706
19	18	1168	64,889	27,312	1517	90,012	68,760454	2326,508	14221,778	27,319046	554,263	0,038973
20	14	936	66,857	21,550	1539	67,492	39,015764	1535,284	4913,714	5,844157	94,513	0,019235
По 4 скважинам	70	4478	63,971	101,706	1453	319,440	203,615916	7546,653	32975,943	55,842910	1040,374886	0,031550
Во всех 4 скважинах									32582,018	52,569558	1009,443	0,030982

Таблица 21.6

Анализ регрессионных зависимостей между проницаемостью и пористостью в песчаниках Кау-Ран, Санта-Мария, Западная Виргиния

Скважина	N	Регрессионная зависимость	Число степеней свободы	Сумма квадратов по регрессии	Число степеней свободы	Остаточная сумма квадратов	Отношение дисперсий, F	Уровень значимости
17	19	$Y_1 = 0{,}028X_1 - 0{,}582$	1	4,971	17	4,585	18,4	$P < 0{,}001$
18	19	$Y_2 = 0{,}025X_2 + 0{,}146$	1	4,722	17	5,128	15,68	$P < 0{,}01$
19	18	$Y_3 = 0{.}039X_3 - 1{,}012$	1	21,601	16	5,718	60,43	$P < 0{,}001$
20	14	$Y_4 = 0{,}019X_4 + 0{,}253$	1	1,818	12	4,026	5,419	$P < 0{,}05$
Все 4 скважины	70	$Y = 0{,}032X - 0{,}565$	1	32,824	68	23,019	96,83	$P < 0{,}001$

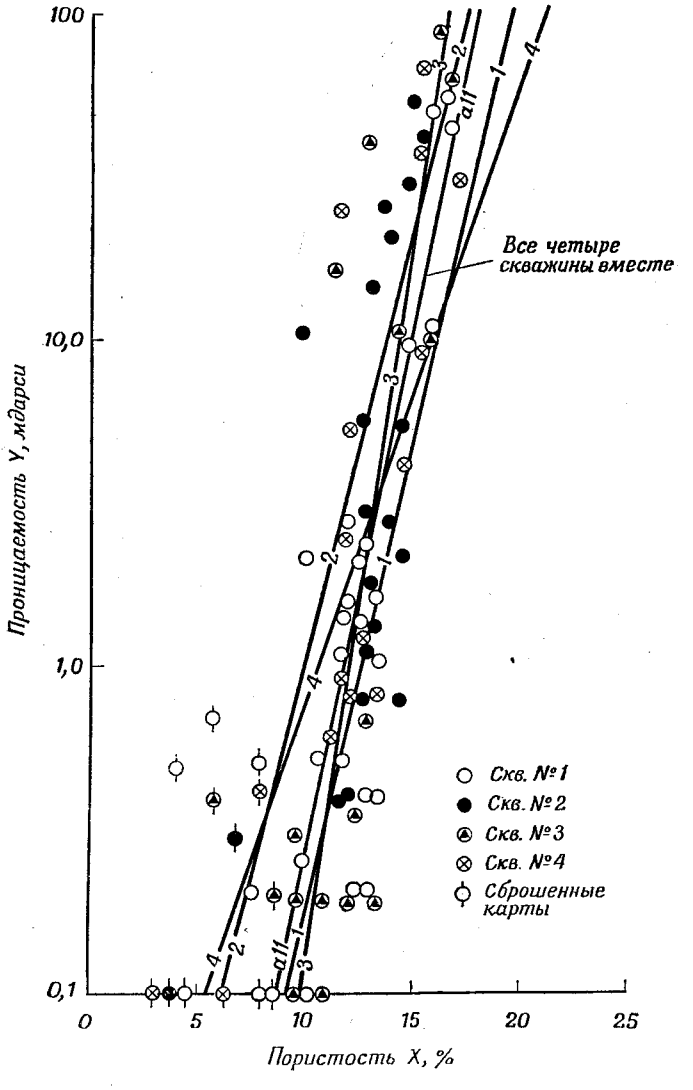
$$\frac{SS_{regr}}{SS_{tot}}$$

Таблица 21.7

Дисперсионный анализ между регрессионными линиями и в пределах регрессионных линий пористости и проницаемости керна песчаников Кау-Ран из четырех скважин

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средние квадраты
Остаточные дисперсии по общей линии	65	23,0196	
Остаточные дисперсии по отдельным линиям	62	19,4575	0,3138
Разность	3	3,5621	1,1874

как табличное значение $F_{05,\,3,\,62} = 2{,}76$, что приводит к отклонению гипотезы общей линии регрессии. По индивидуальным линиям, приведенным на фиг. 21.7, видно, что соотношение между пористостью и проницаемостью



Фиг. 21.7. Соотношение пористости и проницаемости в керне из четырех скважин в песчаниках Кау-Ран.

в скважинах 1, 2, 3 одинаково, но оно отличается от данных скважины 4, и это подтверждается при дальнейшей проверке. Более того, так как данные значения, приводящие к различиям в наклоне линии регрессии и характеризующие скважину 4, заключены главным образом в области 0,1 *мдарси*, представляется вероятным, что расхождение обусловлено трудностями определения проницаемости керна при таких низких ее значениях. Следовательно, возможно, что взаимоотношения между пористостью и проницаемостью в исследованном керне из песчаников Кау-Ран все же могут быть выражены общей линией регрессии.

21.12. СИЛА СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ

В предыдущих разделах данной главы была рассмотрена модель, в которой Y является функцией, а X — аргументом. Однако иногда у нас нет возможности определить независимую переменную, так как обе переменные изменяются случайно. В этом случае вместо регрессии лучше применить такой аналитический инструмент, как корреляция. Арифметические процедуры для получения обеих статистических оценок весьма сходны. Фактически регрессия и корреляция — тесно связанные понятия, часто используемые совместно. Надо все же напомнить, что совокупности, к которым применяются эти способы оценки, имеют различный характер: в регрессии только одна случайная переменная, в корреляции — две. Кроме того, в последней главный упор делается на простую линейную модель, хотя корреляция, как и регрессия, может применяться при наличии более чем двух переменных и множественная линейная корреляция возможна при таких же отношениях, как и множественная линейная регрессия; простая корреляция равноценна простой регрессии. К тому же это понятие может быть распространено и на нелинейные связи путем применения корреляционного отношения [430]. Понятия о корреляции, регрессии и дисперсионном анализе фактически могут рассматриваться как дополнительный аппарат при анализе системы исходных данных, и, когда проблема корреляции становится многомерной, обычно эти понятия используются совместно.

Предположим, мы хотим оценить среднее для некоторой случайной величины Y. В общем случае мы найдем $\overline{Y}$, а как меру надежности затем вычислим стандартное отклонение для Y, т. е. σ_Y. Далее, если известно отношение Y к другой переменной X, т. е. уравнение $Y = \alpha + \beta X$, можно получить вторую независимую оценку Y по уравнению регрессии. Надежность этого среднего будет выражена стандартной погрешностью оценки $\sigma_{Y \cdot X}$. Другими словами,

$$\sigma_Y^2 = \frac{(Y_0 - \overline{Y})^2}{N}$$

и

$$\sigma_{Y \cdot X}^2 = \frac{(Y_0 - Y_c)^2}{N} .$$

Теперь можно сравнить надежность этих двух оценок путем сравнения $\sigma_{Y \cdot X}^2$ с σ_Y^2; если $\sigma_{Y \cdot X}^2$ так же значительно, как σ_Y^2, то можно сказать, что регрессия ничего не прибавила к той информации, которой мы располагали. Если же $\sigma_{Y \cdot X}^2$ меньше σ_Y^2, регрессия дает лучшую оценку, чем одна переменная Y. Такое сравнение можно выразить следующим образом:

$$\frac{\sigma_{Y \cdot X}^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sum (Y_0 - Y_c)^2}{\sum (Y_0 - \overline{Y})^2} . \qquad (21.39)$$

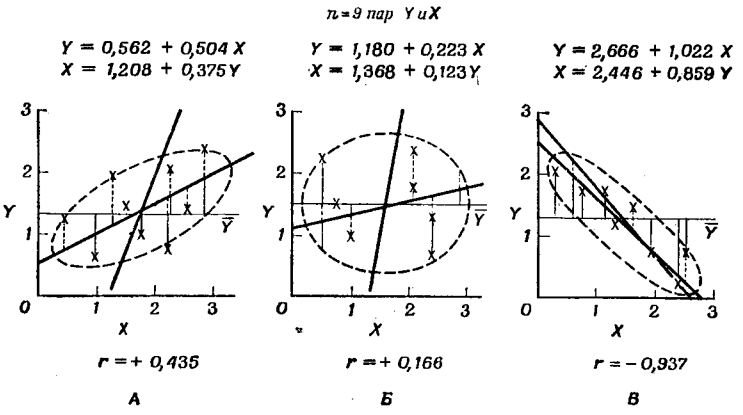
Отношение $\sigma_{Y \cdot X}^2 / \sigma_Y^2$, разумеется, безразмерно подобно коэффициенту изменчивости CV.

В качестве модельного примера на фиг. 21.8 показаны три серии данных, графически иллюстрирующих отношения между этими двумя дисперсиями. Например, отклонения значения каждого наблюдения Y_0 от среднего $\overline{Y}$ показаны сплошной линией, а отклонения Y_0 от линии регрессии Y_c — пунктиром. Можно видеть, что $\sum (Y_0 - Y_c)^2$ может быть почти равным $\sum (Y_0 - \overline{Y})^2$, как это получается на фиг. 21.8, *Б*, или меньше $\sum (Y_0 - \overline{Y})^2$, как на фиг. 21.8, *А* и *В*, но оно никогда не превышает $\sum (Y_0 - \overline{Y})^2$. Следовательно, так как наблюдения рассеяны около линии

регрессии, отношение

$$\frac{\sigma^2_{Y\cdot X}}{\sigma^2_Y} = \frac{\sum (Y_0 - Y_c)^2}{(Y_0 - \bar{Y})^2}$$

уменьшается и данное распределение наблюдений получает тенденцию к рассеянию по кругу (фиг. 21.8, *Б*) в тех случаях, когда Y и X не связаны линейной зависимостью, и эллиптически, когда изменения Y тесно связаны с изме-



Ф и г. 21.8. Корреляция между переменными.

нениями X (фиг. 21.8, *В*). Более удобно использовать параметр, возрастающий с увеличением связи, поэтому определяем квадрат взаимной корреляции ρ^2 как

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2_{Y\cdot X}}{\sigma^2_Y} = 1 - \frac{\sum (Y_0 - Y_c)^2}{\sum (Y_0 - \bar{Y})^2}, \qquad (21.40)$$

и тогда коэффициент корреляции $\rho = \sqrt{\rho^2}$. Соответствующими статистическими оценками являются r^2 и r; $r = (1 - \hat{\sigma}^2_{Y\cdot X}/\hat{\sigma}^2_Y)^{1/2}$. Из выражения (21.40) следует, что если $\sigma^2_{Y\cdot X} = \sigma^2_Y$, то $\rho^2 = 1 - 1 = 0$, потому что, когда наблюдаемые значения оказываются близкими к линии регрессии, значение $\sigma^2_{Y\cdot X}$ становится очень малым по сравнению с σ^2_Y, а ρ^2 приближается к единице. На фиг. 21.8 знак ρ может быть как положительным, так и отрицательным: от -1 до $+1$, а коэффициент корреляции $\rho_{Y\cdot X}$ имеет тот же знак, что и соответствующий коэффициент регрессии $\beta_{Y\cdot X}$.

Кроме того, следует отметить, что на фиг. 21.8 обнаружена связь между коэффициентами регрессии и корреляции; например, при высокой корреляции, если $\rho = -0{,}937$, как на фиг. 21.8, *В*, регрессионные линии почти сходятся, и угол θ между ними весьма мал; при низкой корреляции, если $\rho = 0{,}166$, как на фиг. 21.8, *Б*, линии стремятся широко разойтись, а угол θ приблизится к 90°. Когда регрессионные линии взаимно перпендикулярны, $\rho = 0$ и значения наблюдений линейно независимы; фактически $\rho = \cos\theta$. Коэффициент регрессии определяется как $\beta_{Y\cdot X} = Sx_iy_i/Sx_i^2$, а $\beta_{X\cdot Y} = Sx_iy_i/Sy_i^2$. Из этого следует, что $\beta_{Y\cdot X}\cdot\beta_{X\cdot Y} = (Sx_iy_i)^2/Sx_i^2Sy_i^2 = \rho^2$, или что коэффициент ρ — среднее геометрическое коэффициентов регрессии. При использовании коэффициента корреляции в качестве меры связи требуется информативно изучить квадрат взаимной корреляции, так как он эквивалентен дисперсии и более непосредственно отражает степень связи. Например, дан коэффициент корреляции $\rho = 0{,}95$, $\rho^2 = 0{,}9025$; в этом случае можно считать, что 90% изменений для переменных будут

общими, поскольку $(1 - \rho^2)$ примерно равно 10; иначе говоря, 10% связей «необъяснимы». Квадрат же взаимной корреляции — гораздо более реальная мера степени связи, чем коэффициент корреляции, и, например, при $\rho = 0{,}6$ общими становятся только 36% изменчивости $(100\ \rho^2)$ для обеих переменных, в то время как $100\ (1 - \rho)$, или 64%, остаются «необъяснимыми». Для того чтобы можно было утверждать, что связь в данном случае тесная, необходимо очень высокое значение ρ. Разумеется, то же относится и к выборочной оценке r коэффициента корреляции (ρ).

21.13. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Поскольку коэффициент корреляции тесно связан с регрессией, не удивительно, что арифметические процедуры, определяющие значение r, очень сходны с теми процедурами, которыми определяется $\hat{\beta}_{Y \cdot X}$. Например, в обоих случаях требуется вычислить $\sum X_i$, $\sum Y_i$, средние, суммы квадратов $\sum X_i^2$ и $\sum Y_i^2$ и произведения $\sum X_i Y_i$; в обоих случаях также удобно пользоваться исправленными суммами квадратов и произведениями Sx_i^2, Sy_i^2 и $Sx_i y_i$. Коэффициент корреляции может быть вычислен непосредственно по выражению

$$\rho = \frac{Sx_i y_i}{(Sx_i^2 Sy_i^2)^{1/2}}, \tag{21.41}$$

или как корень квадратный из квадрата смешанной корреляции ρ^2 —

$$\rho^2 = \frac{(Sx_i y_i)^2}{Sx_i^2 Sy_i^2}. \tag{21.42}$$

Конечно, также в обоих случаях при использовании системы наблюдений, содержащей случайные переменные, вычисления дают соответственные статистические оценки r и r^2.

21.14. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ РАВЕНСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ НУЛЮ

Так как серии наблюдений, получаемые экспериментально, являются выборками из некоторой совокупности, значимость вычисленных статистических показателей, прежде чем их положат в основу заключений, должна быть проверена. Например, если $r = 0{,}166$ (фиг. 21.8, *Б*), что высчитано по девяти парам наблюдений Y, X, мы можем задаться вопросом, действительно ли данная выборка случайна и действительно ли она получена из совокупности с $\rho = 0$. Выдвинув нулевую гипотезу, согласно которой имеющиеся девять пар наблюдений представляют собой случайную выборку из совокупности с $\rho = 0$, можем воспользоваться таблицей, где приводятся вероятности, соответствующие значениям r при $\rho = 0$ и данном объеме выборки [15]; число степеней свободы для r то же, что и для коэффициента регрессии: $\nu = n - 2$. В данном примере $\nu = 9 - 2 = 7$; тогда при $r = 0{,}666$ или более, взятом из таблиц, имеем вероятность 0,05, а при $r = 0{,}798$ или более вероятность 0,01. Очевидно, в примере, приведенном на фиг. 21.8, *Б*, такая выборка может относиться к совокупности с $\rho = 0$. Аналогично коэффициент r, равный 0,435 (фиг. 21.8, *А*), не способствует получению корреляции, отличной от нуля. Действительно, коэффициент $r = 0{,}435$ при вероятности 0,05 мог бы быть значимым по крайней мере только при 21 паре наблюдений. Далее, в примере фиг. 21.8, *В*, где $r = -0{,}937$ и $\nu = 7$ при 1-процентном уровне значимости, гипотеза, что $\rho = 0$, отвергается; иными словами, если эта серия из девяти пар наблюдений представляет

случайную выборку из совокупности, для которой $\rho = 0$, то следует ожидать, что значение $r = -0{,}937$ встретится намного реже, чем один раз на 100 таких выборок.

Такая проверка гипотезы $\rho = 0$ основана на том, что выборочные коэффициенты r из совокупности с $\rho = 0$ распределены симметрично и приблизительно нормально вокруг среднего $\rho = 0$, так что соответствующий t-критерий Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 2$ [127] выразится как

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}. \tag{21.43}$$

Во всех остальных случаях распределение r вокруг соответствующих им значений ρ обладает резко выраженной асимметрией, которая возрастает по мере увеличения ρ. Фишер [127] установил способ перехода от ρ к величине z, дающий почти нормальное распределение z при всех значениях ρ с зависимостью дисперсии z только от степеней свободы. Другими словами, если выборочное значение r преобразовано в z, то z нормально распределено со средним $\bar{z}$ с дисперсией $\sigma_z^2 = 1/n - 3$, где n — число пар в данной выборке. Это может быть принято за основу проверки гипотез и для построения доверительных пределов.

Преобразование производится по формуле

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r},$$

или, если применяются обычные логарифмы,

$$z = 1{,}1573\log\frac{1+r}{1-r}. \tag{21.44}$$

По табл. (21.14) (см. в конце главы) такое преобразование производить легче.

Для примера можно вначале сопоставить два коэффициента корреляции, полученных при изучении взаимоотношений между размерами зерен (ϕ-медиана, Md_ϕ) и их сортированностью (ϕ-квантилей PD_ϕ) в кернах миоценовых осадков из скважин C и F, южный Тринидад [150]. Нулевая гипотеза постулирует, что две представленные выборки исходных данных случайны и что они отобраны из единой совокупности; по ним получены $r = 0{,}5220$ и $r = 0{,}9207$, которые вычислены по 29 и 50 парам наблюдений соответственно. Вычисления представлены в табл. 21.8.

Таблица 21.8

Сопоставление двух коэффициентов корреляции

Скважина	z	n	$\nu = n - 3$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1+r}{1-r}$	$\log\frac{1+r}{1-r}$	$\bar{z}$
C	0,5220	29	26	0,0370	3,1841	0,50298	0,5791
F	0,9207	50	47	0,0280	24,2207	1,38418	1,5936

Стандартное отклонение разности между двумя значениями выражается как

$$\hat{\sigma}^2_{z_1-z_2} = \frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}, \tag{21.45}$$

или

$$\hat{\sigma}^2_{z_1-z_2} = 0{,}0370 + 0{,}0208 = 0{,}2404;$$

тогда

$$t = \frac{z_1 - z_2}{\hat{\sigma}_{z_1-z_2}} = \frac{1{,}0145}{0{,}4904} = 2{,}06.$$

Эта величина t в 2,06 раза превышает свое стандартное отклонение, что весьма значительно (t, равное двойному стандартному отклонению, всегда считается пределом, за которым разность уже рассматривается как значительно превышающая стандартную погрешность).

С помощью такой же процедуры мы могли бы построить и доверительный интервал для коэффициента корреляции. Так, по выборке объемом 531 пары ϕ-медиан и ϕ-квантилей, получаем $r = 9{,}7585$ [150].

В этом случае

$$z = 1{,}1513 \log \frac{1+z}{1-z} = 1{,}1513 \log \frac{1{,}7585}{0{,}2415} = 1{,}1513 \log 7{,}2816 = 0{,}9927$$

и $\hat{\sigma}_z = \frac{1}{528^{1/2}} = 0{,}0435.$

Тогда доверительный интервал при надежности 0,95 будет

$$z \pm 2\hat{\sigma}_z = 0{,}9927 \pm 0{,}0870,$$

или

$$1{,}0797 > \zeta > 0{,}9057; \quad 0{,}7932 > \rho > 0{,}7196,$$

где ζ и ρ соответствуют истинным значениям. Доверительный интервал при надежности 0,99 будет

$$1{,}2537 > \zeta > 0{,}7317, \quad 0{,}8403 > \rho > 0{,}6241.$$

Любое значение r за пределами этого интервала отличается от того значения, которое получено для соответствующего вероятностного уровня. При сравнении второго значения r надо использовать то число степеней свободы, которое соответствует второму r и первому в качестве ρ.

Наконец, когда уже получены некоторые наборы r, часто бывает необходимым проверить, действительно ли все эти значения r получены из одной и той же однородной совокупности, и если это так, то как их лучше всего объединить в единое значение r с целью более эффективной оценки коэффициента корреляции данной совокупности.

Здесь вновь можно использовать z-преобразование, причем различные значения взвешивают путем обращения их дисперсии, а взвешенные значения z преобразуют в r. Все эти операции лучше всего сводить в таблицы. В табл. 21.9 представлены четыре набора выборочных пар, случайно отобран-

Таблица 21.9

Проверка гипотезы однородности нескольких коэффициентов корреляции и определение наилучшей оценки среднего значения

Количество образцов	$n-3$	r	z	Взвешенное z, $(n-3)\,z$	Взвешенный квадрат, $(n-3)\,z^2$
15	12	0,4524	0,4877	5,8524	2,8542
20	17	0,5077	0,5596	9,5132	5,3236
25	22	0,4320	0,4623	10,1706	4,7019
30	27	0,4054	0,4301	11,6127	4,9946
90	78			37,1489	17.8743
			$\bar{z} = 0{,}4763$		$\bar{r} = 0{,}4432$

ных из 69 пар для изучения сортированности по размерам [150]; теперь надо проверить, относятся ли эти значения к одной и той же совокупности.

Вспомнив, что χ^2 является распределением сумм квадратов нормальных отклонений со средним нуль и единичным средним квадратичным отклонением (гл. 17), можем отметить, что z — нормальное отклонение со средним квадратичным отклонением $1/\sqrt{n-3}$; поэтому выражение $z\sqrt{n-3}$ и представляет собой характеристику такого нормального отклонения.

Предположим, что мы хотим определить, имеет ли данный агрегат тенденцию образовывать закономерную ассоциацию, несмотря на то, что в каждом случае корреляция незначительна. Для этого можно использовать χ^2:

$$\chi^2 = z^2 \sum (n-3) \tag{21.46}$$

с числом степеней свободы, равным количеству выборок. В данном случае $\nu = 4$ и $\chi^2 = 17{,}87$; тогда $0{,}01 > P > 0{,}001$. Эти цифры дают основание считать, что связь имеется.

С помощью критерия χ^2 можно также проверить представленные выборочные коэффициенты корреляции на однородность, т. е. проверить, относятся ли они к одной генеральной совокупности. В этом случае χ^2 определяется следующим выражением [409, 430]:

$$\chi^2 = \sum [(z-\bar{z})^2 (n-3)] = \sum (n-3)\, z^2 - [\sum (n-3)\, z]\, \bar{z} \tag{21.47}$$

с числом степеней свободы на единицу меньшим, чем число выборок, для которых определяется r. Из табл. 21.9 находим, что

$$\chi^2 = 17{,}8743 - 37{,}1489 \times 0{,}4763 = 17{,}8743 - 17{,}6940 =$$
$$= 0{,}1803, \quad \nu = 3, \quad 0{,}99 > P > 0{,}98.$$

Эти выборочные значения гораздо однороднее, чем можно было бы ожидать в среднем по одной и той же совокупности.

В качестве дальнейшей иллюстрации рассмотрим некоторые выводы с точки зрения коэффициентов корреляции, приведенных в табл. 21.10 [150].

Таблица 21.10

Проверка гипотезы однородности набора коэффициентов корреляции размеров с отсортированностью по размерам

Скважина	Количество образцов	$n-3$	r	z	$(n-3)\,z$	$(n-3)\,z^2$
C	29	26	0,5220	0,5791	15,0566	8,7193
E	50	47	0,7423	0,9556	44,9132	42,9191
F	50	47	0,9207	1,5936	74,8992	119,3594
K	37	34	0,6264	0,7355	25,0070	18,3926
	166	154			159,8760	189,3904

$\bar{z} = 1{,}0382$

$\chi^2 = 189{,}3904 - 159{,}876 \times 1{,}0382$
$= 189{,}3904 - 165{,}9833 = 23{,}4071 \qquad \nu = 3$
$p < 0{,}001$

Предполагается, что тенденции C, E, F и K являются сходными. Это нужно проверить.

Прежде всего заметим, что эти значения не совместные, а весьма расходятся: величина этих расхождений зависит от количества сравниваемых пар в выборках. Важно то, что веса $(n-3)$ влияют на значение z (т. е. r) так же, как величина z (или r) сама по себе.

При этом же наборе величин по скважинам D и H вычисленные коэффициенты корреляции не дают оснований предполагать, что выборки получены из совокупности, в которой $\rho = 0$. Но предположим, что эти выборки получены из одной и той же совокупности; возникает вопрос, соответствуют ли они по своим данным друг другу? По табл. 21.11

Таблица 21.11

Проверка гипотезы о равенстве двух коэффициентов корреляции

Скважина	Количество образцов	Число степеней свободы $n-3$	r	z	$(n-3)\,z$	$(n=3)\,z^2$
D	36	33	0,0405	0,0405	1,3365	0,0541
H	31	28	0,3494	0,3648	10,2144	3,7262
		61	$\bar{z}=0,1894$	$\bar{r}=0,1913$		

$$\chi^2 = \sum [z^2 (n-3)] = 3,7803 \qquad \text{при} \qquad \nu = 2,$$
$$0,20 > P > 0,10.$$

По этим цифрам у нас еще нет основания полагать наличие связи. После проверки на несовместимость получим $\chi^2 = 0,5926$ при $\nu = 1$ и $50 > P > 30$.

По принципу гидравлической эквивалентности [358] (см. также стр. 184) минералы со сходными плотностью и габитусом при переносе в жидкой среде обнаруживают сходное поведение. Поэтому в общем случае можно ожидать, что изменения величин относительных содержаний амфиболов и пироксенов будут более сходны, чем для амфиболов и гранатов. Рассел [377] проанализировал 62 образца песков реки Миссисипи и вычислил коэффициент корреляции (табл. 21.12) между относительными количествами

Таблица 21.12

Зависимость между содержанием амфибола, пироксена и граната в песках реки Миссисипи [377]

Амфибол, X		Пироксен, Y_1 r_{y_1x} 0,7822		Гранат, Y_2 r_{y_2x} 0,14410	
n	$n-3$	r	z	$z_1 - z_2$	$\frac{1}{n-3}$
62	59	0,7882	1,0667		0,0169
62	69	0,4110	0,4723	0,5944	0,0169

амфиболов и пироксенов, амфиболов и гранатов. При проверке гипотезы $\rho = 0$ по этим двум коэффициентам оказалось, что $\rho \neq 0$, так как $P < 0,001$; следовательно, оба коэффициента можно считать вполне реальными. Прослеживая этапы, представленные двумя нижними рядами табл. 12.12, можно проверить, отличаются ли эти коэффициенты один от другого.

Стандартная погрешность разности $z_1 - z_2$ оценивается как

$$\hat{\sigma}_{z_1 z_2} = \left(\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}\right)^{1/2} = 0,0338 = 0,1838.$$

Из этого следует, что $t = (z_1 - z_2)/\hat{\sigma}_{z_1 - z_2} = 0,5944/0,1838 = 3,23$. Ввиду того что такое значение t может быть получено 14 раз на 10 000 случаев, мы отвергаем гипотезу, согласно которой эти два выборочных коэффициен-

Коэффициенты корреляции, оценивающие связь между петрографическими

Свойство	p	(1)	(2)	(3)	(4)
Кварц	(1)	1,0	—0,2303	—0,2558	—0,4406**
Обломки пород	(2)		1,0	—0,5054**	—0,5117**
Кремень	(3)			1,0	0,3815
Матрикс	(4)				1,0
Размер $\overline{X}_{a\phi}$	(5)				
Сортировка $\hat{\sigma}_{a\phi}$	(6)				
Размер $\overline{X}_{b\phi}$	(7)				
Сортировка $\hat{\sigma}_{b\phi}$	(8)				
Ориентация $\hat{\sigma}^\circ$	(9)				
Пористость	(10)				
Проницаемость керна	(11)				

Примечание. $n = 33$, следовательно, критическое значение r при уровне значимости 0,05 равно

та r основаны на данных по случайным выборкам из одной и той же совокупности. Очевидно, изменения содержаний амфиболов более тесно связаны с изменениями содержаний пироксена (в общем $r^2 = 62\%$), чем с изменениями содержаний граната (здесь в общем $r^2 = 19\%$). Этого следовало ожидать и по принципу гидравлической эквивалентности. Такая проверка фактически дает довольно приближенные результаты вследствие того, что изменчивость данных, выраженных в процентах, связана с постоянством сумм. Малые процентные отношения изменяются меньше, чем большие, поэтому их дисперсии обычно существенно зависят от другой случайной величины; в итоге нарушается требование однородности дисперсии, лежащее в основе простой корреляции.

21.15. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА

При изучении горной породы принято изучать ее состав путем подсчета некоторых составных элементов в выбранных нами точках и оценивать изменения соотношений этих элементов, например в четырех или пяти классах, после чего можно приступить к измерению кварцевых зерен, а также их отсортированности по размерам. Если изучаются размеры по двум осям — длинной a и короткой b, то соотношение этих размеров может дать представление о габитусе кварцевых зерен. Принято также замерять ориентацию и характер упаковки зерен, а также плотность, пористость и проницаемость породы. Когда такие измерения проведены на n образцах, их можно представить в виде матрицы порядка $p \times n$, которая будет содержать p оценок свойств по n образцам. Первый этап свертывания этой информации — преобразование матрицы наблюдений (которая получается прямоугольной, если $n \neq p$) в матрицу коэффициентов корреляции [167, 172, 177]. Например, пески Мэкстон (субграувакки миссисипия, Западная Виргиния) были изучены по одиннадцати свойствам на 33 кернах. По исходной матрице порядка 11×33 была вычислена матрица коэффициентов корреляции 11×11, которая приведена в табл. 12.13. Эта матрица симметрична и квадратна, поэтому на ней показана только половина полученных коэффициентов.

Другая важная характеристика такой корреляционной матрицы заключается в том, что значения переменных в ней преобразованы так, что каждое среднее равняется нулю ($\overline{X}_i = 0$), а каждая дисперсия — единице ($\hat{\sigma}^2 = 1$).

Таблица 21.13

и коллекторскими свойствами в песчаниках Макстон, Западная Виргиния

(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
—0,1864	—0,0481	—0,1473	0,0492	—0,2249	0,0442	0,0961
—0,5802**	0,5549**	—0,5815*	0,4267*	0,5340**	0,7023**	0,5751**
0,3417	—0,3224	0,3362	—0,3452*	—0,1903	—0,6064**	—0,6784**
0,8113	—0,3465	0,7808**	—0,2742	—0,4710**	—0,6671	—0,6174**
1,0	0,2625	0,9931**	—0,2550	—0,5580**	—0,7094**	—0,6167**
	1,0	—0,2762	—0,7236**	0,2412	0,4156*	0,3858*
		1,0	0,2798	—0,5885**	—0,7004**	—0,6045**
			1,0	0,1723	0,1848	0,2171
				1,0	0,4773**	0,3061
					1,0	0,8496**
						1,0

0,344; а при уровне 0,01 равно 0,441.

В общем можно сказать, что корреляционная матрица — это отправная точка для многочисленных процедур многомерного анализа [167, 172, 177, 344].

Перечислим некоторые характерные черты приведенной таблицы, особенно те, с которыми мы имеем дело при петрографическом анализе. 1. Корреляция переменных, оценивающая изменчивость состава, зависит, по крайней мере частично, от того, что сумма этих переменных равна 100%. Чейс рассмотрел эффект такого ограничения и показал, что этот эффект выражается в ложной корреляции, возникающей среди подобных переменных [56, 65, 436]. 2. Из предыдущего известно, что измерения осей кварцевых зерен обычно коррелируются на высоком уровне, в частности, когда оперируют средними значениями (см., например гл. 7). Аналогично коррелируют и стандартные отклонения; с этой целью их приводят к значениям коэффициентов корреляции от 0,6 до 0,7. 3. Известно также, что средние значения редко зависят от стандартных отклонений [164, 167, 170, 319, 399]. 4. Во многих случаях установлено, что по образцам керна коэффициент корреляции пористости с проницаемостью колеблется от 0,65 до 0,90 (r^2 = от 40 до 80%).

Необходимо добавить, что коэффициенты корреляции, близкие нулю, следует интерпретировать весьма осторожно. Вследствие того что взаимоотношения переменных оказываются весьма сложными, измерения свойств довольно часто становятся взаимосвязанными и создается впечатление, что некоторые свойства находятся в зависимости. Такие отношения, выражаемые коэффициентами корреляции, близкими нулю, могут быть какими угодно, только не простыми и очевидными. Например, если относительное количество кварца связано с размерами кварцевых зерен по длинной оси a, оно может быть также связано и с размерами коротких осей b, так как a и b тесно связаны между собой. Аналогично количество связующей массы и (или) цемента может быть обратно пропорционально упаковке, выражаемой через число контактов между кварцевыми зернами, так как по мере возрастания объема связующей массы относительное количество кварца падает, и контакты между кварцевыми зернами встречаются менее часто (см., например, работы [113, 164]). Так как сумма изучаемых составных частей породы принята за постоянную величину, то, естественно, увеличение содержания одного компонента вызывает изменение содержания другого. Тем не менее составление матрицы корреляционных коэффициентов нулевого порядка является важным этапом при анализе изменчивости

в наборе исходных данных и может весьма успешно применяться для изучения изменчивости, возникающей при изменении содержания того или иного компонента породы.

21.16. ЧАСТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Измерение силы связи можно до некоторой степени улучшить путем использования коэффициентов частной корреляции, причем связь между двумя переменными может быть определена независимо от третьего компонента, особенно если последний имеет постоянное среднее значение. Коэффициент частной корреляции можно вычислить по следующей формуле [127]:

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{[(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23})^2]^{1/2}}. \qquad (21.48)$$

Путем перестановки индексов в этой формуле можно получить три новых частных корреляционных коэффициента, для которых можно проверить гипотезу равенства нулю с помощью той же таблицы, которая применялась для двух переменных с числом степеней свободы $\nu = n - 3$. Кроме того, коэффициенты частной корреляции могут быть преобразованы в z, для которых проверена гипотеза на однородности, и т. д.

В качестве примера, пользуясь табл. 21.13, можно отметить, что размеры кварцевых зерен, представленные замерами в шлифах длинных осей a, X_5 имеют отрицательную связь с пористостью X_{10}; но, с другой стороны, количество связующей массы X_4 положительно коррелируется с размерами кварцевых зерен X_5 и в то же время оно проявляет отрицательную связь с пористостью. Было бы желательно определить, зависима ли корреляция размеров зерен с пористостью от изменений содержания связующей массы? Обозначив размер зерна через X_1, количество связующей массы — X_2 и пористость — X_3, получим следующие коэффициенты:

$$r_{12} = +0{,}8113,\ r_{13} = -0{,}7094,\ r_{23} = -0{,}6671.$$

Затем оцениваем силу связи между размерами зерен X_1 и пористостью X_3, исключив влияние связующей массы X_2:

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{[(1 - r_{12})^2 (1 - r_{23})^2]^{1/2}},$$

или

$$r_{13.2} = \frac{-0{,}7094 + 0{,}8113 \times 0{,}6671}{[1 - 0{,}8113^2 \times 1 - (-0{,}6671)^2]^{1/2}} = -0{,}386.$$

Для $n = 33$, $\nu = n - 3 = 30$ значение $r_{13.2}$, согласно таблице, равно 0,349 при уровне значимости 0,05 [15]. Очевидно, что изменения размеров зерен все же сильно связаны с изменениями пористости, однако интенсивность этой связи существенно ослабевает, если относительное количество связующей массы (матрица) остается постоянным. Исключая влияние третьей переменной на каждую из двух первых, получим:

$$r_{12} = +0{,}8113; \quad r_{13} = -0{,}7094; \quad r_{23} = -0{,}6671;$$
$$r_{12.3} = +0{,}6439; \quad r_{13.2} = -0{,}3862; \quad r_{23.1} = -0{,}222.$$

В данном перечне коэффициентов корреляции видно, что сила связи уменьшается с переходом от одного коэффициента к другому, однако связь между размером зерен и относительным количеством связующей массы слабее, чем между размерами зерен и пористостью или между матрицей и пористостью. Взаимоотношение между пропорцией матрицы и пористостью породы [если считать, что размерность зерен остается постоянной ($r_{23.1}$)] понижает

уровень значимости; следовательно, когда это отношение определено и устранено влияние размерности зерен, пористость меняется независимо от изменений количества связующей массы.

Понятие о частной корреляции можно распространить и на те случаи, когда исключается влияние более чем одной переменной, но тогда лучше прибегнуть к множественной корреляции и многомерному анализу с использованием основных приемов факторного анализа [177, 201, 299]. Ясно также, что могут быть оценены и многие другие сочетания переменных. Однако у нас нет необходимости в таком подробном анализе прежде всего потому, что ограниченные наборы данных содержат ограниченный объем информации, вероятно во многом лишней. Кроме того, последовательные проверки пар и троек зависимых приводят к невыполнению переменных требований независимости, необходимой для успеха проверки. В результате вероятностный уровень различных проверок может сильно меняться. Итак, рекомендуется проверять только те характеристики, которые представляют для нас первостепенный интерес и которые были рассмотрены до изучения корреляционной матрицы.

21.17. ПЕРЕХОД ОТ ПРОСТОЙ КОРРЕЛЯЦИИ К МНОЖЕСТВЕННОЙ И ОТ ЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ К НЕЛИНЕЙНЫМ

От измерения одной случайной величины очень просто перейти к измерениям двух, трех, четырех и более величин, и в каждом случае взаимоотношения между ними можно выражать в одной и той же форме, например в форме коэффициентов корреляции или в виде линейной регрессии с более чем одной переменной. Такое утверждение формально выражается полиномом следующего вида:

$$Y = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k. \qquad (21.49)$$

В простейшем случае $X_0 = 1$, а β_0 эквивалентно формуле простой регрессии. Равенство (21.49) отражает изменения Y в зависимости от изменений нескольких переменных X, что дает множественную линейную регрессию. Последняя может быть проанализирована процедурой, аналогичной процедуре анализа простой линейной регрессии, только обобщенной на случай обработки нескольких переменных [340, 344]. Аналогично, если $X_1 = X_1$, $X_2 = X_2$, $X_3 = X_1^2$, $X_4 = X_2^2$, $X_5 = X_1 X_2$ и т. д., можно определить нелинейную зависимость. При этом данная процедура, которая приводит к более сложной арифметике, не требует введения каких-либо принципиально новых понятий. С другой стороны, при оценке степени связи коррелирование Y с несколькими X_i приводит к коэффициенту множественной (линейной) корреляции $R^2_{Y \cdot X_1 X_2 \ldots X_i}$ и т. д. Способы решения подобных задач описаны в ряде известных руководств, например в работах [27, 44, 340, 344, 454]. Многочисленные примеры использования этих методов для решения геологических задач приводятся в работах [164, 167, 172, 265, 299].

21.18. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОСТОЙ РЕГРЕССИИ И КОРРЕЛЯЦИИ В НАУКАХ О ЗЕМЛЕ

В предыдущем изложении дано множество примеров использования в геологии простой регрессии и корреляции; кроме того, много разнообразных подобных примеров рассматривают Миллер и Кан ([299], гл. 8—11). Миллер и Кан описывают также возможные процедуры, предназначенные для определения линии «наилучшего приближения» и применения ее к задачам биометрии. Имеется также великолепная статья [245], касающаяся применения в седиментологии экспоненциальных функций.

Таблица 21.14

Значения z, соответствующие значениям r

От 0,0 до 0,59

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0	0,0010	0,0020	0,0030	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090
0,01	0,0100	0,0110	0,0120	0,0130	0,0140	0,0150	0,0160	0,0170	0,0180	0,0190
0,02	0,0200	0,0210	0,0220	0,0230	0,0240	0,0250	0,0260	0,0270	0,0280	0,0290
0,03	0,0300	0,0310	0,0320	0,0330	0,0340	0,0350	0,0360	0,0370	0,0380	0,0390
0,04	0,0400	0,0410	0,0420	0,0430	0,0440	0,0450	0,0460	0,0470	0,0480	0,0490
0,05	0,0500	0,0510	0,0520	0,0530	0,0541	0,0551	0,0561	0,0571	0,0581	0,0591
0,06	0,0601	0,0611	0,0621	0,0631	0,0641	0,0651	0,0661	0,0671	0,0681	0,0691
0,07	0,0701	0,0711	0,0721	0,0731	0,0741	0,0751	0,0761	0,0772	0,0782	0,0792
0,08	0,0802	0,0812	0,0822	0,0832	0,0842	0,0852	0,0862	0,0872	0,0882	0,0892
0,09	0,0902	0,0913	0,0923	0,0933	0,0943	0,0953	0,0963	0,0973	0,0983	0,0993
0,10	0,1003	0,1013	0,1024	0,1034	0,1044	0,1054	0,1064	0,1074	0,1084	0,1094
0,11	0,1104	0,1115	0,1125	0,1135	0,1145	0,1155	0,1165	0,1175	0,1186	0,1196
0,12	0,1206	0,1216	0,1226	0,1236	0,1246	0,1257	0,1267	0,1277	0,1287	0,1297
0,13	0,1307	0,1318	0,1328	0,1338	0,1348	0,1358	0,1368	0,1379	0,1389	0,1399
0,14	0,1409	0,1419	0,1430	0,1440	0,1450	0,1460	0,1471	0,1481	0,1491	0,1501
0,15	0,1511	0,1522	0,1532	0,1542	0,1552	0,1563	0,1573	0,1583	0,1593	0,1604
0,16	0,1614	0,1624	0,1634	0,1645	0,1655	0,1665	0,1676	0,1686	0,1696	0,1706
0,17	0,1717	0,1727	0,1737	0,1748	0,1758	0,1768	0,1779	0,1789	0,1799	0,1809
0,18	0,1820	0,1830	0,1841	0,1851	0,1861	0,1872	0,1882	0,1892	0,1903	0,1913
0,19	0,1923	0,1934	0,1944	0,1955	0,1965	0,1975	0,1986	0,1996	0,2007	0,2017
0,20	0,2027	0,2038	0,2048	0,2059	0,2069	0,2979	0,2090	0,2100	0,2111	0,2121
0,21	0,2132	0,2142	0,2153	0,2163	0,2174	0,2184	0,2195	0,2205	0,2216	0,2226
0,22	0,2237	0,2247	0,2258	0,2268	0,2279	0,2289	0,2300	0,2310	0,2321	0,2331
0,23	0,2342	0,2352	0,2363	0,2374	0,2384	0,2395	0,2405	0,2416	0.2427	0,2437
0 24	0,2448	0,2458	0,2469	0,2480	0,2490	0,2501	0,2512	0,2522	0,2533	0,2543
0,25	0,2554	0,2565	0,2575	0,2586	0,2597	0,2608	0,2618	0,2629	0,2640	0,2650
0,26	0,2661	0,2672	0,2683	0,2693	0,2704	0,2715	0,2726	0,2736	0,2747	0,2758
0,27	0,2769	0,2779	0,2790	0,2801	0,2812	0,2823	0,2833	0,2844	0,2855	0,2866
0,28	0,2877	0,2888	0,2899	0,2909	0,2920	0,2931	0,2942	0,2553	0,2964	0,2975
0,29	0,2986	0,2997	0,3008	0,3018	0,3029	0,3040	0,3051	0,3062	0,3073	0,3084
0,30	0,3095	0,3106	0,3117	0,3128	0,3139	0,3150	0,3161	0,3172	0,3183	0,3194
0,31	0,3205	0,3217	0,3228	0,3239	0,3250	0,3261	0,3272	0,3283	0,3294	0,3305
0,32	0,3316	0,3328	0,3339	0,3350	0,3361	0,3372	0,3383	0,3395	0,3406	0,3417
0,33	0,3428	0,3440	0,3451	0,3462	0,3473	0,3484	0,3496	0,3507	0,3518	0,3530
0,34	0,3541	0,3557	0,3564	0,3575	0,3586	0,3598	0,3609	0,3620	0,3632	0,3643
0,35	0,3654	0,3666	0,3677	0 3689	0,3700	0,3712	0,3723	0,3734	0,3746	0,3757
0,36	0,3769	0,3780	0,3792	0,3803	0,3815	0,3826	0,3838	0,3850	0,3861	0,3873
0,37	0,3884	0,3896	0,3907	0,3919	0,3931	0,3942	0,3954	0,3966	0,3977	0,3989
0,38	0,4001	0,4012	0,4024	0,4036	0,4047	0,4059	0,4071	0,4083	0,4094	0,4106
0,39	0,4118	0,4130	0,4142	0,4153	0,4165	0,4177	0,4189	0,4201	0,4213	0,4225
0,40	0,4236	0,4248	0,4260	0,4272	0,4284	0,4296	0,4308	0,4320	0,4332	0,4344
0,41	0,4356	0,4368	0,4380	0,4392	0,4404	0,4416	0,4428	0,4441	0,4453	0,4465
0,42	0,4477	0,4489	0,4501	0,4513	0,4526	0,4538	0,4550	0,4562	0,4574	0,4587
0,43	0,4599	0,4611	0,4624	0,4636	0,4648	0,4660	0,4673	0,4685	0,4698	0,4710
0,44	0,4722	0,4735	0,4747	0,4760	0,4772	0,4784	0,4797	0,4809	0,4822	0,4834
0,45	0,4847	0,4860	0,4872	0,4885	0,4897	0,4910	0,4992	0,4935	0,4948	0,4960
0,46	0,4973	0,4986	0,4999	0,5011	0,5024	0,5037	0,5049	0,5062	0,5075	0,5088
0,47	0,5101	0,5114	0,5126	0,5139	0,5152	0,5165	0,5178	0,5191	0,5204	0,5217
0,48	0,5230	0,5243	0,5256	0,5269	0,5282	0,5295	0,5308	0,5321	0,5334	0,5347
0,49	0,5361	0,5374	0,5387	0,5400	0,5413	0,5427	0,5440	0,5453	0,5466	0,5480
0,50	0,5493	0,5596	0,5520	0,5533	0,5547	0,5560	0,5573	0,5587	0,5600	0,5614
0,51	0,5627	0,5641	0,5654	0,5668	0,5682	0,5695	0,5709	0,5722	0,5736	0,5702
0,52	0,5763	0,5777	0,5791	0,5805	0,5818	0,5832	0,5846	0,5860	0,5874	0,5888
0,53	0,5901	0,5915	0,5929	0,5943	0,5957	0,5971	0,5985	0,5999	0,6013	0,6027
0,54	0,6042	0,6056	0,6070	0,6084	0,6098	0,6112	0,6127	0,6141	0,6155	0,6169
0,55	0,6184	0,6198	0,6213	0,6227	0,6241	0,6256	0,6270	0,6285	0,6299	0,6314
0,56	0,6328	0,6343	0,6358	0,6372	0,6387	0,6401	0,6416	0,6431	0,6446	0,6460
0,57	0,6475	0,6490	0,6505	0,6520	0,6535	0,6550	0,6565	0,6580	0,6595	0,6610
0,58	0,6625	0,6690	0,6655	0,6670	0,6685	0,6700	0,6716	0,6731	0,6746	0,6761
0,59	0,6777	0,6792	0,6807	0,6823	0,6838	0,6854	0,6869	0,6885	0,6900	0,6916

Продолжение табл. 21.14

От 0,60 до 0,99

0,60	0,6931	0,6947	0,6963	0,6978	0,6994	0,7010	0,7026	0,7042	0,7057	0,7073
0,61	0,7089	0,7105	0,7121	0,7137	0,7153	0,7169	0,7185	0,7201	0,7218	0,7234
0,62	0,7250	0,7266	0,7283	0,7299	0,7315	0,7332	0,7348	0,7365	0,7381	0,7398
0,63	0,7414	0,7431	0,7447	0,7464	0,7481	0,7498	0,7514	0,7531	0,7548	0,7565
0,64	0,7582	0,7599	0,7616	0,7633	9,7650	0,7667	0,7684	0,7701	0,7718	0,7736
0,65	0,7753	0,7770	0,7788	0,7805	0,7823	0,7840	0,7858	0,7875	0,7893	0,7910
0,66	0,7928	0,7946	0,7964	0,7981	0,7999	0,8017	0,8035	0,8053	0,8071	0,8089
0,67	0,8107	0,8126	0,8144	0,8162	0,8180	0,8199	0,8217	0,8236	0,8254	0,8273
0,68	0,8291	0,8310	0,8328	0,8347	0,8366	0,8385	0,8404	0,8423	0,8441	0,8460
0,69	0,8480	0,8499	0,8518	0,8537	0,8556	2,8576	0,8595	0,8614	0,8634	0,8653
0,70	0,8673	0,8693	0,8712	0,8732	0,8752	0,8772	0,8792	0,8812	0,8832	0,8852
0,71	0,8872	0,8892	0,8912	0,8933	0,8953	0,8973	0,8994	0,9014	0,9035	0,9056
0,72	0,9076	0,9097	0,9118	0,9139	0,9160	0,9181	0,9202	0,9223	0,9245	0,9266
0,73	0,9287	0,9309	0,9330	0,9352	0,9373	0,9395	0,9417	0,9439	0,9461	0,9483
0,74	0,9505	0,9527	0,9549	0,9571	0,9594	0,9616	0,9639	0,9661	0,9684	0,9707
0,75	0,9730	0,9752	0,9775	0,9798	0,9822	0,9845	0,9868	0,9892	0,9915	0,9939
0,76	0,9962	0,9986	1,0010	1,0034	1,0058	1,0082	1,0106	1,0130	1,0154	1,0179
0,77	1,0203	1,0228	1,0253	1,0277	1,0302	1,0327	1,0352	1,0378	1,0403	1,0428
0,78	1,0454	1,0479	1,0505	1,0531	1,0557	1,0583	1,0609	1,0635	1,0661	1,0688
0,79	1,0714	1,0741	1,0768	1,0795	1,0822	1,0849	1,0876	1,0903	1,0931	1,0958
0,80	1,0986	1,1014	1,1042	1,1070	1,1098	1,1127	1,1155	1,1184	1,1212	1,1241
0,81	1,1270	1,1299	1,1329	1,1358	1,1388	1,1417	1,1447	1,1477	1,1507	1,1538
0,82	1,1568	1,1599	1,1630	1,1660	1,1692	1,1723	1,1754	1,1786	1,1817	1,1849
0,83	1,1881	1,1914	1,1946	1,1979	1,2011	1,2044	1,2077	1,2111	1,2144	1,2178
0,84	1,2212	1,2246	1,2280	1,2315	1,2349	1,2384	1,2419	1,2454	1,2490	1,2526
0,85	1,2562	1,2598	1,2634	1,2671	1,2707	1,2745	1,2782	1,2819	1,2857	1,2895
0,86	1,2933	1,2972	1,3011	1,3050	1,3089	1,3129	1,3169	1,3209	1,3249	1,3290
0,87	1,3331	1,3372	1,3414	1,3456	1,3498	1,3540	1,3583	1,3626	1,3670	1,3714
0,88	1,3758	1,3802	1,3847	1,3892	1,3938	1,3984	1,4030	1,4077	1,4124	1,4171
0,89	1,4219	1,4268	1,4316	1,4365	1,4415	1,4465	1,4516	1,4566	1,4618	1,4670
0,90	1,4722	1,4775	1,4828	1,4882	1,4937	1,4992	1,5047	1,5103	1,5160	1,5217
0,91	1,5275	1,5334	1,5393	1,5453	1,5513	1,5574	1,5636	1,5698	1,5762	1,5826
0,92	1,5890	1,5956	1,6022	1,6089	1,6157	1,6226	1,6296	1,6366	1,6438	1,6510
0,93	1,6584	1,6658	1,6734	1,6811	1,6888	1,6967	1,7047	1,7129	1,7211	1,7295
0,94	1,7380	1,7467	1,7555	1,7645	1,7736	1,7828	1,7923	1,8019	1,8117	1,8216
0,95	1,8318	1,8421	1,8527	1,8635	1,8745	1,8857	1,8972	1,9090	1,9210	1,9333
0,96	1,9459	1,9588	1,9721	1,9857	1,9996	2,0139	2,0287	2,0439	2,0595	2,0756
0,97	2,0923	2,1095	2,1273	2,1457	2,1649	2,1847	2,2054	2,2269	2,2494	2,2729
0,98	2,2976	2,3235	2,3507	2,3796	2,4101	2,4427	2,4774	2,5147	2,5550	2,5987
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

Выделено несколько видов своеобразных связей, которые, видимо, могут иметь общее значение для наук о Земле: взаимоотношения между объемной плотностью и пористостью, проявляющиеся в виде отрицательной линейной связи высокой степени — более 90% [92]; между размерностью зерен и сортировкой по размерности при процедуре непосредственных измерений [175, 176, 213]; между пористостью нефтеносных песчаников и карбонатов и логарифмом их проницаемости [167, 192, 267, 381]; между длиной осей кварцевых зерен и количеством обломков кварцитов (эта связь линейна при ϕ-единицах и очень значительна по измерениям в шлифах) [164, 167, 169].

Общий интерес представляет также явление ложной корреляции между относительными количествами составных частей породы, вызываемой ограничением, которое заключается в том, что сумма всех составляющих определяется заранее в виде фиксированной величины [56, 65, 67, 436]. Понятие ложной корреляции распространяется на анализ состава вещества в целом независимо от того, анализируется ли валовой химический состав, шлифы или состав минералов тяжелой фракции. До тех пор пока не будет найден способ эффективного преобразования, все анализы такого рода будут оста-

ваться в значительной степени неопределенными. Подобная ложная корреляция установлена, например, между размерами минералов в шлифах по длинной и короткой осям или между длинной, средней и короткой осями частиц рыхлых осадков вследствие того, что по определению $a > b$ или $a > b > c$ соответственно. Степень связи, порождаемая такими условиями, может быть выражена численно, и, если коэффициенты корреляции по выборкам значительно превышают полученные значения, можно допустить, что ρ равно нулю [404].

Своеобразное использование коэффициента корреляции Драйден [103] описал в работах [108, 196] с различных (как положительных, так и отрицательных) точек зрения. Драйден применил коэффициент корреляции для измерения «сходства» между двумя комплексами тяжелых минералов, а Эйзенхарт пришел к выводу, что для этой цели более подходящим критерием является χ^2. Хелсон, однако, поддержал способ Драйдена. Пример такой полемики должен подчеркнуть, что «статистики» можно использовать по-разному. Когда статистический критерий используется в качестве итоговой характеристики исходных данных, то, поскольку он удовлетворяет алгебраическим требованиям, дальнейших уточнений не требуется. Однако, если критерий используется просто как оценка параметра генеральной совокупности, возникает множество дополнительных требований. Таким образом, для дискретных классов подразумевается полиномиальное распределение частот и номинальное или в лучшем случае порядковое исчисление, причем подходящей статистикой будет χ^2. Если же две переменные являются непрерывными случайными величинами, то требуется непрерывная шкала (интервальная или шкала отношений), и тогда более эффективными окажутся параметрические статистики, подобные коэффициенту корреляции.

Добавим, что коэффициенты корреляции широко применяются в палеобиометрии, как это показано у Олсона и Миллера [313], использовавших корреляционные матрицы для расширенного строгого многомерного анализа.

ГЛАВА 22

Принципы экспериментальных исследований

...хотя бесспорно, что одной из задач экспериментальной работы является выработка решений, другая цель — это достижение знания о состоянии природы (т. е. о значениях параметров) без какой-либо определенной мыслительной обработки этих данных.

D. V. Lindley, On a Measure of the Information Provided by an Experiment, Ann. Math. Statistics, 27, 987, 1956

22.1. ВВЕДЕНИЕ

Любое исследование начинается с определения его цели, и важно, чтобы это определение было как можно более точным. Ясно также, что цель работы в итоге формулируется в виде гипотез, подлежащих проверке, а это в свою очередь приводит в область философии метода, к методологии. Научный метод, о котором говорилось в первой главе, заключается в последовательном приближении экспериментального исследования к этому аспекту. В общий план эксперимента по проверке гипотез входит план выборки, и, если исследуются обломочные породы, входит также и описание выборочной модели, которая лежит в основе опробования (гл. 2). Случайное опробование требует применения к результатам эксперимента теории вероятностей.

Затем описываются процедуры сбора данных с аксиоматическим подходом к анализу совокупности элементов. При этом набор основных свойств определен как необходимый и достаточный для однозначного описания совокупности. Этих свойств пять: количество элементов разного рода, их размер, форма, ориентация и упаковка. Все другие свойства можно рассматривать как производные, т. е. зависимые, представляющие собой некоторые частные сочетания значений этих пяти указанных основных свойств (гл. 3).

При аксиоматическом подходе выбор подходящей методики, с помощью которой получают данные описания горных пород (совокупностей), упрощается. Предпочтительны простые процедуры сравнения данных непосредственных измерений, выполняемых на множестве однородных элементов, и эти данные выражаются в виде итоговых статистик, которые представляют обычную плотность распределения (гл. 4—11). Эти статистики являются простыми оценками параметров совокупности и при надлежащим образом выбранной процедуре отбора, дающей случайные выборки, эти статистики удовлетворяют требованиям несмещенности, состоятельности, эффективности, а нередко и достаточности. Во многих случаях такая информация, или шкала результирующих измерений, достигает уровня шкалы отношений или по крайней мере интервального уровня; тогда для последующего свертывания данных может быть использован параметрический статистический анализ (гл. 12).

Свойства функции распределения описываются во всех руководствах, так как существуют отклонения от этих идеальных моделей, и эти отклонения большей частью возникают вследствие неслучайности отбора исходных данных (гл. 13—15). Вообще, если удалось путем применения подходящего способа опробования достичь случайного характера выборки, то наблюдаемые частоты будут согласовываться с теоретическим распределением, а если выполнены условия центральной предельной теоремы, функции распределения окажутся асимптотическими, т. е. стохастическими, приближающимися к нормальному закону. Следовательно, измеренные данные могут быть обоснованно использованы для последующей статистической проверки. В гл. 16 были приведены примеры попарных сравнений, как при проверке t-критерия Стьюдента, а также более сложных сравнений, как, например, при дисперсионном анализе (гл. 18—20). Наконец, в гл. 21 описаны способы измерения силы связи между двумя случайными величинами, опять же с использованием параметрических форм анализа.

Кроме того, мы кратко касались вопроса перехода к многомерному анализу и здесь можем заметить, что если выполнены вышеописанные требования, то собранные данные могут пройти самую строгую проверку и самыми сложными методами. Однако главное состоит в выполнении прежде всего минимальных требований; в противном случае более полный анализ не даст нужной информации, и тогда нельзя будет приступить к решению более сложных и интересных вопросов. К сожалению, многие из подлежащих выяснению проблем в науках о Земле настолько сложны, что почти всегда для их разрешения необходимо прибегать именно к многомерному анализу. Очень возможно, что такое положение объясняется отсутствием подходящих моделей, которые, будучи достаточно емкими, могли бы привести к адекватным и объективным формулировкам обычных геологических проблем в достаточно простых терминах. Видимо, именно поэтому решение геологических задач до сих пор остается главным образом эвристическим.

Действительно, процедуры, описанные в предыдущих главах, можно использовать, когда интересующая нас проблема адекватно сформулирована и вопрос, подлежащий разрешению, сведен к одной из простых форм, т. е. когда ответ можно получить при применении одномерного или в крайнем случае двумерного анализа. С другой стороны, если исходный материал собран непродуманно, без соблюдения тех процедур, которые позволяют получить информацию нужного содержания, никакой, даже самый сложный статистический анализ не приведет к состоятельному и верному ответу. Малые успехи в прогнозах полезных ископаемых объясняются довольно низким уровнем предсказаний при изучении обычных вопросов в области наук о Земле. Ожидать даже незначительного улучшения прогнозирования полезных ископаемых нет оснований, пока не будут выбраны более адекватные формулировки геологических задач [178—180].

22.2. ОСНОВЫ ВЫВОДОВ И РЕШЕНИЙ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ

До сих пор мы все время имели дело с выбором уровня значимости для принятия или отклонения гипотез на основании их статистической проверки. Выбор этот осуществлялся интуитивно или по соглашению, например часто предпочитался 5-процентный уровень ($P < 0{,}05$). Такой способ выбора довольно часто оспаривается, и обычно там, где это возможно, избранный уровень стараются оправдать эмпирически — подтверждением эффективности именно данной процедуры. Имеется множество работ, в которых процедура выбора уровня значимости рассматривается детально и основы выбора подвергаются строгому логическому анализу на непротиворечивость. Наиболее современная и исчерпывающая трактовка этого вопроса в приложении к проблемам наук о Земле дана у Миллера и Кана [299, гл. 4—7]; аналогич-

ное изложение можно найти и во многих других современных статистических руководствах, например у Беннетта и Франклина [27], Браунли [44], Диксона и Масси [96].

В общем при наличии определенной нулевой гипотезы анализ соответственного набора данных приводит или к принятию ее, или к отклонению. Здесь можно наметить два рода ошибок:

1) Нулевая гипотеза отвергается, в то время как она верна.

2) Нулевая гипотеза принимается, в то время как она неверна.

Первый случай называется *ошибкой первого рода*, второй — *ошибкой второго рода*. Конечно, каждый стремится избежать этих обеих ошибок, применяя соответственные статистические проверки, однако достигнуть этого не так-то легко.

Вначале рассмотрим «простой» критерий проверки, основанный на сравнении двух средних значений $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, которые, согласно нулевой гипотезе, относятся к одной и той же нормальной совокупности и которые получены по случайной выборке. Для этого можно применить t-критерий Стьюдента; в основу сравнения разности между средними значениями кладется оценка дисперсии по двум наборам данных (см. раздел 16.4). Если данная гипотеза верна, ожидаемое значение средних расхождений в достаточно большой серии испытаний окажется нулевым, и среднее всей совокупности расхождений поэтому тоже будет нулевым: $\mu = 0$.

Если принято альтернативное утверждение — или $\mu_1 > \mu_2$, или $\mu_2 > \mu_1$, тогда эти две выборки будут относиться к совокупностям с различными средними. Простота критерия заключается в том, что обе оценки дисперсии относятся к одной и той же неизвестной дисперсии, т. е. $\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$; иначе говоря, если две выборки представляют две совокупности, у них предполагаются равные дисперсии. Совершенно очевидно, что даже этот «простой» критерий трудно уточнить; однако для решения какого-либо вопроса необходимо решить, в чем этот вопрос заключается; цель наших действий должна быть точно определена. Но, даже когда задача определена точно, все еще остается опасность ошибиться при принятии или отклонении гипотез, и чем менее уточненным будет решаемый вопрос, тем более неясным окажется ответ. В табл. 22.1 показаны возможные решения для случая, когда задача исследования точно сформулирована с самого начала.

Таблица 22.1

Классификация ошибок при проверке гипотез

Решение, основанное на эксперименте	Действительное состояние	
	H_0 верна H_1 неверна	H_0 неверна H_1 верна
H_0 верна H_1 неверна	Верно	Неверно (ошибка второго рода)
H_0 неверна H_1 верна	Неверно (ошибка первого рода)	Верно

Другими словами, имея гипотезу H_0 и альтернативную ей H_1, желательно принять H_0, если H_0 истинна, а H_1 ложна, или же отвергнуть H_0, когда она ложна, а H_1 истинна. Здесь можно впасть в два рода ошибок: отвергнуть H_0, когда она истинна (ошибка первого рода) или принять H_0, когда истинна H_1 (ошибка второго рода). Предположим, что H_0 достаточно четко определена, а H_1 представляет множество возможных альтернатив, тогда даже корректное отклонение H_0, если она ложна, оставляет исследователя в менее выгодном положении, чем то, которое существовало до решения о выборе.

Мы стремимся подчеркнуть необходимость четкой постановки проблемы еще до начала эксперимента и побудить исследователя заняться перечислением всех возможных альтернатив и изучить все возможные исходы решения проблемы, как это рекомендуют Чеймберлин [54] и Фишер [126], еще до выбора наиболее подходящего критерия проверки. t-критерий Стьюдента имеет узкую специализацию и требует четкой альтернативы, в то время как применение критерия χ^2, например, требует хорошо определенной гипотезы, но альтернативные гипотезы обычно остаются неопределенными.

Рассмотрим теперь такую проблему: как отличить пляжные пески от тесно ассоциирующих с ними дюнных. В этом случае нулевая гипотеза H_0 может быть довольно точно определена таким образом: в пляжных песках дисперсия (сортировка) кварцевых зерен по длинным осям a σ_1^2 должна быть больше (более слабая сортировка) дисперсии осей a кварцевых зерен из дюнных песков σ_2^2. Иначе говоря, H_1 означает $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, т. е. критерий дисперсионного отношения, или F-критерий (см. раздел 17.9), имеет в числителе оценку большей дисперсии, т. е. $F = \hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2$. Альтернативные гипотезы следующие: или обе дисперсии равны (H_0), или дюнные пески отсортированы хуже пляжных, т. е. H_2 означает $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$. Нулевая гипотеза H_0 обычно формулируется так: «эти две выборки являются случайными и относятся к совокупности с общей дисперсией ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)». Располагая адекватно представительным способом отбора проб, можно перечислить все возможные результаты эксперимента еще до его начала. В идеале ожидается выполнение условий гипотезы H_1, что и должно удовлетворить исследователя. В реальных же примерах такой работы [28, 204] результаты оказываются намного сложнее, что требует многомерного подхода и применения критерий Готелинга (многомерный аналог одномерного t-критерия). На практике, однако, при решении подобных геологических задач альтернативные гипотезы оказываются гораздо менее явными. Предположим, например, что дюнные пески можно довольно легко различать от пляжных путем применения изложенной выше аппроксимации. Но что получится, если из двух типов песков один окажется не пляжным и не дюнным, а каким-либо другим. В практике геологических исследований это встречается довольно часто, и, в то время как гипотеза H_1 достаточно проста, многочисленные альтернативы оказываются весьма обширными. Если H_1 отвергнута, мы вообще не получим каких-либо удовлетворительных результатов. Поэтому необходимо, прежде чем попытаться рассмотреть, с какой ошибкой (первого или второго рода) при принятии гипотез мы столкнулись, хорошенько уяснить сущность поставленного вопроса. Когда это сделано, можно с большей определенностью рассматривать выбор уровня значимости для данного конкретного случая.

Теперь допустим, мы имеем точное определение гипотезы H_0 и альтернативной гипотезы H_1 и хотим убедиться, что принятая H_0 истинна; другими словами, используя терминологию табл. 22.2, нам надо убедиться в том,

Таблица 22.2

Диаграмма соотношения вероятностей первого и второго рода

Утверждение на основе эксперимента	Верное утверждение			
		H_0 верна H_1 неверна	H_0 неверна H_1 верна	
H_0 верна H_1 неверна	Вероятность не допустить ошибки первого рода (большая)	$1-\alpha$	β	Вероятность ошибки второго рода (малая)
H_0 неверна H_1 верна	Вероятность ошибки первого рода (малая)	α	$1-\beta$	Мощность (большая)

что реальна низкая вероятность допущения как ошибки первого, так и второго рода. Сравнивая дисперсии с помощью F-критерия, как это было показано выше, по данным значениям σ_1^2 и σ_2^2, мы можем подобрать небольшие значения α и β, а также число степеней свободы (или объем выборки) по выбранному уровню α и β. Для большинства критериев, рассмотренных в этой книге, α и объем выборки (число степеней свободы) были определены, и это автоматически определяло уровень β (или мощность данного критерия $1 - \beta$).

В настоящее время мы чрезвычайно редко встречаемся с достаточно хорошо сформулированными геологическими вопросами, поэтому более строгий подход к определению вероятностей ошибок α, β и эффективности статистической проверки гипотез совершенно необходим для достижения более высокого уровня надежности; в общем вероятностный уровень выбирается, по-видимому, произвольно, хотя на деле это автоматически ведет к неявному выражению α, β и объемов выборки. По мере того как в науках о Земле возрастает значение экспериментов, сопровождающихся проверкой гипотез, должна усиливаться тенденция к строгим формулировкам этих гипотез, что приведет к значительно большей точности в оценке важнейших характеристик эксперимента. Заинтересованных в этих вопросах мы отсылаем к статьям Неймана и Пирсона, например [309, 310], рекомендуем также ознакомиться с теорией принятия решений [68]. Мак-Интайр [295] приводит пример формулирования гипотезы и последующей проверки ее с использованием решающих правил.

22.3. СРАВНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ С НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ

Выше мы приводили множество примеров применения статистических критериев, которые относятся к довольно общей категории непараметрических; в их числе можно назвать порядковые статистики (раздел 5.3), критерий знаков (раздел 16.6), ранговый коэффициент корреляции (раздел 15.4). Подобные, так называемые быстрые и неточные процедуры, применяемые главным образом из-за их простоты и на начальной стадии прикидочной проверки, несомненно, оправданы. Сигель [398] с предельной ясностью дал представление об имеющихся критериях такой категории и привел примеры их применения. Принципы непараметрического статистического анализа описал Фрейзер [134], а некоторые примеры применения многомерного анализа дал Рой [370]; что касается вопросов применения этих статистических процедур к геологическим задачам, то они освещены у Миллера и Кана [299, гл. 14 и приложение G] и Мак-Каммона [291].

Можно сказать, что, если шкала, используемая при экспериментальных исследованиях, не достигает интервального уровня, надо применять менее эффективные критерии, ибо параметрический анализ используется главным образом только там, где это допустимо.

Непараметрические статистические критерии используются в тех случаях, когда шкала измерений является порядковой или номинальной. Использование этих критериев с данными в интервальной шкале или шкале отношений обязательно приведет к потере информации. В настоящей работе пространная критика процедур косвенного определения размеров зерен оправдана, по крайней мере частично, тем, что применение непараметрических или порядковых статистик при подобных данных служит единственным выходом. Аналогично данные, выраженные в процентах, обычно требуют менее строгих процедур проверки по сравнению с параметрическим анализом. Например, Гарнер и Мак-Гилл [141], сравнивая взаимоотношение между неопределенностью и дисперсионным анализом, подчеркивают, что «мера неопределенности имеет большую общность», тогда как использова-

ние «дисперсионной меры более определенно и сохраняет информацию на метрическом уровне». Они считают, что «решение о том, какой критерий применять, зависит не только от свойств переменной, соответствующей критерию, но также и от выгоды, ожидаемой от повышения чувствительности вместо большей общности». На деле не так-то легко сравнивать параметрический анализ с непараметрическим; в большинстве случаев «эффективность» непараметрической процедуры сравнивается с эквивалентной параметрической на общей основе нормального распределения. Такое сравнение нередко приводит к заключению, что потеря эффективности не очень велика и, следовательно, простота эквивалентной непараметрической процедуры делает ее предпочтительнее. Но если предположить, что основной функцией распределения случайной переменной является нормальная функция, не возникает очевидных причин, оправдывающих обращение к непараметрическому анализу, что может отчасти сослужить плохую службу, если данный материал в дальнейшем предполагается подвергнуть многомерному анализу. Если распределение случайной величины неизвестно, к оценке сравнения относительной эффективности непараметрической модели с нормальной не прибегают, и поэтому при непараметрической процедуре информационный уровень довольно часто остается неизвестным и неопределимым.

В общем сравнивать параметрические и непараметрические процедуры невозможно с надлежащим эффектом; во многих случаях выбор здесь ограничен. Если переменная измеряется на уровне интервальной шкалы или шкалы отношений, то в последующем анализе может быть сохранен метрический уровень информации. Если случайные величины не достигают интервального уровня, использование непараметрической статистики обязательно, но результаты будут ненадежными до тех пор, пока не удастся внести некоторые улучшения в процедуру сбора исходных данных.

Почти несомненно, что при геологических исследованиях вследствие зависимости изучаемых свойств собирается много лишней информации; возникает проблема проверки избыточности матриц наблюдений [177, 180]. При этом можно отказаться от сбора некоторых данных или, наоборот, прибавить новые свойства, или же проанализировать дополнительные образцы в целях достижения более удачных прогнозов или более эффективного контроля.

22.4. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧ В НАУКАХ О ЗЕМЛЕ

Существуют (или по крайней мере могут существовать) такие характеристики, по которым оказывается возможным разделять эксперименты. С другой стороны, всем экспериментальным процедурам свойственна некоторая общность, это относится и к постановке вопросов и проблем. Выявление общности и различий в характере экспериментальных процедур весьма важно для достижения более точных результатов.

Любой научный подход требует точного определения цели действий и формулировки проблемы. На первый взгляд осуществить это довольно несложно, по крайней мере в отдельных случаях, и очевидно, что когда формулировка цели выполнена достаточно четко, решение проблемы оказывается более надежным и значимым, нежели при неопределенных формулировках. Поэтому необходимо добиваться формальной постановки проблем и понять, что пренебрежительное отношение к этому вопросу может привести к провалу плана всей работы.

В этой связи интересно отметить сходство в трактовках существа проблем у Чеймберлина [54] и Фишера [126]; последний формулировал требование в более формальных терминах, в то время как сами требования по сути оставались теми же: перечислить все возможные исходы (разнообразие гипотез), выработать процедуру проверки, приводящую только к одной из них,

или принять ту гипотезу, которую невозможно отвергнуть. Поражает, что Чеймберлин осуществлял точно такой же подход, только в негативной форме,— он отыскивал возможность отвергнуть все гипотезы, кроме той, против которой не оказывалось возражений. Нам остается лишь сожалеть, что плодотворное развитие последовательного планирования эксперимента исходило не из наук о Земле, а из сочетания математики с агрономией [126]. Фишер [130] цитирует работу Лайелля по разработке и таксономии третичной стратиграфии как выдающийся пример среди научных работ прошлого, использовавших статистический анализ. Теперь мы видим, что потребовалось очень много времени, чтобы эти первоначальные усилия заслужили в палеонтологии более широкое признание, хотя в биометрии к тому времени такие приемы уже считались общепринятыми.

Было бы довольно странно, если способы, которые привели к столь большим успехам в физике, химии (в частности, в промышленной химии), биологии, физиологии, социологии, агрономии, медицине, а также во многих отраслях промышленности оказались бы неприменимыми в науках о Земле или же при космических исследованиях [1]. Положение покажется еще более странным, если добавить, что подобная методология уже эффективно применяется в таких науках о Земле, как метеорология и геофизика.

Вообще же исследованиям в науках о Земле свойственны некоторые черты, которые не проявляются во многих областях точных наук, например в физике и химии, подобно тому как контролируемые лабораторные эксперименты отличаются от исследования природных ситуаций. По существу исследование в области естественных наук требует изучения изменчивости в строении совокупностей, или агрегатов, и именно здесь, в силу самой своей природы, статистический метод оказывается особенно эффективным. В таких условиях осуществление контролируемого эксперимента является трудным делом; непрерывное наблюдение событий вызывает необходимость выделения простых факторов и определения погрешности или величины неконтролируемых (причинно неучтенных) отклонений путем повторных замеров. Причины изменчивости значений наблюдаемых величин могут быть определены, только когда изменения, возникающие вследствие этих причин, превышают влияние неучтенных факторов. Так как все это происходит в точно такой же обстановке, в какой проводятся рассматриваемые нами эксперименты [126], должно быть очевидно, что подобные процедуры можно применять во всех естественных науках, включая и науки о Земле. Подобно тому как вследствие применения статистики в биологии, экономике, физиологии и социологии возникли биометрия, эконометрия, физиометрия и социометрия, результатом квантификации и применения статистических методов в науках о Земле может быть область геометрики [166]. Настоящая книга может считаться введением в геометрику. И тут следовало бы обратить особое внимание на то, что статистический анализ, а вместе с ним и научный способ обработки данных, составляющие главное направление этой книги, находятся в процессе развития и их нельзя рассматривать как статичные, окончательные, завершенные.

22.5. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАЗВИТИИ МЕТОДОЛОГИИ НАУК О ЗЕМЛЕ

В то время как все описанные выше способы проверки гипотез основывались на чисто логической и математической аппроксимациях, о чем достаточно полно говорится у Неймана и Пирсона [309, 310], авторы более современных работ [383, 440 и др.] позволили разработать способы окончательного принятия решений при проверке гипотез. В оценке теорий стали учитывать

[1] Нейман и Скотт [311] весьма ярко изложили философию статистики, особенно проблему неопределенности основных моделей генеральной совокупности.

ранее не рассматривающиеся факты, и окончательное суждение теперь принимается в качестве оптимального по упорядоченным значениям исходных данных [2, 72]. Научный метод стал более развитым, приспособленным к использованию возросших объемов информации. Повысилось значение роли субъекта при проведении экспериментов, и этот фактор в современных исследованиях уже понят и его учитывают. Пример таких попыток при проведении естественнонаучного эксперимента описан Гриффитсом и Розенфельдом [161]. При планировании исследования с применением многократных повторений наблюдений очень важно принять меры предосторожности против влияния погрешностей в показаниях, которые возникают как у различных операторов, так и у одного и того же оператора.

Сами исследования усложняются и становятся более зависимыми; теперь они уже опираются на результаты, полученные множеством специалистов. В связи с этим все более и более существенное значение приобретает проблема организации исследований и согласования различных сторон работы. В промышленных исследованиях эта проблема уже тщательно разработана, что позволяет координировать работу всего предприятия.

Завершение какого-либо раздела исследовательской работы не может считаться полным, пока результаты по крайней мере не распространены, и часто, особенно в «полезных» исследованиях, такие результаты должны быть утилизированы еще до того, как исследование может считаться законченным. Подобное положение заставляет совершенно по-другому рассматривать исследовательские программы как с точки зрения роли экспериментатора, так и с точки зрения того, что время между началом эксперимента и применением полученных результатов сокращается; эти аспекты, видимо, приобретают все большее значение [71]. Учет всех подобных обстоятельств значительно повысит в будущем надежность естественнонаучных исследований и потребует переориентации основных направлений работы. Становится также все более очевидным, что ученый уже не в состоянии отделять свою жизнь в лаборатории от жизни во «внешнем» мире, ибо результаты, полученные в лаборатории, непосредственно и немедленно сказываются на всей его окружающей жизни. Как только гипотеза прошла теоретическую проверку, масштаб ее значимости заставляет исследователя немедленно отойти от принятого круга решений. Наиболее опасно было бы недооценить эту значимость.

Следовательно, в естественнонаучном исследовании, как, впрочем, и везде, будущее потребует совершенно нового подхода, ибо исследователь должен приспосабливаться к динамике новой обстановки, непрерывно вторгающейся в его работу и оказывающей на него влияние. Сейчас можно справедливо сказать, что «научный метод» в широком смысле его понимания становится буквально жизненной программой.

Соответственно общим изменениям в науках о Земле появляются и новые области исследования; в их числе такие, как исследование операций, управление наукой, системный анализ. Вместе с возрастающим использованием электронно-вычислительных машин эти относительно новые средства исследовательского арсенала сейчас начинают довлеть над экспериментатором. Например, иногда процесс естественнонаучного исследования рассматривают как «игру с природой», причем эта «игра» оборачивается довольно трудным занятием. В теории игр, где противник может рассматриваться как отвечающий на ваши действия «человеческим способом», представляется множеством возможных решений для возникающих вопросов, и здесь главную роль играет противоречивость интересов игроков [282, 307]. Природе же вовсе не обязательно «отвечать» понятным человеку способом. Часто она «действует» вообще без учета существования исследователя. Такой способ «ответов» создает массу трудностей для естествоиспытателя, и наши попытки решения научных задач с позиций теории игр в настоящее время прискорбно наивны.

Очевидно, что методология науки в своем развитии так же динамична, как и любая другая человеческая деятельность. Перед естествоиспытателем возникают возможности во всем их многообразии, причем каждая из этих возможностей требует самого серьезного внимания. Многие из разобранных на страницах этой книги процедур могут определенно помочь продвижению к намеченным целям. Самое меньшее, чего можно достигнуть на таком пути,— это лучшее понимание поставленных задач, прояснение целей, что отнюдь немаловажно, а может быть, и наиболее важно в нашей работе и жизни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ackoff R. L. (ed.), The Meaning, Scope and Methods of Operations Research, chap. 1, *in* Progress in Operations Research, ORSA publ. 5, John Wiley and Sons, Inc., New York, 505 pp., 1961.
2. Ackoff R. L., Gupta S. K., Minas L. S., Scientific Method, Optimizing Applied Research Decisions, John Wiley and Sons, Inc., New York, 464 pp., 1962.
3. Acton F. S., Analysis of Straight Line Data, John Wiley and Sons, Inc., New York, 267 pp., 1959.
4. Ahrens L., The Lognormal Distribution of the Elements, I, II, III, Geochim. et Cosmochim. Acta, 5, 49—73, 6, 121—131, 11, 205—212, 1954a, b, 1957.
5. Ahrens L., Quantitative Spectrochemical Analysis of Silicates, Pergamon Press, New York, 122 pp., 1954c.
6. Aitchison J., Brown J. A. C., The Lognormal Distribution, Cambridge University Press, New York, 176 pp., 1957.
7. Aitken A. C., Statistical Mathematics, 8th ed., Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh and London, 153 pp., 1957.
8. Allen P., Lognormal Distributions, Nature, 156, 746, 1945a.
9. Allen P., Sedimentary Variation, Some New Facts and Theories, J. Sediment. Petrol., 15, 75—83, 1945b.
10. Allen P., Correlation between Allogenic Grade Size and Allogenic Frequency in Sediments, J. Sediment. Petrol., 17, 3—7, 1947.
11. Allen P., Wealden Petrology, The Top Ashdown Pebble Bed and the Top Ashdown Sandstone, Quart. J. Geol. Soc. London, 104, 257—321, 1948.
12. Ames D. P., Irani R. R., Callis C. F., The Agreement between Independent Methods for Farticle Size Distribution Measurements on Finely Divided Powders Including Phosphates, J. Phys. Chem., 63, 531—534, 1959.
13. Anderson R. L., Bancroft T. A., Statistical Theory in Research, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 399 pp., 1952.
14. Appel E. T., Phase Sampling of Sediments, J. Sediment. Petrol., 8, 67—68, 1938.
15. Arkin H., Colton R. R., Tables for Statisticians, Barnes and Noble, Inc., New York, 152 pp., 1950.
16. Artini E., Intorno alla composizione mineralogica della sabbie di alcune fiumi del Veneto, con applicazione terreni di trasporte, Riv. Mineral. Crist. Ital. Padova, 19, 33—94, 1898.
17. Athy L. F., Density, Porosity, and Compaction of Sedimentary Rocks, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 14, 1—35, 1930.
18. Bagnold R. A., Physics of Blown Sand and Desert Dunes, Methuen and Co., Ltd., London, 265 pp., 1941.
19. Baker H. A., On the Investigation of the Mechanical Constitution of Loose Arenaceous Sediments by the Method of Elutriation..., Geol. Mag., 57, 366—370, 1920.
20. Bartlett M. S., Properties of Sufficiency and Statistical Tests, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 160, 268—282, 1937a.
21. Bartlett M. S., J. Roy. Statist. Soc. Suppl., 4, 137, 1937b.
22. Bartlett M. S., The Use of Transformations, Biometrics, 3, 39—52, 1947.
23. Bechofer R. E., A Single-sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with Known Variances, Ann. Math. Statistics, 25, 16—39, 1954.
24. Bechofer R. E., Dunnett C. W., Sobel M., A Two-sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with a Common Unknown Variance, Biometrika, 41, 170—176, 1954.
25. Becker R. M., Hazen S. W., Particle Statistics of Infinite Populations as Applied to Mine Sampling, U.S. Bur. Mines Rept. Invest. 5669, 79 pp., 1961.
26. Beers Y., Introduction to the Theory of Error, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass, 66 pp., 1957.
27. Bennett C. A., Franklin N. L., Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry, John Wiley and Sons, Inc., New York, 724 pp., 1954.

28. Biederman E. W., Jr., Shoreline Sedimentation in New Jersey, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State University, University Park, Pa., 270 pp., 1959.
29. Bliss C. I., Fisher R. A., Fitting the Negative Binomial Distribution to Biological Data and Note on Efficient Fitting of the Negative Binomial, Biometrics, 9, 176—200, 1953.
30. Bokman J., Clastic Quartz Particles as Indices of Provenance, J. Sediment. Petrol., 22, 17—24, 1952.
31. Bokman J., Lithology and Petrology of the Stanley and Jackfork Formations, J. Geol., 61, 152—170, 1953.
32. Bokman J., Comparison of Two and Three Dimensional Sphericity of Sand Grains, Bull. Geol. Soc. Am., 68, 1689—1692, 1957.
33. Boswell P. G. H., The Stratigraphy and Petrology of the Lower Eocene Deposits of the North-eastern Part of the London Basin, Quart. J., Geol. Soc. London, 71, 536—588, 1916a.
34. Boswell P. G. H., A Memoir on British Resources of Sands Suitable for Glassmaking, Longmans, Green and Co., Ltd., London, 92 pp., 1916b.
35. Boswell P. G. H., The Rarer Detrital Minerals of British Sedimentary Rocks, Trans. Geol. Soc. Glasgow, 18, 129—148, 1927.
36. Boswell P. G. H., On the Mineralogy of Sedimentary Rocks, Thomas Murby Co., London, 393 p., 1933.
37. Brammall A., Dartmoor Detritals, A Study in Provenance, Proc. Geologists' Assoc. Engl., 39, 27—48, 1928.
38. Brammall A., Leech J. G. C., The Petrology of Coal Measures Shales and Sandstones, part E., *in* Brit. Med. Res. Council, Spec. Rept. 244, H. M. Stationery Office, London, 222 p., 1943.
39. Bressler C. T., The Petrology of the Roslyn Arkose, Central Washington, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State University, Univ. Park, Pa., 147 pp., 1951.
40. Bridgman P. W., The Logic of Modern Physics, The Macmillan Company, New York, 228 pp., 1946.
41. Bridgman P. W., Reflections of a Physicist, Philosophical Library, Inc., New York, 392 pp., 1950.
42. Brotherhood G. R., Griffiths J. C., Mathematical Derivation of the Unique Frequency Curve, J. Sediment. Petrol., 17, 77—82, 1947.
43. Brownlee K. A., Industrial Experimentation, H. M. Stationery Office, London, 169 pp., 1948.
44. Brownlee K. A., Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering, John Wiley and Sons, Inc., New York, 570 pp., 1960.
45. Bruce W. A., Weige H. J., The Restored State Method for Determination of Oil in Place and Connate Water, Am. Petrol. Inst., New York, *in* Drilling and Production Practice, pp. 166ff, 1947.
46. Bush V., As We May Think, Atantic Monthly, 176, 101—108, 1945.
47. Butterfield J. A., Outgrowths on Zircon, Geol. Mag., 73, 511 p., 1936.
48. Cailleux A., La Disposition individuelle des galets dans Ies formations détritiques, Rev. Geograph. Phys. Geol. Dynamique, 11, 171—198, 1938.
49. Campbell N. R., What Is Science, Dover Publications, Inc., New York, 186 pp., 1952.
50. Campbell N. R., Foundations of Science, Dover Publications, Inc., New York, 565 pp., 1957.
51. Casey R. S., Bailey C. F., Cox G. D., Punched Card Techniques and Applications, J. Chem. Educ., 23, 495—499, 1946.
52. Casey R. S., Perry J. W., Berry M. M., Kent A., Punched Cards: Their Application to Science and Industry, 2nd ed., Reinhold Publ. Corp., New York, 506 pp. 1958.
53. Cayeux L., Contribution á l'étude micrographie des terrains sédimentaires, Mém. Soc. Geol. Nord., 4, 1—589, 1897.
54. Chamberlin T. C., The Method of Multiple Working Hypotheses, J. Geol., 5, 837—848, reprinted *in* J. Geol., 39, 155—165, 1931.
55. Chayes F., A Simple Point-counter for Thin Section Analysis, Am. Min., 34, 1—11, 1949a.
56. Chayes F., On Correlation in Petrography, J. Geol., 57, 239—254, 1949b.
57. Chayes F., Measurement of Intercept Distances in Thin Section, Trans. Am. Geophys. Union, 31, 870—872, 1950a.
58. Chayes F., On the Bias of Grain-size Measurements in Thin Section, J. Geol., 58, 156—160, 1950b.
59. Chayes F., Fairbairn H. W., A Test of Precision of Thin Section Analysis by Point-counter, Am. Min., 36, 704—712, 1951.
60. Chayes F., Notes on the Staining of Potash Feldspar with Sodium Cobaltinitrite in Thin Section, Am. Min., 37, 337—340, 1952.

61. Chayes F., Effect of Change of Origin on Mean and Variance of Two Dimensional Fabrics, Am. J. Sci., 252, 567—570, 1954a.
62. Chayes F., The Lognormal Distribution of the Elements, A Discussion, Geochim. et Cosmochim. Acta, 6, 119—120, 1954b.
63. Chayes F., Petrographic Modal Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York, 113 pp., 1956a.
64. Chayes F., The Holmes' Effect and the Lower Limit of Modal Analysis, Min. Mag., 31, 276—281, 1956b.
65. Chayes F., On Correlation between Variables of Constant Sum, J. Geophys. Res. 65, 4185—4193, 1960.
66. Chayes F., Correlation in Closed Tables, Carnegie Inst. Wash. Ann. Rept. Director Geophys. Lab., 1959—1960, 1340, pp. 165—168, 1961.
67. Chayes F., Numerical Correlation and Petrographic Variation, J. Geol., 70, 440—452, 1962.
68. Chernoff H., Moses E. L., Elementary Decision Theory, John Wiley and Sons, Inc., New York, 364 pp., 1959.
69. Churchman C. W., Theory of Experimental Inference, The Macmillan Company, New York, 292 pp., 1948.
70. Churchman C. W., Ratoosh P. (eds.), Measurement: Definitions and Theories, John Wiley and Sons, Inc., New York, 274 pp., 1959.
71. Churchman C. W., Ratoosh P. (eds.), Innovation in Group Behavior, *in* Proceedings of the Second International Conference on Operational Research, pp. 122—128, English Universities Press, London, 1960.
72. Churchman C. W., Prediction and Optimal Decision, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 349 pp., 1961.
73. Cloud W. F., Effects of Sand Grain Size Distribution upon Porosity and Permeability, Oil Weekly, 103, 25—32, 1941.
74. Cochran J. A., The Sampling Problem in Sedimentary Petrography, A Contribution, unpublished M. S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 94 pp., 1960.
75. Cochran W. G., Some Consequences when the Assumptions for the Analysis of Variance Are Not Statisfied, Biometrics, 3, 22—38, 1947.
76. Cochran W. G., Sampling Techniques, John Wiley and Sons, Inc., New York, 330 pp., 1953.
77. Cochran W. G., Some Methods for Strengthening the Common Tests, Biometrics, 10, 417—451, 1954.
78. Cochran W. G., Mosteller F., Tukey J. W., Appendix G, Principles of Sampling, pp. 309—331, *in* Statistical Problems of the Kinsey Report, American Statistical Association, Washington, D. C., 1954.
79. Cochran W. G., Cox G. M., Experimental Designs, John Wiley and Sons, Inc., New York, 611 pp. 1957, (1st ed., 454 pp., 1950).
80. Coombs C. H., A Theory of Psychological Scaling, Eng., Res. Inst. Bull., 34, 94.
80a. Coombs C. H., Inconsistency of Preferences as a Measure of Psychological Distance, pp. 221—232 in Churchman and Ratoosh, 1959.
81. Curray J. R., An Analysis of the Sphericity and Roundness of Quartz Grains, unpublished M. S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 100 pp., 1949.
82. Curray J. R., Griffiths J. C., Sphericity and Roundness of Quartz Grains in Sediments, Bull. Geol. Soc. Am., 66, 1075—1096, 1955.
83. Curray J. R., Dimensional Grain Orientation Studies of Recent Coastal Sands, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 40, 2440—2456, 1956.
84. Curtiss J. H., On the Distribution of the Quotient of Two Chances Variables, Ann. Math. Statistics, 12, 409—421, 1941.
85. Dalla Valle J. M., Micromeritics, The Technology of Fine Particles, Pitman Publ. Corp., New York, 428 pp., 1943.
86. Damour A., Nouvelles recherches sur Ies sables diamantifères, Bull. Soc. Geol. France, 13, 542—554, 1856.
87. Dapples E. C., Rominger J. F., Orientation Analysis of Finegrained Clastic Sediments, J. Geol., 53, 246—261, 1945.
88. Daubrée A., Études synthétiques de géologie expérimentale, Dunod, Paris, 2 vols, 1879.
89. Davies G. M., Chromite in Beer Stone, Geol. Mag., 56, 506—507, 1919.
90. Davies H. M., The Application of Variance Analysis to Some Problems of Petroleum Technology, J. Inst. Pétrol., 32, 465—491, 1946.
91. Davies O. L. (ed.), The Design and Analysis of Industrial Experiments, Hafner Publ. Co., Inc., New York, 636 pp., 1956.
92. Davis G. H., Estimating Porosity of Sedimentary Rocks from Bulk Density, J. Geol., 62, 102—107, 1954.
93. Delesse M. A., Procédé mécanique pour déterminer la composition des roches, Ann. Mines, 13, 379—388, 1848.

94. Deming W. W., Some Theory of Sampling, John Wiley and Sons, Inc., New York, 602 pp., 1950.
95. Déverin L., Étude lithologique des roches crétacées des Alpes-maritimes et de topographies souterraines, Bull. Serv. Carte Geol. France, 26, 120—150, 1923.
96. Dixon W. J., Massey F. J., Introduction to Statistical Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 370 pp. (2nd ed., 1957), 1951.
97. Doeglas D. J., The Importance of Heavy Mineral Analysis for Regional Sedimentary Petrology, Natl. Res. Council. Rept. Comm. Sedimentation 1939—1940, exhibit G, pp. 102—121, 1940.
98. Doeglas D. J., Smithuyzen N. C. B., Die Interpretatie van de Resultaten van Korrelgroote-analysen, Geol. Mijnbouw, 8, 273—296, 1941.
99. Doeglas D. J., Interpretation of the Results of Mechanical Analysis, J. Sediment. Petrol., 16, 19—40, 1946.
100. Dollar A. T. J., An Integrating Micrometer for the Geometrical Analysis of Rocks, Min. Mag., 24, 577—594, 1937.
101. Donnay J. D. H., A Small Set of Guides for the Determination of Non-opaque Minerals, Am. Min., 23, 91—100, 1938.
102. Dryden A. L., Accuracy in Percentage Representation of Heavy Mineral Frequencies, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 17, 233—238, 1931.
103. Dryden A. L., A Statistical Method for the Comparison of Heavy Mineral Suites, Am. J. Sci., 29, 393—408, 1935.
104. Dunnett C. W., A Multiple Comparison Procedure for Comparing Several Treatments with a Control, J. Am. Statist. Assoc., 50, 1096—1121, 1955.
105. Edelman C. H., Diagenetische Umwandlungserscheinungen an detritischen Pyroxen und Amphibolen, Fortschr. Minerol., 16, 323—324, 1931.
106. Edson F. C., Pre-Mississippian Sediments in Central Kansas, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 13, 441—458, 1929.
107. Eisenhart C., A Test of Significance of Lithological Variations, J. Sediment. Petrol., 5, 137—145, 1935a.
108. Eisenhart C., A Note on «A Statistical Method for the Comparison of Heavy Mineral Suites», Am. J. Sci., 130, 549—553, 1935b.
109. Eisenhart C., The Assumptions Underlying the Analysis of Variance, Biometrics, 3, 1—21, 1947.
110. Eisenhart C., Hastay M. W., Wallis W. A., Techniques of Statistical Analysis, McGraw-Hill Cook Co., Inc., New York, 473 pp., 1947.
111. Elderton W. P., Frequency Curves and Correlation, Harren Press, Washington, D. C. (4th ed., 1953, 272 pp.), 1938.
112. Elliott R. B., The «Superposition Error» in Micrometric Analysis of Rocks, Min. Mag., 29, 833—837, 1952.
113. Emery J. R., The Application of a Discriminant Function to a Problem in Petrography, unpublished M.S., thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 120 pp., 1954.
114. Emery J. R., Griffiths J. C., Reconnaissance Investigation into Relationships between Behavior and Petrographic Properties of Some Mississippian Sediments, Bull. Mineral. Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 62, 67—80, 1954a.
115. Emery J. R., Griffiths J. C., Differentiation of Oil-bearing from Barren Sediments by Quantitative Petrographic Analysis, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 64, 63—68, and Producers Monthly, 19, 33—37, 1954b.
116. Epstein B., The Mathematical Description of Certain Breakage Mechanisms Leading to the Logarithmico-normal Distribution, J. Franklin Inst., 224, 471, 1947.
117. Evans P., Hayman R. J., Majeed M. A., The Graphical Representation of Heavy Mineral Analysis, World Petrol. Congr., 1, 251—256, 1933.
118. Ezekiel M., Methods of Correlation Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York, 531 pp., 1941.
119. Fairbairn H. W., Packing in Ionic Minerals, Bull. Geol. Soc. Am., 54, 1305—1374, 1943.
120. Fairbairn H. W., Structural Petrology of Deformed Rocks, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 344 pp., 1949.
121. Fairbairn H. W. et al., A Co-operative Investigation of Precision and Accuracy in Chemical, Spectrochemical and Modal Analysis of Silicate Rocks, U.S. Geol. Surv. Bull. 980, 71 pp., 1951.
122. Fairbairn H. W., Precision and Accuracy of Chemical Analysis in Silicate Rocks, Geochim. et Cosmochim. Acta, 4, 143—156, 1953.
123. Fatt I., Compressibility of a Sphere Pack: Comparison of Theory and Experiment, J. Appl. Mech., 24, 148—149, 1957.
124. Fatt I., Pore Structure in Sandstones by Compressible Sphere-pack Models, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 42, 1914—1923, 1958.
125. Fisher R. A., On the Interpretation of Chi-square from Contingency Tables and the Calculation of P, J. Roy. Statist. Soc., 85, 87—94, 1922.

126. Fisher R. A., The Design of Experiments, 3rd ed., Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh and London, 263 pp. (1st. ed., 1935), 1942.
127. Fisher R. A., Statistical Methods for Research Workers, 10th ed., Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh and London, 354 pp. (1st ed., 1925), 1948.
128. Fisher R. A., Yates F., Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, 3rd ed., Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh and London, 112 pp., 1948.
129. Fisher R. A., Statistical Methods and Scientific Inference, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh and London, 175 pp., 1956.
130. Fisher R. A., The Expansion of Statistics, J. Roy. Statist. Soc., A116, pt. 1, reprinted in Am. Scientist, 42, 275—282 (1954), 1953.
131. Fleet W. F., Petrological Notes on the Old Red Sandstone of the West Midlands, Geol. Mag., 63, 505—516, 1926.
132. Folk R. L., Stages of Textural Maturity in Sedimentary Rocks, J. Sediment. Petrol., 21, 127—130, 1951.
133. Folk R. L., Ward W. C., Brazos River Bar: A Study in the Significance of Grain Size Parameters, J. Sediment. Petrol., 27, 3—26, 1957.
134. Fraser D. A. S., Nonparametric Methods in Statistics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 299 pp., 1957.
135. Fraser H. J., Experimental Study of the Porosity and Permeability of Clastic Sediments, J. Geol., 43, 910—1010, 1935.
136. Friedman G. M., Determinations of Sieve-size Distribution from the Thin-section Data for Sedimentary Petrological Studies, J. Geol., 66, 394—416, 1958.
137. Friedman G. M., On Sorting Coefficients and the Lognormality of the Grain Size Distribution of Sandstones, J. Geol., 70, 737—753, 1962.
138. Gaddum J. H., Lognormal Distributions, Nature, 156, 463—466, 1945.
139. Gardner M., Mathematical Games, Sci. Am., 301, 181—188, 1959.
140. Garner W. R., McGill W. J., The Relation between Information and Variance Analysis, Psychometrika, 21, 219—228, 1956.
141. Gilbert G. K., The Transportation of Debris by Running Water, U.S. Geol. Surv., Profess. Paper 86, 263 pp., 1914.
142. Glagolev A. A., On the Geometrical Methods of Quantitative Mineralogical Analysis of Rocks, Trans. Inst. Econ. Mineral. U.S.S.R., 59, 1—47, 1933.
143. Glagolev A. A., Quantitative Analysis with the Microscope by the Point Method, Eng. Mining J., 135, 399, 1934.
144. Goodman L. A., Kruskal W. H., Measures of Association for Cross Classifications, J. Am. Statist. Assoc., 49, 732—764, 1954.
145. Graton L. C., Fraser H. J., Systematic Packing of Spheres with Particular Relation to Porosity and Permeability, J. Geol., 43, 785—909, 1935.
146. Griffiths J. C., The Glacial Deposits West of the Taff, South Wales, unpublished Ph.D. thesis, Imperial College of Science and Technology, London, 187 pp., 1940.
147. Griffiths J. C., Stuart A., An Occurrence of Detrital Diaspore in South Wales, Geol. Mag., 77, 74—76, 1940.
148. Griffiths J. C., Petrographic Evaluation of Porosity Measurement, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 52, 6—30, 1948.
149. Griffiths J. C., Rosenfeld M. A., Progress in Measurement of Orientation in Bradford Sand, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 56, 202—236, 1950.
150. Griffiths J. C., Size versus Sorting in Some Caribbean Sediments, J. Geol., 59, 211—243, 1951a.
151. Griffiths J. C., Size and Sorting in Sediments, Bull. Geol. Soc. Am. Abstr., 62, 1551, 1951b.
152. Griffiths J. C., Grain Size Distribution and Reservoir Rock Characteristics, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 36, 205—229, 1952a.
153. Griffiths J. C., A Review of Dimensional Orientation of Quartz Grains in Sediments, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 60, 47—55, 1952b.
154. Griffiths J. C., Producers Monthly, 17, 14—20, 1953a.
155. Griffiths J. C., Estimation of Error in Grain Size Analysis, J. Sediment. Petrol., 23, 75—84, 1953b.
156. Griffiths J. C., Rosenfeld M. A., A Further Test of Dimensional Orientation of Quartz Grains in Bradford Sand, Am. J. Sci., 251, 192—214, 1953.
157. Griffiths J. C., Groff D. W., Kahn J. S., Petrographical Investigations of the Salt Wash Sediments, U.S. At. Energy Comm. RME 3054, 56 pp., 1953.
158. Griffiths J. C., Cochran J. A., Groff D. W., Kahn J. S., Petrographical Investigations of the Salt Wash Sediments, U.S. At. Energy Comm. RME 3079, 94 pp., 1953.
159. Griffiths J. C., Cochran J. A., Groff D. W., Kahn J. S., Petrographical Investigations of the Salt Wash Sediments, U. S. At. Energy Comm. RME 3097, 63 pp., 1954a.

160. Griffiths J. C., Cochran J. A., Groff D. W., Kahn J. S., Petrographical Investigations of the Salt Wash Sediments, U. S. At. Energy Comm. RME 3106, 98 pp., 1954b.
161. Griffiths J. C., Rosenfeld M. A., Operator Variation in Experimental Research, J. Geol., 62, 74—91, 1954.
162. Griffiths J. C., Statistics for the Description of Frequency Distributions Generated by the Measurement of Petrographic Properties of Sediments, The Compass (of Sigma Gamma Epsilon), 32, 329—346, 1955a.
163. Griffiths J. C., Sampling Sediments for Measurement of Grain Size and Shape, Bull. Geol. Soc. Am. Abstr., 66, 1568, 1955b.
164. Griffiths J. C., Cochran J. A., Hutta J. J., Steinmetz R., Petrographical Investigations of the Salt Wash Sediments, U.S. At. Energy Comm. RME 3122, pt. 2, 84 pp., 1956.
165. Griffiths J. C., Petrographical Investigations of Salt Wash Sediments, U.S. At. Energy Comm. RME 3151, 37 pp., 1957.
166. Griffiths J. C., Geometrics in Petroleum Petrography, Producers Monthly, 22, 40, 1958a.
167. Griffiths J. C., Petrography and Porosity of the Cow Run Sandstone, St. Marys, W. Va., J. Sediment. Petrol., 28, 15—30, 1958b.
168. Griffiths J. C., McIntyre D. D., A Table for Conversion of Millimeters to Phi Units, Department of Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 56 pp., 1958.
169. Griffiths J. C., Size and Shape of Rock-fragments in Tuscarora Scree, Fishing Creek, Lamar, Central Pennsylvania, J. Sediment. Petrol., 29, 391—401, 1959a.
170. Griffiths J. C., Sampling Pebbles of «Quartzite» from Gravel at Montoursville, Penna., Bull. Geol. Soc. Am. Abstr., 70, 1612, 1959b.
171. Griffiths J. C., Frequency Distributions in Accessory Mineral Analysis, J. Geol., 68, 353—365, 1960a.
172. Griffiths J. C., Relationships between Reservoir Petrography and Reservoir Behavior of Some Appalachian Oil Sands, Tulsa Geol. Soc. Dig., 28, 43—58, 1960b.
173. Griffiths J. C., Some Aspects of Measurement in the Geosciences, Mineral. Ind., 29, 1, 4, 5, 8, 1960c.
174. Griffiths J. C., Modal Analysis of Sediments, Rev. Geograph. Phys. Geol. Dynamique, 3, 29—48, 1960d.
175. Griffiths J. C., Measurement of the Properties of Sediments, J. Geol., 69, 487—498, 1961.
176. Griffiths J. C., Statistical Methods in Sedimentary Petrography, pp. 565—617, 1962a, *in* Milner, 1962, 1, 4th ed.
177. Griffiths J. C., Translating Sedimentary Petrography into Petrology, Geol. Soc. Am. Spec. Papers 68 (1961), 186, 1962b.
178. Griffiths J. C., Uses of Computers and Statistics in Exploration and Development of Mineral Resources, *in* Mathematical Techniques and Computer Applications in Mining and Exploration, 1, pp. E1—1—E1—19, College of Mines, Univ. of Arizona, Tucson, Ariz., 1962c.
179. Griffiths J. C., Frequency Distributions of Some Natural Resources, Penn. State Univ. Mineral Ind. Expt. Sta. Circ., 63, 174—198, 1963a.
180. Griffiths J. C., Statistical Approach to the Study of Potential Oil Reservoir Sandstones, pp. 637—668, 1963b, *in* G. A. Parks (ed.), Computers in the Mineral Industries, School of the Earth Sciences, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1963b.
181. Griffiths J. C., Smith C. M., Relationship between Volume and Axes of Some Quartzite Pebbles from the Olean Conglomerate, Rock City, N. Y., Am. J. Sci., 262, 497—512, 1964.
182. Groves A. W., The Unroofing of the Dartmoor Granite and the Distribution of Its Detritus in the Sediments of Southern England, Quart. J. Geol. Soc. London, 137, 62—96, 1931.
183. Hansen M. H., Hurwitz W. N., Madow W. G., Sample Survey Methods and Theory, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1, 638 pp., 1953.
184. Harker A., Petrology for Students, 6th ed., Cambridge Univ. Press, 302 pp., 1923.
185. Harker A., Metamorphism: A Study of the Transformations of Rock-masses, 2nd ed., Methuen and Co., Ltd., London, 302 pp., 1939.
186. Hartley H. O., Testing the Homogeneity of a Set of Variances, Biometrika, 31, 249—255, 1940.
187. Hatch F. H., Rastall R. H., Black M., The Petrology of the Sedimentary Rocks, 3rd ed., George Allen and Unwin, Ltd., London, 383 pp., 1938.
188. Hatch T., Choate S., Statistical Description of the Size Properties on Non-uniform Particulate Substances, J. Franklin Inst., 207, 369—387, 1929.
189. Hatch T., Determination of «Average Particle Size» from the Screen Analysis of Non-uniform Particulate Substances, J. Franklin Inst., 215, 227—237, 1933.
190. Hazen W., Jr., A Comparative Study of Statistical Analysis and Other Methods of Computing Ore Reserves, Utilizing Analytical Data from Maggie Canyon Manganese

Deposit, Artillery Mountains Region, Mohave Co., Arizona, U. S. Bur. Mines Rept. Invest. 5375, 188 pp., 1958.
191. Hazen W., Jr., Statistical Analysis of Sample Data for Estimating Ore, U.S. Bur. Mines Rept. Invest. 5835, 27 pp., 1961.
192. Headlee A. J. W., Joseph J. S., Permeability, Porosity and Oil and Water Content of Natural Reservoirs; Kanawha-Jackson Campbells Creek Oriskany Fields, West Va. Geol. Econ. Surv. Bull. 8, 1945.
193. Hedberg H. D., The Effect of Gravitational Compaction on the Structure of Sedimentary Rocks, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 10, 1035—1072, 1926.
194. Hedberg H. D., Some Aspects of Sedimentary Petrography in Relation to Stratigraphy in the Bolivia Coast Fields of the Maracaibo Basin, Venez., J. Paleontol., 2, 32—42, 1928.
195. Heinrich E. W., Microscopic Petrography, McGraw-Hill Book Company, New York, 296 pp., 1956.
196. Helson H., On Statistical Methods of Comparing Heavy Mineral Suites: An Answer to Mr. Churchill Eisenhart, Am. J. Sci., 232, 392—395, 1936.
197. Hempel C. G., Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 93 pp., 1952.
198. Hoel P. G., Introduction to Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1947 (3rd ed., 1962).
199. Holmes A., Petrographic Methods and Calculations, rev. ed., Thomas Murby Co., London, 515 pp., 1930.
200. Holmes C. D., Till Fabric, Bull. Geol. Soc. Am., 52, 1299—1354, 1941.
201. Holzinger K. J., Harman H. H., Factor Analysis, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 417 pp., 1941.
202. Hubert J. F., Petrology of the Fountain and Lyons Formations Along the Colorado Front Range, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State University, Univ. Park. Pa., 443 pp., 1958.
203. Hulbe C. W. H., Mounting Technique for Grain Size and Shape Measurement, J. Sediment. Petrol., 25, 302—303, 1955.
204. Hulbe C. W. H., An Investigation of the Size and Shape of Quartz Grains, Pedro Beach, California, unpublished M. S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 69 pp., 1957.
205. Hunt W. F., An Improved Wentworth Recording Micrometer, Am. Min., 9, 190—193, 1924.
206. Hurlbut C. S., Jr., An Electric Counter for Thin-section Analysis, Am. J. Sci., 237, 253—261, 1939.
207. Hurlbut C. S., Mineral Determination by Means of Punched Cards, Am. Min., 33, 508—512, 1948.
208. Hutta J. J., Relation of Dimensional Orientation of Quartz Grains to Directional Permeability in Sandstones, unpublished M.S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 97 pp., 1956.
209. Hutton C. O., Mineralogy of the Beach Sands between Halfmoon and Monterey Bays, California, Calif. Div. Mines Spec. Rept. 59, 32 pp., 1959.
210. Illing V. C., The Oilfields of Trinidad, Proc. Geol. Assoc. Engl., 27, 115, 1916.
211. Illing V. C., Some Factors in Oil Accumulation, J. Inst. Petrol., 25, 201—225, 1939.
212. Ingerson E., Ramisch J. L., Origin of the Shapes of Quartz Sand Grains, Am. Min., 27, 595—606, 1942.
213. Inman D. L., Sorting of Sediments in the Light of Fluid Mechanics, J. Sediment. Petrol., 19, 51—70, 1949.
214. Inman D. L., Measures for Describing the Size Distribution of Sediments, J. Sediment. Petrol., 22, 125—145, 1952.
215. Irani R. R., The Interpretation of Abnormalities in the Log-normal Distribution of Particle Size, J. Phys. Chem., 63, 1603—1607, 1959.
216. Irani R. R., How Various Techniques Contribute to Particle Size Distribution Data, Cereal Sci. Today, 6, 35—39, 1961.
217. Jeffreys H., Theory of Probability, 2nd ed., Oxford Univ. Press. Fair Lawn, N.J., 411 pp., 1948.
218. Jeffries C. D., A Double Centrifuge Tube for the Separation of Soil Minerals by Means of Heavy Liquids, Soil Sci., 52, 167—171, 1941.
219. Jizba Z. V., Mean and Standard Deviation of Certain Geologic Data, A Discussion, Am. J. Sci., 251, 899—906, 1953.
220. Johnson N. L., Tetley H., Statistics: An Intermediate Textbook, Cambridge Univ. Press, New York, 1, 294 pp., 1950, 2, 318 pp., 1951.
221. Johnson P. O., Statistical Methods in Research, Prentice-Hall, Inc., Englewook Cliffs, N.J., 377 pp., 1949.
222. Johnson W. E., Breston J. N., Directional Permeability Measurements on Oil Sandstones from Various States, Producers Monthly, 15, 10—19, 1951.

223. Jones G. K., Measurement of Rock Densities with the Mercury Balance, private report, United British Oilfields of Trinidad, now Shell Trinidad Ltd., 1947.
224. Kahn J. S., The Measurement of Packing in Sandstones, unpublished M.S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 135 pp., 1954.
225. Kahn J. S., The Analysis and Distribution of the Properties of Packing in Sand-size Sediments, 1, On the Measurement of Packing in Sandstones, 2, The Distribution of the Packing Measurements and an Example of Packing Analysis, J. Geol., 64, 385—395, 578—606, 1956.
226. Kahn J. S., Anisotropic Sedimentary Parameters, Trans. N.Y. Acad. Sci. (II), 21, 373—386, 1959.
227. Kapteyn J. C., Skew Frequency Curves in Biology and Statistics, Rec. Trav. Botan. Néerl., 13, 105—157, 1916.
228. Keith M. L., Selective Staining to Facilitate Rosiwal Analysis, Am. Min., 24, 561—565, 1939.
229. Kellagher R. C., Flanagan F. J., The Multiple-cone Sample Splitter, J. Sediment., Petrol., 26, 213—221, 1956.
230. Keller W. D., Differential Packing as a Possible Display of Bedding, J. Sediment. Petrol., 9, 131—133, 1939.
231. Kemeny J. G., Mirkil H., Snell J. L., Thompson G. I., Finite Mathematical Structures, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 487 pp., 1959.
232. Kempthorne O., The Design and Analysis of Experiments, John Wiley and Sons, Inc., New York, 631 pp., 1952.
233. Kendall M. G., The Advanced Theory of Statistics, 1, 4th ed., 457 pp., 1948, 2, 3rd ed., 521 pp., 1951.
234. Kendall M. G., A Course in Multivariate Analysis, Charles Griffin and Co., Ltd., London, 185 pp., 1957.
235. Kimball A. W., Short-cut Formulas for the Exact Partition of χ^2 in Contingency Tables, Biometrics, 10, 452—458, 1954.
236. Kinsey A. C., Pomeroy W. B., Martin C. E., Sexual Behavior in the Human Male, W.B. Saunders Co., Philadelphia, 804 pp., 1948.
237. Kirkpatrick A. F., An Application of Punch Cards; Filing of Optical Properties of Crystals, Anal. Chem., 20, 847—849, 1948.
238. Krige D. G., A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand, J. Chem. Soc. S. Africa, 52, 119—139, 1951.
239. Krumbein W. C., The Probable Error of Sampling Sediments for Mechanical Analysis, Am. J. Sci., 27, 204—214, 1934a.
240. Krumbein W. C., Size Frequency Distribution of Sediments, J. Sediment. Petrol., 4, 65—77, 1934b.
241. Krumbein W. C., Thin Section Mechanical Analysis of Indurated Sediments, J. Geol., 43, 482—496, 1935.
242. Krumbein W. C., Application of Logarithmic Moments to Size-frequency Distribution of Sediments, J. Sediment. Petrol., 6, 35—47, 1936a.
243. Krumbein W. C., Rejoinder to Wentworth's Discussion of the Method of Moments, J. Sediment. Petrol., 6, 159—160, 1936b.
244. Krumbein W. C., The Use of Quartile Measures in Describing and Comparing Sediments, Am. J. Sci., 32, 98—111, 1936c.
245. Krumbein W. C., Sediments and Exponential Curves, J. Geol., 45, 577—601, 1937.
246. Krumbein W. C., Aberdeen F., The Sediments of Barataria Bay, J. Sediment. Petrol., 7, 3—17.
247. Krumbein W. C., Size Frequency Distribution of Sediments and the Normal Phi Curve, J. Sediment. Petrol., 8, 84—90, 1938.
248. Krumbein W. C., Pettijohn F. J., Manual of Sedimentary Petrography, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 549 pp., 1938.
249. Krumbein W. C., Preferred Orientation of Pebbles in Sedimentary Deposits, J. Geol., 19, 675—706, 1939a.
250. Krumbein W. C., Graphic Presentation and Statistical Analysis of Sedimentary Data, pp. 558—591, *in* P. D. Trask (ed.), Recent Marine Sediments, Thomas Murby Co., London, 736 pp., 1939b.
251. Krumbein W. C., The Effect of Abrasion on the Size, Shape and Roundness of Rock-fragments, J. Geol., 49, 482—520, 1941a.
252. Krumbein W. C., Measurement and Geological Significance of Shape and Roundness of Sedimentary Particles, J. Sediment. Petrol., 11, 64—72, 1941b.
253. Krumbein W. C., Rasmussen W. C., The Probable Error of Sampling Beach Sand for Heavy Mineral Analysis, J. Sediment. Petrol., 11, 10—20, 941.
254. Krumbein W. C., Monk G. D., Permeability as a Function of the Size Parameters of Unconsolidated Sand, Trans. AIME, 151, 153—163, 1943.
255. Krumbein W. C., Statistical Designs for Sampling Beach Sand, Trans. Am. Geophys. Union, 34, 857—868, 1953a.

256. Krumbein W. C., Latin Square Experiments in Sedimentary Petrology, J. Sediment. Petrol., 23, 280—283, 1953b.
257. Krumbein W. C., Miller R. L., Design of Experiments for Statistical Analysis of Geological Data, J. Geol., 61, 510—532, 1953.
258. Krumbein W. C., Statistical Problems of Sample Size and Spacing of Lake Michigan Beaches, pp. 147—162, Proc. Conf. Coastal Eng. Council on Wave Research, 4th Conf., Berkeley, Calif., 1954a.
259. Krumbein W. C., Applications of Statistical Methods to Sedimentary Rocks, J. Am. Statist. Assoc., 49, 51—66, 1954b.
260. Krumbein W. C., Miller R. L., A Note on Transformations of Data for Analysis of Variance, J. Geol. 62, 192—193, 1954.
261. Krumbein W. C., Experimental Designs in the Earth Sciences, Trans. Am. Geophys. Union, 36, 1—11, 1955.
262. Krumbein W. C., Slack H. A., Statistical Analysis of Low-level Radioactivity of Pennsylvanian Black Fissile Shale in Illinois, Bull. Geol. Soc. Am., 67, 739—762, 1956.
263. Krumbein W. C., Tukey J. W., Multivariate Analysis of Mineralogic, Lithologic and Chemical Composition of Rock-bodies, J. Sediment. Petrol., 26, 322—337, 1956.
264. Krumbein W. C., Sloss L. L., High-speed Digital Computers in Stratigraphic and Facies Analysis, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 42, 2650—2669, 1958.
265. Krumbein W. C., The Sorting Out of Geological Variables Illustrated by Regression Analysis, J. Sediment. Petrol., 29, 575—587, 1959.
266. Krumbein W. C., The «Geological Population» as a Framework for Analyzing Data in Geology, Liverpool and Manchester Geol. J., 2, 341—368, 1960a.
267. Krumbein W. C., Some Problems in Applying Statistics to Geology, Appl. Statistics, 14, 82—91, 1960b.
268. Krynine P. D., Petrology and Genesis of Third Bradford Sand, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 29, 130—165, 1940.
269. Krynine P. D., The Tourmaline Group in Sediments, J. Geol., 54, 65—87, 1946.
270. Krynine P. D., The Megascopic Study and Field Classification of Sedimentary Rocks, J. Geol., 56, 130—165, 1948.
271. Kuenen P. H., Perdok W. G., Experimental Abrasion, 5, Frosting and Defrosting of Quartz Grains, J. Geol., 70, 648—658, 1962.
272. Kullback S., Information Theory and Statistics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 395 pp., 1959.
273. Landy R. L., The Genetic Pottsville-Tuscarora Relationship in Eastern Pennsylvania, unpublished M.S. thesis, Dept. Mineralogy Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 142 pp., 1956.
274. Landy R. L., Variation in Chemical Composition of Rock Bodies: Metabasalts in the Iron Springs Quadrangle, South Mountain, Pennsylvania, unpublished Ph.D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 185 pp., 1961.
275. Larsen E. S., Berman H., The Microscopic Determination of the Non-opaque Minerals, 2nd ed., U.S. Geol. Surv. Bull. 848, 266 pp., 1934.
276. Law J., A Statistical Approach to the Interstitial Heterogeneity of Sand Reservoirs, AIME Petrol. Technol. Tech. Paper 1732, 1944.
277. Le Corbeiller P., The Curvature of Space, Sci. Am., 191, 80—86, 1954.
278. Ledley R. S., Lusted L. B., Reasoning Foundations of Medical Diagnosis, Sci., 130, 9—21, 1959.
279. Licastro P., Griffiths J. C., The Effect of Solvent Extraction on the Determination of Porosity by Saturation, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 62, 41—45, 1953.
280. Lindley D. V., On a Measure of the Information Provided by an Experiment, Ann. Math. Statistics, 27, 986—1005, 1956.
281. Loewinson-Lessing F. Y., A Historical Survey of Petrology, transl. S.I. Tomkeieff, Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 112 pp., 1954.
282. Luce R. D., Raiffa H., Games and Decisions, John Wiley and Sons, Inc., New York, 509 pp., 1957.
283. Macdonald D. K. C., Information Theory and Its Applications to Taxonomy, J. Appl. Phys., 23, 529—531, 1952.
284. Mackie W., The Sands and Sandstones of Eastern Moray, Trans. Edinburgh Geol. Soc., 7, 148—172, 1897.
285. Mackie W., On the Laws That Govern the Rounding of Particles of Sand, Trans. Edinburgh Geol. Soc., 7, 298—311, 1897.
286. Mackie W., The Source of the Purple Zircon in the Sedimentary Rocks of Scotland, Trans. Edinburgh Geol. Soc., 11, 200—213, 1923.
287. Mandel J., Chain-block Design with Two-way Elimination of Heterogeneity, Biometrics, 10, 251—272, 1954.
288. Masson P., Measurement of Grain Packing in Sandstone, unpublished paper given at the Annual Meeting, Am. Assoc. Petrol. Geologists, St. Louis, Mo., 14 pp., 1951.

289. Mather K., Statistical Analysis in Biology, Methuen and Co., Ltd., London, 267 pp., 1951.
290. Maxwell A. E., Analyzing Qualitative Data, Methuen and Co., Ltd., London, 163 pp., 1961.
291. McCammon R. B., Efficiencies of Percentile Measures for Describing the Mean Size and Sorting of Sedimentary Particles, J. Geol., 70, 453—465, 1962a.
292. McCammon R. B., Moment Measures and the Shape of Size-frequency Distributions, J. Geol., 70, 89—91, 1962b.
293. McCarthy P. J., Introduction to Statistical Reasoning, McGraw-Hill Book Company, New York, 402 pp., 1957.
294. McIntyre D. D., The Hydraulic Equivalence and Size Distributions of Some Mineral Grains from a Beach, J. Geol. 67, 278—301, 1959.
295. McIntyre D. D., A Comparison of Three Associated Environments, Glacial Till, Fluvio-glacial Delta and Beach Sand, in Terms of the Shapes of Their Quartz, Garnet and Hornblende Grains, unpublished API Rept., Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 78 pp., 1961.
296. Middleton G. M., On Sorting Coefficients and the Lognormality of the Grain Size Distribution of Sandstones: A Discussion, J. Geol., 70, 754—756, 1962.
297. Miller R. L., Goldberg E. D., The Normal Distribution in Geochemistry, Geochim. et Cosmochim. Acta, 8, 53—62, 1955.
298. Miller R. L., Olson E. C., The Statistical Stability of Quantitative Properties as a Fundamental Criterion for the Study of Environments, J. Geol., 63, 376—387, 1955.
299. Miller R. L., Kahn J. S., Statistical Analysis in the Geological Sciences, John Wiley and Sons, Inc., New York, 483 pp., 1962.
300. Milner H. B., Sedimentary Petrography, George Allen and Unwin, Ltd., London, 4th ed., 1, 643 pp., 2, 715 pp., 1962 (3rd ed., 1940, Thomas Murby Co., London, 666 pp.).
301. Miner N. A., Talus Slopes of the Gaspé Peninsula, Science, 79, 229—230, 1934.
302. Mises R. von, Probability, Statistics and Truth, 2nd ed., George Allen and Unwin, Ltd., London, 244 p., 1957.
303. Molina E. C., Poisson's Exponential Binomial Limit, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton N.J., 47 pp., 1942.
304. Moorhouse W. W., The Study of Rocks in Thin Section, Harper and Row, Publishers, Incorporated, New York, 514 pp., 1959.
305. Muskat M., The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, McGraw-Hill Book Company, New York, 763 pp., 1937.
306. National Bureau of Standards, Tables of the Binomial Probability Distribution, Natl. Bur. Std. U.S. Appl. Math. Ser. 6, 387 pp., 1950.
307. Neumann J. von Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior, 3rd ed., Princeton Univ. Press, Priceton, N.J., 641 pp., 1953.
308. Nevin C., Competency of Running Water to Transport Debris, Bull. Geol. Soc. Am., 57, 651—674, 1946.
309. Neyman J., Pearson E. S., On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference, I, II, Biometrika, **20A**, 175—240, 263—294, 1928.
310. Neyman J., Pearson E. S., Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypotheses, Statist. Res. Mem., 1, 1—37, 1936, 2, 25—57, 1938.
311. Neyman J., Scott E. L., Statistical Approach to Problems of Cosmology, J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 20, 1—43, 1958.
312. Niggli P., Die Charakterisierung der klastischen Sedimente nach der Kornzusammensetzung, Schweiz. Mineral. Petrog. Mitt., 15, 31—38, 1935.
313. Olson E. C., Miller R. L., Morphological Integration, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 317 pp., 1958.
314. Olson J. S., Potter P. E., Variance Components of Cross-bedding Direction in Some Basal Pennsylvanian Sandstones of the Eastern Interior Basin, Statistical Methods, J. Geol., 62, 26—49, 1954.
315. Otto G. H., Comparative Tests of Several Methods of Sampling Heavy Mineral Concentrates, J. Sediment. Petrol., 3, 30—39, 1933.
316. Otto G. H., The Use of Statistical Methods in Effecting Improvements on a Jones' Sample Splitter, J. Sediment. Petrol., 7, 110—132, 1937.
317. Otto G. H., The Sedimentation Univ. and Its Use in Field Sampling, J. Geol., 46, 569—582, 1938.
318. Otto G. H., A Modified Logarithmic Probability Graph for the Interpretation of the Mechanical Analysis of Sediment. Petrol., 9, 62—76, 1939.
319. Pachman J. M., Inter-relationships among Petrographic, Textural and Oil Reservoir Properties in the Chipmunk Sandstone, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 95 pp., 1961.
320. Parker M. A., Punched-card Techniques Speed Map-making, Bull. Geol. Soc. Am. Asbstr., 63, 1288, 1952.

321. Parker M. A., Application of Punched-card Analysis to Limestone Exploration, Bull. Geol. Soc. Am. Abstr., 68, 1777, 1957.
322. Pearson E. S., Wishart J., Student's Collected Papers, Cambridge Univ. Press, New York, 224 pp., 1942.
323. Pearson E. S., Hartley H. O., Biometrika Tables for Statisticians, 1, Cambridge Univ. Press, New York, 238 pp., 1954.
324. Pearson E. S., Karl Pearson's Early Statistical Papers, Cambridge Univ. Press, New York, 557 pp., 1948.
325. Pearson K., Contributions to the Mathematical Theory of Evolution, II, Skew Variation in Homogeneous Material, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 186, 343—414, 1895.
326. Pearson K., On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables Is Such that It Can Reasonably Be Supposed to Have Risen from Random Sampling, Phil. Mag., (5), 50, 157—175, 1900.
327. Pearson K., On the Mathematical Theory of Errors of Judgement with Special Reference to the Personal Equation, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 198, 235—299, 1902.
328. Pelto C. R., Mapping of Multicomponent Systems, J. Geol., 62, 501—511, 1954.
329. Pettijohn F. J., Sedimentary Rocks, 2nd ed., Harper and Row, Publishers, Inc., 718 pp., 1957.
330. Pirson S. J., Oil Reservoir, Engineering 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 441 pp., 1950.
331. Plumley W. J., Black Hills Terrace Gravels: A Study in Sediment Transport, J. Geol., 56, 526—577, 1948.
332. Poincaré H., Thermodynamique, quoted *in* J. Mellor, 1955, Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics, Dover Publ., Inc., New York, 641 pp., 1892.
333. Popper K., The Logic of Scientific Discovery, Science Editions Inc., New York, 480 pp., 1959.
334. Potter P. E., Olson J. S., Variance Components of Cross-bedding Directions in Some Basal Pennsylvanian Sandstones in the Eastern Interior Basin, Geol. Appl., J. Geol., 62, 60—73, 1954.
335. Potter P. E., Siever R., Sources of Basal Pennsylvanian Sediments in the Eastern Interior Basin, I, Cross-bedding, J. Geol., 64, 225—244, 1956.
336. Potter P. E., Mast R. F., Sedimentary Structures, Sand Shape Fabrics and Permeability, J. Geol., 71, 441—471, 1963.
337. Potter P. E., Pettijohn F. J., Palaeocurrents and Basin Analysis, Acad. Press, Inc., New York, 296 pp., 1963.
338. Pye W. D., Rapid Methods of Making Sedimentational Analyses of Arenaceous Sediments, J. Sediment. Petrol., 13, 85—104, 1943.
339. Pyle H. C., Sherborne J. E., Core Analysis, Trans. AIME, Petrol. Tech., 132, 33—61, 1939.
340. Quenouille M. H., Introductory Statistics, Pergamon Press, New York, 248 pp., 1950.
341. Quenouille M. H., Associated Measurements, Butterworth and Co. (Publishers), Ltd., London, 254 pp., 1952.
342. Raeburn C., Milner H. B., Alluvial Prospecting, Thomas Murby Co., London, 1927.
343. Rand Corporation, A Million Random Digits, The Free Press of Grencoe, New York, 200 pp., 1955.
344. Rao C. R., Advanced Statistical Methods in Biometric Research, John Wiley and Sons, Inc., New York, 390 pp., 1952.
345. Rastall R. H., Wilcockson W. H., The Accessory Minerals of the Granitic Rocks of the English Lake District, Quart. J. Geol. Soc. London, 71, 592—620, 1917.
346. Réaumur R. A. F. de, Essais de l'histoire des rivières et des ruisseaux du royaume qui roulent des paillettes d'or, Mem. l'Acad. Roc., 68—88, 1718.
347. Reed R. D., Bailey J. P., Subsurface Correlation by Means of Heavy Minerals, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 11, 359—368, 1927.
348. Retgers J. W., Ueber die mineralogische und chemische Zusammensetzung der Dunensands Hollands, Neues Jahrb. Mineral., 1, 16—74, 1895.
349. Richter K., Die Bewegungsrichtung des Inlandeises, rekonstruiert aus den Kritzen und Langsachsen der Geschiebe, Z. Geschiebeforschung, 8, 62—66, 1932.
350. Rider P. R., An Introduction to Modern Statistical Methods, John Wiley and Sons, Inc., New York, 220 pp., 1939.
351. Riemann G., On the Hypotheses Which Lie at the Foundations of Geometry, pp. 411—425, in D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1929.
352. Riley N. A., Projection Sphericity, J. Sediment. Petrol., 11, 94—97, 1941.
353. Rittenhouse G., The Pipette Method Modified for Mass Production, Natl. Res. Council Rept. Comm. Sedimentation, for 1938—1939, exhibit G. pp. 88—102, 1939.

354. Rittenhouse G., Curves for Determining Probable Errors in Heavy Mineral Studies, Natl. Res. Council Rept. Comm. Sedimentation, 1939—1940, exhibit F, pp. 97—101, 1940.
355. Rittenhouse G., Size of Sand as Measured by Sieving and Microprojection, Bull. Geol. Soc. Am. Abstr., 52, 1930, 1941.
356. Rittenhouse G., Bertholf W. E., Gravity versus Centrifuge Separation of Heavy Minerals from Sand, J. Sediment. Petrol., 12, 85—89, 1942.
357. Rittenhouse G., A Visual Method of Estimating Two-dimensional Sphericity, J. Sediment. Petrol., 13, 79—81, 1943a.
358. Rittenhouse G., Transportation and Deposition of Heavy Minerals, Bull. Geol. Soc. Am., 54, 1725—1750, 1943b.
359. Rittenhouse G., Sources of Modern Sands in the Middle Rio Grande Valley, New Mexico, J. Geol., 11, 145—183, 1944.
360. Romig H., 50—100 Binomial Tables, John Wiley and Sons, Inc., New York, 172 pp., 1947.
361. Rosenfeld M. A., Porosity, 1, A Survey of the Problem, 2, Some Statistical Techniques Applied to Porosity Data, unpublished M.S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 149 pp., 1950.
362. Rosenfeld M. A., Griffiths J. C., A New Approach to the Problem of Porosity Measurement, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 56, 163—201, 1950.
363. Rosenfold M. A., Petrographic Variation in Oriskany «Sandstone» Complex, unpublished Ph. d. thesis, Dept. Mineralogy Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 220 pp., 1953.
364. Rosenfeld M. A., Griffiths J. C., An Experimental Test of Visual Comparison Technique in Estimating Two-dimensional Sphericity and Roundness of Quartz Grains, Am. J. Sci., 251, 553—585, 1953.
365. Rosenfeld M. A., Jacobsen L., Ferm J. C., Comparison of Sieve and Thin Section Technique for Size Analysis, J. Geol., 61, 114—132, 1953.
366. Rosenfeld M. A., A Modification of the Chayes' Point Counter Stage, Am. Min., 39, 834—836, 1954.
367. Rosiwal A., Ueber geometrische Gesteinanalysen usw., Verhandel. König. Geol. Reichsanstalt Wien, pp. 143—175, 1898.
368. Ross F. W. J., The Development and Some Practical Applications of a Statistical Value Distribution Theory for the Witwatersrand Auriferous Deposits, M. Sc. thesis. Dept. Mineralogy and Metallurgy University of Witwatersrand, Johannesburg, 117 pp., 1950.
369. Rowland R. A., Grain Shape Fabrics of Clastic Quartz, Bull. Geol. Soc. Am., 59, 547—564, 1946.
370. Roy S. N., Some Aspects of Multivariate Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York, 214 pp., 1957.
371. Rubey W. W., The Size Distribution of Heavy Minerals within a Water Laid Sandstone, J. Sediment. Petrol., 3, 3—29, 1933.
372. Rusnak G. A., The Orientation of Sand Grains under Conditions of «Unidirectional» Fluid Flow, 1, Theory and Experiment, J. Geol., 65, 384—409, 1957a.
373. Rusnak G. A., A Fabric and Petrologic Study of the Pleasantview Sandstone, J. Sediment. Petrol., 27, 41—55, 1957b.
374. Russell B., Human Knowledge: Its Scope and Limits, George Allen and Unwin, Ltd., London, 538 pp., 1948.
375. Russell B., The Analysis of Matter, Dover Publications, Inc., New York, 408 pp., 1954.
376. Russell R. D., The Size Distribution of Minerals in Mississippi River Sand, J. Sediment. Petrol., 6, 125—142, 1936.
377. Russell R. D., Mineral Composition of Mississippi River Sands, Bull. Geol. Soc. Am., 48, 1307—1348, 1937.
378. Russell R. D., Taylor R. E., Roundness and Shape of Mississippi River Sands, J. Geol., 45, 225—267, 1937.
379. Russell R. D., Tables for the Determination of Detrital Minerals, Natl. Res. Council Rept. Comm. Sedimentation 1940—1941, pp. 6—8, tables I—III, 1942.
380. Rutherford E., Geiger H., The Probability Variation in the Distribution of α Particles, Phil. Mag., (6), 20, 698, 1910.
381. Ryder H. M., Permeability, Absolute, Effective, Measured, World Oil, 125, 173—177, 1948.
382. Salmojarghi F., Sullo studio mineralogico delle sabbie e sopra un modo di rappresentarne i resultati, Atti Soc. Ital. Sci. Nat., 63, 54—89, 1904.
383. Savage L. J., The Theory of Statistical Decisions, J. Am. Statist. Assoc., 46, 55—67, 1951.
384. Scates D. E., How Science Measures, J. Exptl. Educ., 5, 296—312, 1937.
385. Scheffe H., The Analysis of Variance, John Wiley and Sons, Inc., New York, 477 pp., 1959.

386. Schwarzacher W., Grain Orientation in Sands and Sandstones, J. Sediment. Petrol., 21, 162—172, 1951.
387. Searcy J. K., Graphical Correlation of Gaging-station Records Manual of Hydrology, pt. 1, General Surface Water Techniques, U.S. Geol. Surv. Water Supply Paper 1541-C, 100 pp., 1960.
388. Shadle H. W., Griffiths J. C., An Attempt to Establish Oil-reservoir Favorability Criteria based on Quantitative Petrographic Analysis, Bull. Mineral Ind. Expt. Sta. Penn. State Univ., 68, 61—66, 1955.
389. Shand S. J., A Recording Micrometer for Rock Analysis, J. Geol., 24, 394—403, 1916.
390. Shannon C. E., A Mathematical Theory of Communication, Bell System Tech. J., 27, 379—423, 623—656, 1948.
391. Shewart A., Economic Control of Quality of Manufactured Product, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 501 pp., 1931.
392. Shewart A., Statistical Method from the Viewpoint cf Quality Control, U.S. Department of Agriculture, Washington, 135 pp., 1939.
393. Shrock R. R., Sequence in Layered Rocks, McGraw-Hill Book Company, New York, 507 pp., 1948.
394. Shukri N. M., Higazy R. A., Mechanical Analysis of Some Bottom Deposits of the Northern Red Sea, J. Sediment. Petrol., 14, 43—691944.
395. Sichel H. S., Experimental and Theoretical Investigation of Bias Error in Mine Sampling with Special Reference to Narrow Gold Reefs, Trans. Inst. Mining Met., 56, 403—474, 1947.
396. Sichel H. S., Mine Valuation and Maximum Likelihood, M. Sc. thesis, Dept. Mining and Metallurgy, Univ. of Witwatersrand, Johannesburg, 52 pp., 1949.
397. Sichel H. S., New Methods in the Statistical Evaluation of Mine Sampling Data, Trans. Inst. Mining Met., 61, 261—288, 1952.
398. Siegel S., Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences, McGraw-Hill Book Company, New York, 312 pp., 1956.
399. Siegrist H. G., Jr., Multivariate Statistical Study of Two Sandstones, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State Univ., 158 pp., 1961.
400. Slack H. H., Krumbein W. C., Measurement and Statistical Evaluation of Low-level Radioactivity in Rocks, Trans. Am. Geophys. Union, 36, 460—464, 1955.
401. Slichter C. S., Theoretical Investigation of the Motion of Ground Water, U.S. Geol. Surv. 19th, Ann. Rept., pt. 11, p. 305, 1899.
402. Slichter L. B., The Need of a New Philosophy of Prospecting, Mining Eng., 12, 570—576, 1960.
403. Smith C. M., Jr., 1959. Distribution of Alpha Tracks in Autoradiographs of Some Uraniferous Base Metal Sulfide Minerals, unpublished M.S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State University, Univ. Park, Pa., 58 pp., 1959.
404. Smith C. M., Jr., Quantitative Petrographic Comparison of the Bradford Third and Lewis Run Sands, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Geochemistry and Mineralogy, Pennsylvania State University, Univ. Park, Pa., 111 pp., 1964.
405. Smith C. S., Grains, Phases, and Interfaces: An Interpretation of Microstructure, Trans. AIME, 175, 15—51, 1948.
406. Smith C. S., Interphase Interfaces, pp. 377—401 *in* W. Shockley (ed.), Imperfections in Nearly Perfect Crystals, John Wiley and Sons, Inc., New York, 403 pp., 1952.
407. Smith J. G., Duncan A. J., Sampling Statistics and Applications, McGraw-Hill Book Company, New York, 498 pp., 1945.
408. Smithson F., The Triassic Sandstones of Yorkshire and Durham, Proc. Geol. Assoc. Engl., 42, 125—156, 1931.
409. Snedecor G. W., Statistical Methods, 5th ed., The Iowa State Univ. Press, Ames, Iowa, 534 pp., 1956.
410. Stanonis F. L., The Petrology of the Chipmunk Sandstone and Its Relationship to Reservoir Properties, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State University, Univ. Park, Pa., 151 pp., 1956.
411. Steinmetz R., Size and Shape of Quartzose Pebbles from Three New Jersey Gravels, unpublished M.S. thesis, Dept. Mineralogy, Pennsylvania State University, Univ. Park, Pa., 116 pp., 1956.
412. Steinmetz R., Sampling and Size Distribution of Quartzose Pebbles from Three New Jersey Gravels, J. Geol., 70, 56—73, 1962.
413. Stevens S. S., On the Theory of Scales of Measurement, Science, 103, 677—680, 1946.
414. Stevens S. S., The Measurement of Loudness, J. Acoust. Soc. Am., 27, 815—829, 1955.
415. Stevens S. S., The Direct Estimates of Sensory Magnitudes, Loudness, Am. J. Psychol., 69, 1—25, 1956.
416. Stevens S. S., Measurement, Psychophysics and Utility, pp. 18—63, *in* Churchman and Ratoosh, 1959.

417. Stuart A., The Estimates and Comparison of Strengths of Association in Contingency Tables, Biometrika, 40, 105—110, 1953.
417a. «Student», On the Error of Counting with a Hemacytometer, Biometrika, 5, 351, 1907.
418. «Student», The Probable Error of a Mean, Biometrika, 6, 1—34, 1908.
419. «Student», An Explanation of Deviations from Poisson's Law in Practice, Biometrika, 12, 211, 1919.
420. Sullivan J. D., Heavy Liquids for Mineralogical Analyses, U.S. Bur. Mines Tech. Paper 381, pp. 1—26, 1927.
421. Suter H. H., The General and Economic Geology of Trinidad, B.W.I., Colonial Geol. Mineral Resources, 2, 177—217, 271—307, 1951, 3, 3—51, 1952.
422. Swineford A., Swineford F., A Comparison of Three Sieve-shakers, J. Sediment. Petrol., 16, 3—13, 1946.
423. Tanner W. F., The Zig-zag Nature of Type I and Type IV Curves, J. Sediment. Petrol., 28, 372—375, 1958.
424. Taylor J. M., Pore-space Reduction in Sandstones, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 34, 701—716, 1950.
425. Thiel G. A., The Relative Resistance to Abrasion of Mineral Grains of Sand Size, J. Sediment. Petrol., 10, 103—124, 1940.
426. Thomas H. H., A Contribution to the Petrography of the New Red Sandstone in the West of England, Quart. J. Geol. Soc. London, 65, 229—244, 1909.
427. Thoulet J., Etude minéralogique d'un sable du Sahara, Bull. Soc. Minéral. France, 4, 262—268, 1881.
428. Thoulet J., Notes de lithologie sous-marine, Ann. Inst. Oceanogr. Paris, 5, 1—14, 1913.
429. Thurstone L. L., A Law of Comparative Judgment, Psych. Rev., 34, 273—286, 1927.
430. Tippett L. H. C., The Methods of Statistics, 4th ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 395 pp., 1952.
431. Trask P. D., Origin and Environment of Source Sediments of Petroleum, Gulf Publishing Co., Houston, 1932.
432. Trask P. D., Suggested Classification of Detrital Particles, Natl. Res. Council Rept. Comm. Sedimentation 1941—1942, appendix G, p. 3, 1942.
433. Udden J. A., The Mechanical Composition of Wind Deposits, Augustana Library Publ. 1, 1898.
434. Van Orstrand C. E., Note on the Representation of the Distribution of Grains in Sands, Natl. Res. Council Res. Sedimentation 1924, pp. 63—67, 1925.
435. Vistelius A. B., The Skew Frequency Distributions and the Fundamental Law of Geochemical Processes, J. Geol., 68, 1—22, 1960.
436. Wistelius A. B., Sarmanov O. V., The Correlation between Percentage Values, Major Component Correlation in Ferromagnesium Micas, J. Geol., 69, 145—153, 1961.
437. Wadell H., Volume, Shape and Roundness of Rock-particles, J. Geol., 40, 443—451, 1932.
438. Wadell H., Sphericity and Roundness of Rock-particles, J. Geol., 41, 310—331, 1933.
439. Wadell H., Volume, Shape and Shape Position of Rock-fragments in Openwork Gravel, Geograph. Ann., 1, 74—92, 1936.
440. Wald A., Statistical Decision Functions, John Wiley and Sons, Inc., New York, 172 pp., 1950.
441. Walker H. M., Studies in the History of Statistical Method, The Williams and Wilkins Co., Baltimore, 229 pp., 1931.
442. Walker S., Reproducibility of Tests of Foundry Sand, Am. Foundrymen's Assoc., 49, 1—31, 1941.
443. Watson G. S., Irving E., Statistical Methods in Rock Magnetism, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl., 7, 289—300, 1957.
444. Weatherburn C. E., A First Course in Mathematical Statistics, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 277 pp., 1957.
445. Welsh B. L., The Significance of the Difference between Two Means when the Population Variances Are Unequal, Biometrika, 29, 350—362, 1938.
446. Wentworth C. K., A Scale of Grade and Class Terms for Clastic Sediments, J. Geol., 30, 377—392, 1922.
447. Wentworth C. K., An Improved Recording Micrometer for Rock Analysis, J. Geol., 31, 228—232, 1923.
448. Wentworth C. K., Method of Computing Mechanical Composition Types of Sediments, Bull. Geol. Soc. Am., 40, 771—790, 1929.
449. Wentworth C. K., Wilgus W. L., Koch H. L., A Rotary Type of Sample Splitter, J. Sediment. Petrol., 4, 127—138, 1934.
450. Westman A. E. R., The Mercury Balance: An Apparatus for Measuring the Bulk Volume of Brick, J. Am. Ceram. Soc., 9, 311—318, 1926.

451. Whitaker L., On the Poisson Law of Small Numbers, Biometrika, 10, 36—71, 1914.
452. Whittaker E., Robinson G., The Calculus of Observations, 4th ed., Blaekie and Son, Ltd., Glasgow, 397 pp., 1949.
453. Whitten E. H. T., Quantitative Areal Modal Analysis of Granitic Complexes, Bull. Geol. Soc. Am., 72, 1333—1360, 1961.
454. Williams E. J., Regression Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York, 214 pp., 1959.
455. Winchell A. N., Winchell H., Elements of Optical Mineralogy, pts. II and III, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1951.
456. Winsauer W. O., Shearin H. M., Jr., Masson P. H., Williams M., Resistivity of Brine-saturated Sands in Relation to Pore Geometry, Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 36, 253—277, 1952.
457. Wood G. V., A Comparison of Three Quartzites, unpublished Ph. D. thesis, Dept. Mineralogy Pennsylvania State Univ., Univ. Park, Pa., 159 pp., 1960.
458. Wood G. V., Griffiths J. C., Modal Analysis of Three Quartzites and Their Textural Implications, J. Geol., 71, 405—421, 1963.
459. Yates F., Contingency Tables Involving Small Numbers and the Chi-square Test, J. Roy. Statist. Soc. Suppl., 1, 217—235, 1934.
460. Yates F., Sampling Methods for Censuses and Surveys, Hafner Publ. Co., Inc., New York, 318 pp., 1949 (2nd ed., 481 pp., 1953).
461. Youden J., Statistical Methods for Chemists, John Wiley and Sons, Inc., New York, 126 pp., 1951.
462. Youden J., Connor W. S., The Chain Block Design, Biometrics, 9, 127—140, 1953.
463. Yule G. U., The Influence of Bias and of Personal Equation on Statistics of Illdefined Qualities, J. Anthropological Inst. Gt. Brit. Ireland, 36, 325—381, 1911.
464. Yule G. U., Kendall M. G., An Introduction to the Theory of Statistics, 13th ed., Charles Griffin and Co., Ltd., London, 570 pp., 1948.
465. Yuster S. T., Determining the Porosity of Oil Sands, Producer's Monthly, 1, 21—25, 1937.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивности свойство 209
Акцессорные минералы 154, 170—186, 255
— — исторический обзор исследований 171—173
Акцессорных минералов диагностика 173—175
— — использование 182
— — классификация 173
— — методика измерений 176—178
— — метод подсчета 179
— — определение 170
— — — классов 173—175
— — определения количественных соотношений 178—181
— — применение анализа 182—184
— — распространение 283
— — сегрегация 176
— — способ концентрации 177
— — способы сепарации 176—177
Анализ 7
— данных по формации Перу-Санд 133—136
— двухфакторный 348
— дисперсионный трехфакторный 341—345
— замеров ориентировки, выводы 136—138
— измерения осей двухмерный 109
— многократной иерархической дихотомии 204
— распределения размеров зерен, использование результатов 91—95
— регрессионных зависимостей 371
— ситовый 37, 150
— факторный 340
Анализа двухфакторного аспекты 334—337
— дисперсионного трехфакторного примеры 345—346
Асимметрии изменчивость оценок 83
— мера 80, 82, 83, 94, 219
— показатель 86
Асимметричность 208
Асимметрия 86, 118, 120, 215—217, 243, 259
— квартильная 93
— — геометрическая 93
— ϕ-квартильная 94
ϕ-асимметрия 94

Бета-статистика Пирсона 215
Биномиальный дисперсионный показатель 247
Блокирование 279
Блоки случайные неполные 350
— — полные 350
Блок неполный несбалансированный 349—351
Блок неполный сбалансированный 340, 349—351
— несбалансированный 340

Взаимоотношения среднего и дисперсии 255
Влияние основных свойств на изменение пористости 194
Визуальная оценка сферичности 113—116
Выборка с возвращением 341
— собранной информации 210
Выборки 20
Выборочная дисперсия 20, 21, 211, 256, 257
— разбивка по принципу «цепные блоки» 352
— статистика среднего 216
Выборочное среднее 21, 221, 245, 305, 306
— стандартное отклонение 216
Выборочные единицы 33
— значения 219
— отклонения 219
Выборочный план для сравнения изменчивости между выборками 22
— — иерархический 22
— — многостадийный 22
Выбор статистических критериев 210—212
Вычисление дисперсий 278
— коэффициента корреляции 375
— оценок моментов 79—81
— средних 278
Вычисления сумм, средних и сумм квадратов однофакторного дисперсионного анализа с уровнем изменчивости 310—311
— теоретических частот для биномиального распределения 241

Габитуса кристалла определение 173
Геометрика 393
Гипотеза однородности дисперсий 316, 317
— пуассоновского распределения 247
— равенства дисперсий 299
— случайного распределения 298—299
Гипотезы нормального распределения 80
— нормальности с помощью асимметрии и эксцесса 118
— — — χ^2-критерия 91, 119
— однородности дисперсий проверка 317
— — набора коэффициентов корреляции проверка 378
— — нескольких коэффициентов корреляции проверка 377
— отсутствия регрессии проверка с помощью дисперсионного анализа 368—369
— принадлежности набора наблюдений нормальной совокупности, проверка 218—220

Гипотезы равенства двух коэффициентов корреляции проверка 379
— — — регрессии проверка 370
— — коэффициента корреляции нулю проверка 375—380
— — — регрессии и величины сдвига нулю проверка 364—365
— случайного отбора 271
Гипотетическая плотность распределения скорости в потоке жидкости 229
Гистограмма 67, 72, 73, 83, 106, 107, 117, 119, 130, 145
— распределения 130
— — числа контактов между зернами 145
— результативная 85, 86
— частотная 72, 73
Гистограммы кумулятивные 73
— распределения ориентировки кварцевых зерен 135
Гнейс, термин 160
Голотип, термин 18
Графический эксцесс 94
Графическое изображение результатов измерения 72—76

Двухмерные точечные диаграммы осей 109—113
Двухфакторное расположение наблюдений 337
Дезинтеграция матрицы 49—51
— породы 47—52
Декуссатная текстура 139
Дисперсии особенности 112
Дисперсии отношения 101, 102, 109, 130, 132, 134, 298
Дисперсионного анализа вычислительные процедуры 304—306
— — округлости кварцевых зерен результаты 102
— — статистические критерии 306—307
— — сферичности кварцевых зерен результаты 101
— — таблица 305—306
Дисперсионный анализ 198, 302, 322—331
— — для отдельных образцов 318
— — неполными блоками 351
— — объемной плотности образцов осадочных пород 312
— — однофакторный с одним уровнем изменчивости 306
— — ориентировки длинных осей зерен кварца 134—136
— — осевых отношений зерен кварца 134
— — — — результаты 109
— — случайной модели 335
— — смешанной модели 335
— — фиксированной модели 335
— — цепными блоками 353
Дисперсия 10, 11, 80, 97, 103, 106, 117, 119, 121, 124, 128, 130, 131, 135, 211, 219, 242, 254—257, 270, 301, 313, 317
— величин сферичности 103
— выборочная 20, 21, 211, 256, 257
— выборочного коэффициента регрессии 364
— генерального среднего 334
— Лексиса 246
— нормальной совокупности 211
— совокупности 27
Дисперсия средних значений 26
— частных значений 26
— σ^2 36
Доверительного интервала применение 224
Доверительные пределы для стандартных отклонений длин кварцевых зерен 286, 287
Доверительный интервал 31, 223, 286, 365, 366, 377
— — понятие 223
— — Тюки 338
— — Шеффе 338, 345
— предел 287, 365, 366, 376
Допущения модели интерпретации 64—65
— при непосредственном измерении свободных зерен 64
Достаточность оценки 21, 212

Единица седиментации, определение 27
— — Отто 27
Единообразные испытания 346

Зависимая переменная 360
Зависимость линейная 43
— между осями a и b кварцевых зерен 111
— — переменными 356—357
— — — нелинейная 356
— — плотностью и глубиной залегания пород 191
— — размерами и размерной отсортированностью 261, 264
— — содержанием карбонатов и пористостью 362—364
— — сферичностью и окатанностью 104
— регрессионная 371
— стандартного отклонения от среднего 264, 265
— физический смысл понятия 39
— функциональная 359
Задача измерения свойств 45
Закон больших чисел 221
— переноса 230
— пропорционального эффекта 229
— Стокса 47, 56—58, 228
— Стьюдента 111, 270, 271, 365
— уменьшения выхода 58, 77
Значение F 312, 316, 330, 354

Известный вес 13
Изменения отклонения осей в шлифах как характеристики формы 105—113
Изменчивости источник 101, 102, 107, 109, 111, 134, 136, 163, 297, 303, 308, 309, 312, 313, 318, 321—323, 328, 329, 334, 335, 342, 343, 347, 351, 353, 355, 359, 370
Изменчивость 302
— между выборками 313
— — средними по группам 313
— повторений 313
— содержания минерала 186
— среди повторений внутри групп 313
— средних по типам пород 313
— форм зерен 122—124
Измерение зерен 52—66
— — в шлифах 60—62
— — методом пипетки 53—56
— — ситовым анализом 58—60

Измерение объемной плотности 188—190
— ориентировки зерен 125—126
— — — анализ результатов 130—132
— — — процедура эксперимента 126—128
— отношения осей в шлифах 109—113
— — — — — детали методики 105—109
— размера 46—47
— свободных зерен кварца 65—66
— — — непосредственное 62—65, 78
— свойств 96
— формы зерен, анализ эксперимента 100—104
— — — взаимоотношение между сферичностью и окатанностью 104
— — — визуальным сравнением с набором стандартов 98—105
— — — выводы 121—122
— — — замечание по методике 104—105
— — — методика 97
— — — — Уоделла 96—97
— — — общий план 96
— — — последовательность операций 98
— — неправильных частиц 97
Измерения зерен, косвенные способы 82
— размеров процедуры 257
Индекс упаковки 147
Интервал группировки 219
— значений пористости 194
Иррефлективность 208
Истинное значение 8—10, 13, 15, 16
Источники изменчивости опробования 129
— — при пятифакторном анализе 342
Исходных данных регистрация 200—201
— — сбор 200

Карточка качественного контроля 327
Карточки исходных данных примеры 200
Каталожная карточка образцов 204
Квадрат взаимной корреляции 374, 375
Квантили 77, 82, 208, 259
ф-Квантили 376, 377
Квантильное отклонение 36
Квантильные статистики 77
Квартили 77, 208, 212, 259
Квартильная мера эксцесса 94
ф-Квартильная мера эксцесса 94
Квартильное отклонение 92, 93
Квартильные статистики 77
Класс «другие» 162
— зерен 153
— кварца 157
— кристалла 153
— матрицы 153
— полевого шпата 158
— слюды 158
— стекла 153
— цемента 153
— центральный 133, 220
Классификации двухфакторной примеры 322—324, 338—339
— — с повторением пример 324
Классификация двухфакторная 321
— — с повторением 322
— иерархическая 320
— карт 202
— контактов по форме 148
— однофакторная 303
— ошибок при проверке гипотез 389
Классификация Петтиджона и Фолка 64
— по двум признакам 341
— — трем признакам 345, 346
— — — — без повторений 346
— — четырем признакам 341, 346
— пятифакторная с разбивкой 341, 342
— трехфакторная 342
— шкалы 68
— элементов 35
— — для измерений состава 156
Классов границы 217
Классы 34—36, 68, 84, 91, 103, 152, 155, 241, 250, 304, 320, 321, 346, 352
— определение 34
— шкалы градаций 69
— — непрерывной 67
— элементов 34, 35
Коагуляторы, объяснение 51
Количественно-минеральный состав осадочных пород, примеры изучения 166—169
Количественные соотношения минерального состава осадочных пород 154
Компоненты дисперсии 318
— «остаточные» 320
— переменные 320
— «случайные» 320
Конечное значение размера зерна 37
Контроль количественный 265—267
— понятие 265—268
Контрольная карта 266
Концепции формы частиц осадочных пород 97
Концепция истинного значения 12
Корреляционная матрица 380—382, 386
Корреляция ложная 385, 386
— между переменными 374
— множественная 383
— частная 382—383
Коэффициент асимметрии 80
— изменчивости 114, 209, 264, 265, 318, 373
— корреляции 111, 260, 273, 374, 375, 377, 379, 380, 381, 382, 386
— — множественной (линейной) 383
— — ранговой 391
— — частной 382
— регрессии 374
— — выборочный 364
— сопряженности Пирсона 293—295
— сортированности Траска 77, 93
— сферичности 262
— Шеффе 315
— эксцесса 84
t-Коэффициент Стьюдента 315
Кривая асимптотическая 12, 45
— кумулятивная 60, 73, 76
— нормальная 75, 84, 214, 215, 218
— нормального распределения 180, 216
— обращенная 73
— плотности распределения 215
— распределения унимодальная 83
— — формула 214
— — частот Коши 233
— унимодальная 127
— — частотная 127
— частоты 79
Кривые Драйдена 178
— нелинейные непериодические 357—358
— Пирсона 251, 285

Кривые распределений 71
— — кумулятивные 75
— распределения размеров 76
— частотные 67, 130, 134, 243, 285
— — Грама Шарлье 251
Критерии значимости 78, 226
Критерий адекватности 151
— Бартлетта 316, 317
— для проверки гипотезы однородности набора дисперсий 300
— знаков 391
— изотропности Тюки 130, 316
— Кокрана 300
— однородности набора дисперсий 300—301
— отношений дисперсий 130
— случайности опробования 17, 30—32
— согласия χ^2 219, 227
— F 298, 306, 391
— χ^2 91, 117, 119, 120, 133, 204, 218—220, 284, 287—289, 293—295, 297, 298, 378, 386, 390
— — как критерий согласия 287—289
g-Критерий 220
t-Критерий Стьюдента 269—274, 277, 279, 281, 284, 314, 364, 367, 376, 388, 390
Кумулятивное произведение 131
Кучность 9, 10

Латинский квадрат 346—349
Латинского квадрата методы 347
— — примеры использования 347—349
Линеаризованная гипербола 359
— экспонента 359
Линии «наилучшего приближения» 383
Линий регрессии сравнение 369—372
Линия «наилучшего приближения», определение 360
Логарифм асимметрии Траска 94
Логнормальная плотность распределения 227

Математический закон случайности 125
Матрица 153, 155, 162
— породы 49
Медиана 82—84, 92, 212, 222, 258, 259
— значений размеров зерен 258
ϕ-медиана 376, 377
Медианное значение 21, 36
Мера асимметрии 80, 82, 93, 94, 219
— линейной зависимости 260
— размера 78
— среднего размаха кривой относительно M_σ 93
— — — — — M_ϕ 93
— эксцесса кривой 82
ϕ-мера эксцесса 94
Меры дисперсии 92, 93
— упаковки 149
— эксцесса 80, 94
Метод 7
— визуального сравнения 105, 113
— визуальной оценки 98
— «всех контрастов» 315
— измерения двух осей 113
— — зерен по двухмерному изображению в шлифах 105
— — направленной проницаемости 195
Метод измерения трех осей 113
— моментов 77, 79, 120, 215, 218, 219
— наименьших квадратов 110, 360
— осаждения в воде 38
— пипетки 37, 53, 60, 64, 76—78, 83, 89
— — ограничения и допущения 56—58
— — описание процедуры и оборудования 54
— — пример регистрации времени осаждения и глубины взятия проб 55
— — форма таблицы 52
— подсчета точек 151—153
— просеивания 64, 76—78, 83, 89
— — форма таблицы 59
— ртутных весов 188—189
— стратифицированный выборочный 320
Методика измерений упаковки 143
— — — Розенфельда 144
— Уоделла 96—97
— хи-квадрат 84
Методы измерения пористости, сравнение 280
— — размеров зерен косвенные 98
— — — — прямые 98
— латинского квадрата 347
Минимальные стандартные отклонения 132
Многостадийное опробование для однофакторной классификации с двумя уровнями изменчивости 308
Мода 92
Моделей биномиальной и Пуассона обобщение 245—246
Модели логнормальной применение 228—232
Модель Беннетта и Франклина 324
— бесконечной совокупности 163, 333, 337, 343
— биномиальная 167, 234, 246, 247, 254, 263
— — отрицательная 166, 234
— — гипергеометрическая 166
— двухфакторного дисперсионного анализа с повторениями 329
— дисперсионного анализа для эксперимента по латинскому квадрату 347
— дисперсионных компонент Эйзенхарта 324
— заражения 234
— Коши 232—233
— Лексиана 246
— логнормальная 88, 232
— — распределения размеров частиц 229
— — — скоростей 229
— логнормального распределения 82
— нормальная 88, 216, 253
— — распределения 82
— ϕ-нормальная 91
— — функции распределения 261
— опробования совокупностей осадочных пород 23—25
— полиномиальная 263
— — распределения 149
— постоянной вероятности 180
— Пуассона 227, 234, 240, 246
— регрессионная 356, 366
— случайных эффектов 342
— — — Шеффе 324
— смешанная 334
— совокупности бесконечного объема 324
— степени связи 356
— фиксированного эффекта 337

Модель функции распределения 227, 231
— частная 245
— Эйзенхарта первого типа 337
Момент 79, 215, 219
— начальный 79, 80
— нулевой 79, 215
— центральный 79, 80
Моменты выборочные 80, 83
— относительно производного начала координат 81
— — среднего значеция 81

Наблюдаемые и ожидаемые частоты, сравнение по критерию χ^2 244
Набор основных свойств 387
Наилучший статистический показатель, термин 210
Наименее значимые различия (LSD) 103
Научный метод 8, 394
Независимая переменная 85, 360
«Независимость», физический смысл понятия 39
Нелинейные связи 356
Неоднородности дисперсий признаки 316
Неравенство Чебышева 221
Несбалансированного неполного блока пример способа 351—355
Номинальная система исчисления наблюдения 207
Нормальная плотность распределения 214
Нормальности распределения требование 221

Обработка данных автоматическая 205—206
Образцы систематически отклоняющиеся 18
Объемная плотность 42, 190, 191, 307
— — различных осадочных пород 190
— — таблица для определения методом ртутных весов 190
Объемной плотности граувакк Поконо распределение 323
— — изменчивость 324
— — исследование методом ртутных весов 307
— — песчаников Поконо выборочные средние 328
— — — — дисперсионный анализ 328
Однофакторная классификация с двумя уровнями изменчивости 308
Однофакторного дисперсионного анализа пример 303—304
— — — примеры применения 319
Однофакторный аппарат с двумя уровнями изменчивости, эксперимент 307—309
— дисперсионный анализ с двумя уровнями изменчивости 309, 312
Ожидаемое значение выборочной дисперсии 282
— — дисперсии 282
Ожидаемый средний квадрат 163, 303, 306, 308, 309, 321, 322, 329, 335, 342, 343, 347, 369
Ожидаемых частот таблица 291
Окатанность 97, 99, 121, 255
Округлость 100, 107

Определение классов элементов 152—163
Определение количества проб 25—27
— линии «наилучшего приближения» методом наименьших квадратов 360—362
— наилучшей оценки среднего значения 377
— пористости двумя методами 322—324
Опробование бороздовое 23
— в геологии 27—30
— в смежных областях 27—30
— иерархическое 21
— многостадийное 21
— наземное 28
— подземное 29
— случайное 31
— стратифицированное 23
Опробуемые совокупности 21—23
Ориентировка 125, 138—140
— беспорядочная 137
— зерен в породах формации Перу-Санд 132—133
— кольцевая 140
— обвальная 140
— предполагаемая 133, 137
— предпочтительная 126, 127, 130, 133, 136, 137—140
— пространственная 139
— пятнистая 140
— сетчатая 139
— усредненная 136—139
— частиц и характер процесса 140
— «штормовые валы» 140
Ориентировки различные типы 138—140
Осевые отношения кварцевых зерен 108, 111
Основы выводов при проверке гипотез 388—391
— решений при проверке гипотез 388—391
Особенности задач в науках о Земле 392—393
Отборка материала, схема 116, 117
Отклонение квантильное 93
— стандартное арифметическое 93
— — геометрическое 93
— — графическое 93
— — логарифмическое 93
ϕ-отклонение Ипмена 93
Отношение дисперсий 306, 312, 318, 323, 335, 345, 369—371
Отношения дисперсий применение 298—300
— осей, определяющие форму 111
Отсортированности график 258, 259
— параметры 259
Отсортированность 257—259
— по размерам 258
— — составу 263—264
— — форме 261—263
Оценка возраста Земли 15
— дисперсии совокупности несмещенная наилучшая 282, 283
— значений изменчивости 333
— изменчивости несмещенная 333
— информации 199
— количественная 150
— несмещенная 20, 21, 271
— объема выборки 280—282
— — — графический способ 281
— «ошибок подсчета» 180

Оценка погрешности для «предсказанного X» 366—368
— пропорций минеральных компонентов 153
— соотношений классов 153
— — минералов 179
— среднего 84
— — значения 80
— сферичности 113—116
— — визуальная 114
— — невизуальная 116
— — по Крамбейну 114—116
— — по Райли 113—116
— — по Риттенхаусу 115
— точности 16, 179
— эффективная 20, 211
Оценки выборочные 80
— генерального среднего значения 31
— геометрические 152
— дисперсии 80, 282
— — точечные 313
— — — по различным выборочным уровням 313
— дисперсионных компонентов 313—314
— достаточные 20
— компонент дисперсии 333—334
— моментов, процедуры вычисления 237, 238
— несмещенные 20, 86, 89, 90, 271
— ожидаемых средних квадратов для двух главных эффектов 333
— смещенные 16, 85, 90
— состоятельные 20, 21
— среднего значения совокупности 25
— стандартного отклонения 31, 334
— статистические 88, 210, 238, 239, 253
— (точечные) ожидаемых средних квадратов 334
— характеристик генеральной совокупности 31
Ошибка второго рода 389, 390
— первого рода 389, 390
— первого рода 389, 390
— подсчета 180
— термин 150, 303
Ошибки предсказанных значений 365—366

Параметрический статистический анализ 387
Параметр сдвига 212
Параметры генеральной совокупности 21
— нормальных распределений 214
— объяснение 51
— размеров 259
Первичная цепь блоков 351
Переход от линейной зависимости к нелинейной 383
— — простой корреляции к множественной 383
Перфокарт автоматическая обработка 215
— системы Кейсорт кодирование 202
Перфокарта для обработки данных на электронно-вычислительных машинах 205
Перфокарты 204, 206
— Коллерид машинные 205
— ручные 201—204
— — с краевой перфорацией 205
— системы Кейсорт 201
Перфокарты с краевой перфорацией 201
План выборки 387
— случайных блоков 321
Планирование эксперимента 324—325
Плотности распределения Коши пример 232
Плотность агрегата 188
— вероятности 271
— вещества, определение 188
— заполнения 146, 147
— зерен 188
— общая 188
— объемная 188, 189, 196, 308, 315, 326, 327, 334
— определение 188
— породы 188
— распределения 217, 230, 242, 255, 259, 255
— — биномиального 255
— — кварцевой составляющей 238
— — Коши 233
— — крупных слюд 243
— — нормального 255
— — отрицательного биномиального 255, 277
— — переменного 255
— — положительного асимметричного 255
— — прямоугольного 255
— — пуассоновского 255
— — размеров зерен 203
— — унимодального 255
— упаковки 36, 146, 147
Показатель пористости 42
— рассеяния Фишера 246
— — χ^2 247, 248
— упаковки Массона 145
— — Эмери 145
Полигоны частоты кумулятивные 73
Полидисперсность 35
Полуразмах квантиля 258
— квартиля 258
Поправка Йейтса на непрерывность 292
— на интервал класса 80
Поправочный член CT 305, 309, 323, 328
Популяция 17
Пористости осадочных пород измерение 192—193
Пористость 4, 188, 194, 255
Пористость 4, 188, 194, 255
— абсолютная 42, 192
— нефтеносных песков 362
— различных осадочных пород 194
— эффективная 192
— — форма таблицы 193
Поровое пространство 192
Порядковое расчленение 208
Порядковые измерения 208
Правила при разработке плана опробования 26—27
Предположения, входящие в различные планы экспериментов при двухфакторном анализе 337—338
Предпочтительная ориентировка 133, 136—139
Предпочтительность отбираемой выборки для данной совокупности 18
Преимущества экспериментального решения 279
Преобразование переменных 255
z-преобразование 376, 377

ϕ-преобразование 265
Преобразования, позволяющие достигнуть независимого среднего арифметического $\bar{X}$ и выборочной дисперсии $\hat{\sigma}^2$ 256—257
Применение χ^2-критерия 285, 287, 292—295, 297—298
— функции распределения 227.
Принцип гидравлической эквивалентности 184—186, 380
— — — графическое изображение 185
Принципы, лежащие в основе понятия слоистости 198
Проба точечная 27
Проблема измерений в науках о Земле 206—209
— свертывания информации 206
Проверка гипотез с помощью дисперсионного анализа 316—319
— метода точечного подсчета 347
— Чарлиера 80, 81
Производные свойства горных пород 196—198
Происхождение ориентировки зерен в осадочных породах 140
Проницаемости логарифм 196
— распределение 196
Проницаемость 43, 194—196, 255
— горных пород, измерение 194—195
— различных горных пород 195—196
Процедура выбора зерен для измерений 128—129
— вычисления выборочных моментов 80—81
Процедуры идентификации 208
Процентный предел доверительной информации 223
Процессов опробования примеры 17
Процесс седиментации и принципы опробования осадочных пород 24, 121

Разброс (точность) 45
Развитие методологии наук о Земле 393—395
Различия между выборочными средними 332
— — средними 314—316, 337, 338
— — — иллюстрация 331
— — — по главным эффектам 331
Разложение общей дисперсии 302
— χ^2 295—297
Размер зерна 44
— понятие 46—47
Размеры Mdϕ 258
Рандомизации понятие 21
Рандомизация 19
— выборки 21
Рассеяние 45
Распределение биномиальное 35, 149, 166, 179—181, 233, 234—240, 243, 250, 253, 255, 288
— — ожидаемое 238, 241
— — отрицательное 146—249, 255, 276, 277
— — положительное 246, 248
— — симметричное 215
— вероятностное 234
— выборочное 213, 219, 221, 325
— генеральной совокупности 88
Распределение гипергеометрическое 249—250
— гомогенное 78
— значений ориентировки длинных осей 128—130
— — сферичности в зависимости от типа пород и размера зерен 117—119
— компонентов 23
— кривой частотной обращенной 73—75
— Лексиана 116
— логнормальное 36, 84, 227
— медиан 222
— медианных размеров зерен 84
— нормальное 21, 78, 79, 82, 86, 91, 110, 117—120, 130, 149, 194, 211—223, 227, 231, 233, 234, 239, 245, 255, 256, 266, 275, 285, 297, 299, 325, 376, 392
— ошибок 214
— Пирсона 249
- полиномиальное 35, 149, 250—251, 287, 386
— положительно-асимметричное 255
— произвольной совокупности 221
— прямоугольное 130, 255, 299
— Пуассона 166, 149, 181, 212, 244, 233, 242, 248, 254, 263, 288
— равномерное 299
— размеров по косвенным способам измерений 83—84
— — при определении их в шлифах 85—88
— — — прямых измерениях 88—91
— симметричное 133, 219
— случайных величин гауссово 214
— среднего арифметического 31
— теоретическое 117
— унимодальное 130, 133, 255
— усеченное 77
— частот 67, 241
— эмпирическое 117
F-распределение 292, 306, 323
— Фишера 131
t-распределение 111
— Стьюдента 225, 315
— — примеры применения 271—274
χ^2-распределение 247, 270, 284, 285, 287, 288, 291, 292, 295, 297
Распределений виды 213
— графические способы изображений 75, 76
— мера асимметрии 77
Распределения биномиального параметра 250
— моменты функции 77
— нормального особенности 221—222
— размеров зерен примеры 82
— частотных и кумулятивных кривых 74, 129
Регрессии линейные 356
— простой и корреляции в науках о Земле примеры использования 383, 385—386
— уравнение 357, 364, 367, 368
Регрессия линейная множественная 383
Рефлексивность 207
Роль выборочных статистик при оценке параметров генеральной совокупности 282

Сбор информации 200
Сводка статистик сферичности и округлости 100

Сводные статистические характеристики по данным прямых измерений 89
Свойства основные 187, 196
— производные 187, 196
Свойство, понятие 34—35
Связь выборочных распределений с нормальными 216—218
— между коэффициентами регрессии и корреляции 374
— — оценками, примеры 257—265
— — различными оценками дисперсий 282—283
— — размерами зерен и их отсортированностью (измерения в шлифах) 260—261
— — — — — — — (измерения косвенные) 257—260
— — — — — — — (измерения прямые) 261
— — слоистостью и предпочтительной ориентировкой 138
— — цветом и размером зерен 203
Седиментационный член Отто 25
Селективная сортировка 186
Серия свойств 35
Сила связи между переменными 373—375
Симметричность 207
Система двухмерная 41
— из многих переменных 40
— с тремя переменными 39
Систематическое отклонение (смещение) 9, 10, 13, 16, 28, 32, 45
Скорость осаждения 55—56
Сложных гипотез проверка 275
Слоистость истинная 198
— ложная 198
— (стратификация) как свойство, определение 197
Случайная выборка 21
Случайное опробование 30
Случайности опробования при помощи доверительных интервалов проверка 32
Смешанный второй центральный момент 225
Смещенные оценки 31
Совокупность 17, 18, 34, 90, 120, 210
— бесконечная 334, 335, 342
— биномиальная 180, 276
— генеральная 17, 18, 20, 32, 35, 84, 85, 89, 166, 226, 231, 240, 245, 246, 250, 258, 267, 270, 299, 378
— геологическая 12, 21, 23
— гипотетическая 19
— гомогенная 128, 129
— доступная наблюдениям (опробуемая) 19, 180
— конечная 249
— логнормальная 89
— нормальная 85, 118, 120, 220, 224—226, 258, 275, 278, 325, 344
— ϕ-нормальная 89
— однородная 331
— определение 34
— существующая 19
Согласие, термин 284
Согласование наблюдаемых частот с функцией биномиального распределения 239—241
— распределения Пуассона с наблюдаемыми частотами 243—245
Согласование результатов наблюдений с отрицательным биномиальным распределением 248—249
Соотношение вероятностей первого и второго рода 390
— между пористостью и индексом упаковки, по Массону 145
— — — — и проницаемостью 372
Составные части, термин 54
Состав осадков 263—264
Сопоставление двух коэффициентов корреляции 376
Сопряженности признаков и χ^2, таблица 289—292
Сопряженных признаков порядка 2×2, таблица 289
Спаривание 279
Способ несбалансированного неполного блока 351
— обработки данных 199
— отбора 321
— — гнездовый 319
— — многостадийный 319
— — многоступенчатый 319
— — последовательный 319
— — проб 123
— рандомизированных блоков 355
— сбалансированного неполного блока 350, 351
— — полного блока 350
— цепных блоков 351
Способы обработки породы 48
— случайного опробования 32
Сравнение двух выборочных средних 224—226
— параметрических критериев с непараметрическими 391—392
— размеров средних значений и отдельных наблюдений 26
— средних двух выборок 273—274
Среднее 10, 79, 81, 84, 108, 111, 114, 117, 119, 121, 179, 209, 215—219, 222—224 238, 242, 254, 255, 260, 261, 270, 272, 273, 288, 305, 312, 314, 315, 327, 355
— арифметическое 10, 11, 26, 27, 31, 36, 80, 81, 83, 84, 90—93, 103, 120, 121, 123, 124, 134, 145, 167, 168, 190, 209, 212, 220, 221, 247, 257, 266
— в симметричном распределении 79
— выборочное 21, 221, 245, 305, 306
— генеральное 305
— геометрическое 84, 92, 209
— и дисперсия измерений округленности 120
— — — сферичности 120
— ϕ Инмана 92
— квадратичное отклонение 11
— логарифмов 92
— общее 245
— произвольное 80
— случайных выборок 255
— термин 79
— Фолка 92
Средние значения распределения 79
Средний квадрат 101, 102, 109, 134, 136, 306, 309, 312, 328, 335, 343, 351, 355, 369, 370
Стандартная нормальная кривая 214
— ошибка среднего 25

Стандартное нормальное распределение 215
— отклонение 11, 15, 16, 24, 36, 80, 82, 86, 91, 108, 114, 127, 128, 130, 132, 138, 167, 168, 179, 215—223, 225, 257, 260, 261, 313, 314, 318, 334, 376
— — выборочное 222
Стандартные отклонения по источникам изменчивости 107
Статистика g Фишера 80, 83, 89, 92, 215, 219, 256, 262
— t 274, 275, 364
— β 117
— χ^2 284, 291, 292, 298, 325, 386
Статистики 80, 83, 85, 89, 92—94, 100, 133, 135, 207
— выборочные 219
— непараметрические 212, 391
— несмещенные 78, 91, 211, 240
— основные 81, 110
— отражающие графическую асимметрию 94
— параметрические 208, 386
— порядковые 36, 82, 208, 212, 391
— состоятельные 78, 211
— функция 76
— эффективные 211
Статистическая стратификация 320
Статистические показатели 77, 92—93
— характеристики 10, 78
— — для распределения размеров 77
— — распределения значений округлости зерен по трем типам пород 118
— — — — сферичности 114
— — — — — кварцевых зерен по размерам зерен и типам пород 118
— — — ориентировки длинных осей зерен кварца 135
— — — осевых отношений кварцевых зерен 107, 133
— — — плотности упаковки 145
— — результатов минералогических анализов аркозов 168
— — — — — граувакк 169
— — — — — кварцитов 169
Статистическое представление результатов измерений 76—79
Степень изменчивости 27
— параллелизма ориентировки зерен кварца 137
— предпочтительной (неслучайной) ориентировки 126—129, 132, 137, 140
Стохастический предел 9, 11, 12, 16
Стохастическое приближение, пример 15
Структура декуссатная 125
Стьюдентизация статистики 271
Сумма квадратов 109, 134—136, 309, 312, 318, 323, 328, 329, 343, 351, 353, 355, 369, 370—371
Сферичности регрессия 115
Сферичность 66, 97, 99, 100, 107, 118—122, 124, 222, 255
— и окатанность кварцевых зерен в осадочных породах 166—121
— — — — — — — — анализ данных 119, 121
— кварцевых зерен, результаты измерений 117
— по Райли 114
— средняя 114, 222
Схема трехфакторного эксперимента, иллюстрирующая источники изменчивости 39
— эксперимента для трех источников изменчивости 101
Схемы опробования 91

Таблица перевода ϕ-единиц в миллиметры и микроны 71
— частот 68, 72
Теория измерений 209
— ошибок 214
— стохастического предела 12
Типичный образец, термин 18
— участок, термин 18
Точечная диаграмма 111—112
Точечный подсчет минерального состава, методика 164—166
— — — — — проверка сходимости результатов 163—164
— — — — процедура 164—165
— — — — таблица 165
Точность, определение 9—11, 45, 46
— прицельная 10
— (разброс) 9, 13, 26, 27, 45, 46, 179
Транзитивность 207, 208
Трансформация одной шкалы в другую 208
Требования достаточности 78, 79
— состоятельности 78, 79
— эффективности 78, 79
Трехмерные измерения формы 113—116
Трехфакторный эксперимент 40

Удельный вес, определение 188
Унимодальность 127
Упаковка 125, 147, 149, 198, 255
— измерение плотности 141—149
— Кайе 143
— Кана 143, 146, 147
— Массона 143—144
— процедура измерения 147—149
— термин 141, 144, 146
— Тэйлора 143
— Эмери 143, 145, 146
Упаковки индекс 145
— оценка 142
— плотность 141
— показатель 145
Упорядоченность ориентировки, классы 138
Уравнение, определяющее совокупность 35—36
— параболы и гиперболы 358
— регрессии 357, 364, 367, 368
Уровень вероятностный 315, 391
— значимости 134, 136, 371, 381, 388
— изменчивости 319
— интервальный 208, 391
— информационный 208, 209
— шкалы отношений 88, 209
Условия, определяющие биномиальную модель 234
— приводящие к нормальному распределению 215—216
— рандомизации 19, 32
— состоятельности классификации 36
Усредненная ориентировка 136

Фаза Апфеля 25, 27
— (элементарный слой) 27
Форма 96
— термин 96, 97
— частиц в осадках 261—263
Формула проницаемости 195
— разложения бинома 234, 236
Функции распределения 213, 228—232, 251, 252
— — стохастические 388
Функция биномиальная 239
— нормального распределения 221, 225
— плотности вероятности 212
— распределения ϕ-нормальная 260
— — Пуассона 254
— — случайной величины 222
— — элементов 35
— энтропиеподобная Шеннона — Винера 263

Характер внутреннего строения агрегатов 139
Характеристика разброса значений 10
Характеристики распределения биномиального 238, 239
— — нормального 215
— — Пуассона 242
— χ^2-распределения 285
— статистические 10, 77
— центра распределения 92

Цель исследования 7
Цемент осадочных пород 48—49
Центральная предельная теорема 31, 221, 224, 225, 230, 233, 388
Цепные блоки 351—355

Частота 81, 131, 250, 276, 292, 294
— кумулятивная 68, 131
Частотные кривые см. Кривые частотные
— полигоны 67, 72
Число степеней свободы 100—102, 109, 131, 134—136, 244, 247, 270, 271, 273, 280, 281, 284, 285, 287, 288, 293—297, 301, 303, 306, 308, 309, 312, 314, 315, 318, 321—323, 328, 329, 335, 342, 343, 347, 351, 353—355, 364, 369—371, 379

Шкала арифметическая 178
— Артини 178
— геометрическая 254
— градаций 68, 69
— дискретная 67, 234, 254
— интервальная 82, 207—209, 320, 386, 391
— линейная 71
— логарифмическая 71, 75, 77, 209, 254
— миллиметровая 67
— непрерывная 67, 386
— номинальная 207, 320, 391
— ординальная 207
— отношений 207, 209, 320, 391
— порядковая 208, 209, 298, 320, 340, 391
— равноинтервальная 71
— размеров частиц 70
— результирующих измерений 387
— Салмоджарги 178
— Уэнтуэрта 71
— — модифицированная 69—70
— эффективная 103
ϕ-шкала 69, 71, 77, 219
— Крамбейна 359
— логарифмическая 106
Шкалы измерений 207
— классификация 68
— непрерывной классы 67
— переменной преобразование 358—360

Эксцесс 86, 120, 215, 219, 220, 243, 254
— изменчивость оценок 83
— теоретического распределения 220
ϕ-эксцесс 94
Эксцесса мера 219
— показатель 91
Эксцессивности определение 108
Элементарный слой (фаза) 27
Элементы совокупности 20
Эмпирические определения 7
Эффективность, понятие 211
Эффекты взаимодействия 65, 330, 333, 342—346
— главные 100, 321, 333, 335, 336, 341—344, 346—348
— смешанные 39, 40, 100—103, 105, 109, 321, 341—344

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА 6
Глава 1. НАУЧНЫЙ МЕТОД 7
Глава 2. ОПРОБОВАНИЕ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД 17
Глава 3. СВОЙСТВА ОСАДОЧНЫХ ПОРОД 34
Глава 4. ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 44
Глава 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ 67
Глава 6. ИЗМЕРЕНИЕ ФОРМЫ ЗЕРЕН 96
Глава 7. ИЗМЕРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ЗЕРНАМИ 125
Глава 8. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТИ УПАКОВКИ ЗЕРЕН В ПОРОДАХ 141
Глава 9. ИЗУЧЕНИЕ МИНЕРАЛЬНОГО СОСТАВА — КОЛИЧЕСТВЕННО-МИНЕРАЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 150
Глава 10. ИЗУЧЕНИЕ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА, АКЦЕССОРНЫЕ МИНЕРАЛЫ 170
Глава 11. ИЗМЕРЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СВОЙСТВ 187
Глава 12. ОБРАБОТКА И СВЕРТЫВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ 199
Глава 13. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ . . . 213
Глава 14. ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ — БИНОМИАЛЬНОЕ, ПУАССОНА И Т. Д. 234
Глава 15. СВЯЗЬ МЕЖДУ СРЕДНИМ И ДИСПЕРСИЕЙ 253
Глава 16. БОЛЕЕ ОБЩИЕ КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ. КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА . . 269
Глава 17. БОЛЕЕ ОБЩИЕ КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ — χ^2- и F-КРИТЕРИИ 284
Глава 18. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ 302
Глава 19. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ 320
Глава 20. ПРОЧИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ 340
Глава 21. ИЗМЕРЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ 356
Глава 22. ПРИНЦИПЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ 387
ЛИТЕРАТУРА 396
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 411

«НАУКИ О ЗЕМЛЕ»

т. 35

Дж. Гриффитс

НАУЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД

Редактор *В. К. ЗНАМЕНСКАЯ*
Художественный редактор *В. М. Варлашин*
Технический редактор *Н. А. Иовлева*

Сдано в производство 23/VII 1970 г.
Подписано к печати 18/I—1971 г.
Бумага № 2 70×108$^{1}/_{16}$=13,25 бум. л.
37,1 печ. л.,
Уч.-изд. л. 35,87 Изд. № 5/5521
Цена 3 р. 99 к. Зак. 429

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9

Издательство «МИР»

готовит к выпуску в 1971 г. книги подписной серии

«НАУКИ О ЗЕМЛЕ»

Беннисон Дж., Райт А. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ИСТОРИЯ БРИТАНСКИХ ОСТРОВОВ. Лондон, 1969, перев. с англ., 29 л., 3 р. 10 к.

Руттен М. ГЕОЛОГИЯ ЗАПАДНОЙ ЕВРОПЫ, Амстердам, 1969, перев. с англ., 40 л., 4 р. 20 к.

РУДНЫЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ США. Том 1. Под ред. Дж. Риджа, Нью-Йорк, 1968, перев. с англ., 67 л., 6 р. 23 к.

Бэр Я., Заславски Д. и др. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ, Париж, 1968, перев. с англ., 35 л., 3 р.

Костов И. МИНЕРАЛОГИЯ, Амстердам, 1968, перев. с англ., 50 л., 4 р. 70 к.

ФИЗИКА МИНЕРАЛОВ. Сборник статей. Перев. с англ., 20 л. 2р. 20 к.

Бейли Б. ВВЕДЕНИЕ В ПЕТРОЛОГИЮ, Энглвуд-Клиффс, 1968, перев с англ., 1971, 27 л., 2 р. 90 к.

Гриффите Дж. НАУЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД. Нью-Йорк, 1967, перев. с англ., 38 л., 4 р.

Дафф П., Халлам А., Уолтон Э. ЦИКЛИЧНОСТЬ ОСАДКОНАКОПЛЕНИЯ, Амстердам, 1967, перев. с англ., 23 л., 2 р. 50 к.

ДИАГЕНЕЗ И КАТАГЕНЕЗ ОСАДОЧНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ. Под ред. Г. Ларсена и Дж. Чилингара, Амстердам, 1967, перев. с англ., 38 л., 4 р.

ЗЕМНАЯ КОРА И ВЕРХНЯЯ МАНТИЯ. Под ред. П. Харта, Вашингтон, 1969, перев. с англ., 66 л., 6 р. 80 к.

Еще имеется возможность подписаться на книгу Мюллера Л. «Инженерная геология. Механика скальных массивов», Штутгарт, 1963, перев. с нем., 26 л., 2 р. 80 к., которая выйдет не в 1970 г., а во II кв. 1971 г.

Подписка на книги серии «Науки о Земле» принимается в магазинах подписных изданий.